III ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1 9 6 3

ПЕРВАЯ ПРИБАЛТИЙСКАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ВОПРОСАМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

С 14 июня по 18 июня 1963 г. при Вильнюсском Государственном педагогическом институте проходила Первая Прибалтийская геометрическая конференция по вопросам дифференциальной геометрии. Решение о проведении конференции было принято литовскими, латышскими и эстонскими геометрами на первой Всесоюзной геометрической конференции в Киеве (в июне 1962 г.). Был избран оргкомитет конференции в составе доц. Л. Я. Березины (Рига), доц. Ю. Г. Лумисте (Тарту) и В. И. Близникас (Вильнюс, председатель).

В работе конференции приняло участие 72 геометра, представляющие 22 города Советского Союза. Наибольшее количество участников было из Вильнюса (15), Москвы (8), Саратова (8), Харькова (6), Минска (5), Тарту (5), Горького (5), Киева (3), Казани (2), Риги (2), Пензы (2). На конференции участвовало по одному делегату из Еревана, Томска, Иванова, Смоленска, Коломны, Житомира, Одесы, Фрунзе, Калининграда, Ярославля и Черновиц.

На конференции приняли участие проф. Артур Моор из Венгрии и доктор физико-математических наук Андрей Зайц из Польши.

В работе конференции приняло участие 13 профессоров и докторов физико-математических наук, 36 доцентов и кандидатов физико-математических наук и 23 научные сотрудники, преподаватели вузов и аспиранты.

Конференция открилась 14 июня в 11 часов в зале кинотеатра «Аврора» города Тракай (25 км от Вильнюса). Конференцию открыл проф. Герман Федорович Лаптев (Москва), который в своей вступительной речи подчеркнул, что дифференциальная геометрия играет важнейшую роль не только в современной физике, но и в конструировании режущих инструментов и в создании зубчатых передач. Благодаря вниманию, которое Партия и Правительство уделяют науке, — сказал Г. Ф. Лаптев, — она развивается бурными темпами во всех частях нашей многонациональной родины. В частности, на наших глазах растут многочисленные кадры талантливых учёных прибалтийских республик. Также Г. Ф. Лаптев приветствовал литовских, латышских, эстонских геометров от имени московских геометров, и подчеркнул, что конференция вышла далеко за пределы Прибалтики и имеет всесоюзный характер.

В конце своего выступления Г. Ф. Лаптев сообщил, что за тот год, который прошел между Первой Всесоюзной геометрической конференцией и этой, от нас ушли старейшие геометры нашей страны: проф. Киевского университета заслуженный деятель наук УССР Борис Яковлевич Букреев (1859—1963) и проф. Московского университета заслуженный деятель науки РСФСР Сегей Сегеевич Бюшгенс (1882—1963). Делегаты Первой Прибалтийской конференции по вопросам дифференциальной геометрии почтили память Б. Я. Букреева и С. С. Бюшгенса вставанием.

Конференцию приветствовали проректор по научной работе Вильнюсского государственного педагогического института доц. Ю. Мицкевичюс, проф. Казанского университета Александр Петрович Норден, проф. Харьковского университета Яков Павлович Бланк и проф. Артур Моор из Венгрии.

По предложению доц. Л. Я. Березины делегаты конференции послали приветственную телеграмму старейшему геометру нашей страны, воспитателю нескольких поколений советских геометров, главе Московской школы дифференциальной геометрии, проф. Сергею Павловичу Финикову.

На пленарном заседании 17 июня была избрана редакционная комисия для составления проекта решения конференции в следующем составе: проф. Г. Ф. Лаптев, проф. А. Н. Норден, проф. А. Е. Либер, доц. П. И. Катилюс, доц. С. Е. Карапетян, проф. И. И. Егоров, доц. Ю. Г. Лумисте, доц. Л. Я. Березина, доц. К. И. Гринцявичюс, стр. науч. сотрудник АН СССР Н. М. Остиану и канд. физ.-мат. наук В. И. Близникас.

Текст решения конференции публикуется.

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

На пленарных заседаниях председательствовали:

1. 14 июня — доктор физико-математических наук проф. Герман Федорович Лаптев.
2. 15 июня — доктор физико-математических наук проф. Александр Петрович Норден.
3. 17 июня — доктор физико-математических наук проф. Александр Евгеньевич Либер.
4. 18 июня — доктор физико-математических наук проф. Яков Павлович Бланк.

Ниже публикуются краткие содержания пленарных докладов.

А. П. НОРДЕН (Казань)

ОБ ОДНОМ НОВОМ ПРИЛОЖЕНИИ МЕТОДА НОРМАЛИЗАЦИЙ

Многообразие $X_N\,(N=n_1+\ldots+n_r)$ называется композицией r базовых многообразий X_{n_i} n_i-измерений, если оно является их топологическим произведением. Композиция одного из базовых многообразий X_{n_i} и $r-1$ точки, каждая из которых принадлежит одному из остальных базовых многообразий, называется позицией X_{n_i} в X_N.

Композиция называется декартовой, если в пространстве X_N задана аффинная связность без кручения Γ так, что плоские n_i-направления, касающиеся позиций X_{n_i}, образуют поля абсолютно-параллельных направлений. Связность Γ определяется заданием произвольных аффинных связностей без кручения Γ_i на всех позициях.

Конфигурацией C^r_m называется система r поверхностей $\overset{i}{X}_m$ m-измерений в проективном пространстве P_n, если $n=m+r-1$. Позиция всякой $\overset{i}{X}_m$ может быть нормализована.

За нормаль 1-го рода X_m принимается плоскость P_{n-m}, соединяющая точку M_i с точками других базовых поверхностей, а чтобы найти нормаль второго рода, поступаем следующим образом. Через $r-1$ центр позиции и касательные плоскости P_m базовых поверхностей, не совпадающих с $\overset{i}{X}_m$, проводим $r-1$ гиперплоскость и рассматриваем алгебраическую поверхность $r-1$ порядка, распадающуюся на эти гиперплоскости. За нормали второго рода $\overset{i}{X}_m$ принимаем первую поляру точки M_i относительно этой гиперповерхности.

Описанная нормализация определяет эквипроективную связность Γ_i на всякой позиции $\overset{i}{X}_m$, а это позволяет определить связность Γ в пространстве Π_{m-r} декартовой композиции всех поверхностей $\overset{1}{X}_m, \overset{2}{X}_m, \ldots, \overset{r}{X}_m$.

При $r=2$ нормаль 1-го рода соединяет точки $\overset{1}{M}$ и $\overset{2}{M}$, а нормаль 2-го рода P_{m-1} является плоскостью пересечения касательных плоскостей $\overset{1}{X}_m$ и $\overset{2}{X}_m$. В этом случае внутренняя геометрия каждой позиции будет евклидовой.

Исходя из этого построения, можно доказать ряд положений, касающихся геодезических линий и геодезических поверхностей в пространстве X_N со связностью Γ.

В частности, если многообразия $\overset{1}{X}_{n-1}$ и $\overset{2}{X}_{n-1}$ являются полостями одной и той же гиперповерхности Q_{n-1} второго порядка, то Γ будет связностью риманова пространства $V_{2(n-1)}$.

При $n=3$ линейный элемент этого риманова пространства выражает взаимный момент смежных прямых, каждая из которых соединяет точки полостей поверхности Q_2, принятой за обсолют пространства постоянной кривизны.

Ю. Г. ЛУМИСТЕ (Тарту)

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНАЯ СВЯЗНОСТЬ В РАССЛОЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ АФФИННЫХ РЕПЕРОВ

Рассматривается главное расслоенное пространство $P(V_p\mathfrak{A}_m)$ с дифференцируемой базой V_p и группой аффинных преобразований $\mathfrak{A}_m$ m-мерного вещественного аффинного пространства A_m в качестве структурной группы. В пространстве P задается инфинитезимальная связность по Г. Ф. Лаптеву, которая обобщает связность, введенную А. Швецом в 1960 г. (отсутствует локальный центр), а также аффинную связность, канонически присоединенную к линейной связности (размерности m и n могут быть различными). Обобщается характеристический тензор, введенный И. Каттанео Гаспарини в 1958 г. для более частного случая. Формы кручения рассматриваемой связности составляют объект только вместе с формами кривизны. Вводится понятие фокуса.

Инфинитезимальная связность рассматриваемого типа индуцируется с помощью нормализатора в p-параметрическом семействе m-мерных плоскостей n-мерного пространства. Возникает обратная проблема погружения произвольной рассматриваемой связности в пространство A_n, обобщающая постановку задачи погружения у Галвани (1946) и Рыбникова (1959).

Аналогичные вопросы рассматриваются в случае, если группу $\mathfrak{A}_m$ заменяет её подгруппа — группа движений евклидова пространства R_m.

В. С. МАЛАХОВСКИЙ (Томск)

МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ В n-МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. В последние десятилетия внимание геометров привлекают проблемы, которые стоят „на стыке наук", так как решение этих проблем не только расширяет наши познания в новых областях, но и приводит к получению многих результатов в „старых", достаточно глубоко развитых геометрических дисциплинах.

Одной из таких проблем является построение дифференциальной геометрии многообразий, образующим элементом которых является алгебраическое многообразие определенной размерности и определенного порядка, причем все алгебраические многообразия данной совокупности рассматриваются в n-мерном проективном пространстве P_n.

Простейшими алгебраическими многообразиями являются линейные многообразия и среди них одномерное линейное многообразие — прямая линия.

Интенсивная разработка теории двух-и трехпараметрических линейчатых многообразий (прямолинейных конгруэнций и линейчатых комплексов) продолжается и в настоящее время, однако теория m-параметрических семейств p-мерных плоскостей пространства P_n сейчас еще недостаточно разработана. Еще меньше исследованы m-параметрические многообразия алгебраических линий и поверхностей высших порядков.

2. Решение поставленной проблемы целесообразно начать с исследования многообразий, образующим элементом которых является алгебраический элемент — невырожденная алгебраическая гиперповерхность четного порядка $k=2p$ (p — натуральное число) гиперплоскости P_{n-1} точечного проективного пространства P_n, так как такие многообразия являются прямыми обобщениями конгруэнций и комплексов кривых второго порядка. Совокупность всех алгебраических элементов порядка k, погруженных в P_n, образуют $(n+C^k_{n+k-1}-1)$-мерное пространство $R\,(A^k_{n-2})$. По принципу двойственности ему соответствует пространство

$r(a_k^{n-2})$ невырожденных гиперконусов класса k. Многообразие алгебраических элементов удобно характеризировать четверкой целых чисел и обозначать символом $(h, m, n)^k$, где n — размерность пространства P_n, k — порядок алгебраического элемента, m — размерность многообразия алгебраических элементов и h — число параметров, от которых зависит семейство гиперплоскостей, содержащих алгебраические элементы данного многообразия. Многообразие $(h, h+p, n)^k$ расслаивается на ∞^h подмногообразий $(o, p, n)^k$. Особый интерес представляет исследование многообразий $(h, h, n)^k$, являющихся наиболее общими h-мерными многообразиями алгебраических элементов. Такое многообразие существует и определяется с произволом $C^k_{n+k-1}+n-h-1$ функций h аргументов. Найден основной внутренний фундаментальный объект многообразия $(h\ h, n)^k$, позволяющий строить геометрию многообразия. На каждом алгебраическом элементе многообразия $(n, n, n)^k$ инвариантно определяется $(n-3)$-мерном t-фокальное подмногообразие порядка $k(2k-1)$, имеющее для $n=3$ простую геометрическую характеристику: простая точка M плоской алгебраической кривой A^k_1 комплекса $(3, 3, 3)^{k'}$ тогда и только тогда есть t-фокальная точка этой кривой, когда она является фокусом неголономных прямолинейных конгруэнций, соответствующих всем точкам касательной к кривой A^k_1 в точке M.

3. Наиболее интересными геометрическими особенностями обладают многообразия $(h, m, n)^2$ (квадратичных элементов), так как пространство $R(A^2_{n-2})$ является транзитивным относительно фундаментальной проективной группы G, пространства же $R(A^k_{n-2})$ при $k>2$ интранзитивны.

Для многообразий $(h, h, n)^2$, в частности, справедлива теорема „перенесения", позволяющая рассматривать дифференциальную геометрию многообразия $(n, n, n)^2$ как геометрию некоторой регулярной гиперповерхности $S\,(n+1)$-мерного тангенциального центропроективного пространства P^{n+1}_0 и дифференциальную геометрию многообразия $(h, h, n)^2$ при $h<n$ как геометрию h-мерного голономного подмногообразия такой гиперповерхности.

4. Общие свойства многообразий алгебраических элементов с успехом используются при построении теории конгруэнции кривых второго порядка.

Г. Ф. ЛАПТЕВ (Москва)

ОБ ОСНАЩЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

П. И. Швейкин и А. Е. Либер построили инвариантное оснащение поверхности в аффинном пространстве, отправляясь от некоторого относительного инварианта, охваченного фундаментальным объектом надлежащего порядка.

Отправляясь от того же инварианта докладчиком было построено оснащение n-мерной поверхности N-мерного пространства аффинной связности с кривизной и кручением в случае, когда

$$N-n\leqslant\frac{n(n+1)}{2}\qquad \text{(ДАН СССР, 1959, 126, № 3).}$$

Для случая, когда отсутствует кручение и

$$\frac{n(n+1)}{2}<N-n\leqslant\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

эта задача решена совместно с А. Зайцем и составляет предмет настоящего сообщения.

А. МООР (Венгрия)

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE OSKULIERENDEN PUNKTRÄUME DER METRISCHEN LINIENELEMENTRÄUME

Ein allgemeiner n-dimensionaler metrischer Linienelementraum L_n ist die Mannigfaltigkeit der Linienelemente $(x^i, \dot{x}^i)$ in der die Metrik durch einen geeigneten metrischen Fundamentaltensor $g_{ij}(x, \dot{x})$ definiert ist und im Raume ein metrisches invariantes Diferential D existiert,

d. h. es ist $Dg_{ij} \equiv 0$. Man bekommt einen **oskulierenden Riemannschen Raum** dadurch, dass man in einem Teilbereich B_n zu jedem Punkte x^i von B_n durch die Formeln

$$\dot{x}^i = r^i(x)$$

eine Richtung zuordnet, und dann den Tensor

$$\gamma_{ij}(x) \overset{\text{def}}{=} g_{ij}\Big(x,\ r(x)\Big) \tag{A}$$

bildet. Es gilt der folgende

Satz I. Der Feldvektor $r^i(x)$ kann immer so gewählt werden, dass längs einer Grundfolge

$$x^i = x^i(\tau),\quad \dot{x}^i = \dot{x}^i(\tau),\quad \tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1 \tag{B}$$

der Linienelemente das invariante Differential des oskulierenden Riemannschen Raumes mit dem des L_n-Raumes übereinstimmt.

Der Krümmungstensor des oskulierenden Riemannschen Raumes unterscheidet sich im allgemeinen vom ersten Krümmungstensor R^{*j}_{ikl} des L_n-Raumes. Es besteht aber der folgende

Satz II. Ist im Bereich B_n

$$R^{*j}_{ikl}\,\dot{x}^l = 0$$

gültig, so kann der Feldvektor $r^i(x)$ so gewählt werden, dass längs der Grundfolge (B) das invariante Differential, bzw. auch der Krümmungstensor des oskulierenden Riemannschen Raumes mit dem invarianten Differential, bzw. mit dem ersten Krümmungstensor des L_n-Raumes übereinstimmt.

Man bekommt einen sog. **oskulierenden affinzusammenhängenden Raum**, falls man den Feldvektor $r^i(x)$ statt $g_{ij}(x, \dot{x})$ in die affinen Übertragungsparameter $\Gamma^{*j}_{ik}(x, \dot{x})$ des L_n-Raumes substituiert. Die Übertragungsparameter des oskulierenden affinzusammenhängenden Raumes sind also

$$L^{(\alpha)j}_{ik}(x) \overset{\text{def}}{=} \Gamma^{*j}_{ik}\Big(x,\ r(x)\Big).$$

Für diese Räume besteht der folgende

Satz III. Das invariante Differential bzw. der Krümmungstensor des oskulierenden affinzusammenhängenden Raumes ist längs der Grundsfolge (B) für einen geeigneten $r^i(x)$ mit dem invarianten Differential, bzw. mit dem ersten Krümmungstensor des L_n-Raumes identisch.

Zum Schluss bemerken wir, dass in einem L_n-Raum mehrere invariante Differentiale existieren können, da die Forderung $Dg_{ij} = 0$ die Übertragungsparameter noch nicht eindeutig bestimmt. Dementsprechend können mehrere oskulierenden affinzusammenhängenden Räume definiert werden. Der oskulierende Riemannsche Raum ist hingegen durch (A) eindeutig festgelegt.

В. И. ВЕДЕРНИКОВ (Горький)

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РАБОТЫ СОТРУДНИКОВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КАФЕДР ГОРЬКОВСКОВО ПЕДИНСТИТУТА

В последнее время на кафедре алгебры и геометрии Горьковского пединститута образовалась группа геометров (В. И. Ведерников, Л. Н. Кривоносов, Н. Г. Туманова, Н. Н. Чудинов, А. И. Пендюрин, Н. А. Степанов, А. М. Полянсков, В. И. Чернов), которые ведут большую работу по самообразованию, а также занимаются научно-исследовательской работой в области геометрии.

Научно-исследовательская работа ведется на кафедре в трех основных направлениях. Первое направление относится к области конформно дифференциальной геометрии. В этом направлении мы связаны с Казанской школой А. П. Нордена, идеи которого и помощь которого в значительной степени содействовали зарождению и развитию наших работ. Большинство этих работ посвящено исследованию семейств гиперсфер и, в частности, конгруэнции сфер трехмерного конформного пространства

M_3. В основном эти работы опубликованы в «Известиях высших учебных заведений» и в «Ученых записках» Горьковского désinstitut, вып. 4. Поэтому эти работы мы не будем подробно рассматривать. Отметим лишь, что в работах В. И. Ведерникова рассматривались семейства гиперсфер, имеющие огибающие полости, а в работах Л. Н. Кривоносова подробно рассмотрены такие конгруэнции сфер в M_3, которые не имеют фокальных полостей. Им, в частности, выделены и подробно исследованы так называемые эволютные и эвольвентные семейства сфер M_3. Особое место занимает работа В. И. Ведерникова, посвященная конформной наложимости поверхностей конформного пространства. В. И. Ведерников доказал, что в случае гиперповерхности конформная наложимость совпадает с наложимостью в смысле Э. Картана, определил наложимость нормализованных поверхностей и дал её геометрическую интерпретацию.

Также отходит от общей тематики и работа Л. Н. Кривоносова, посвященная общей теории конгруэнций окружностей в M_3, в которой существенным образом использованы перенесения Дарбу и построена общая теория конгруэнций окружностей. Кроме того, Л. Н. Кривоносовым определена индикатрисса, аналогичная индикатриссе Дюпена, с которой связаны все основные геометрические образы окрестности второго порядка конгруэнций окружностей.

Второе направление относится к общей теории гиперповерхностей пространства Евклида E_n, огибающие k-параметрические семейства гиперсфер (В. И. Ведерников). Рассмотрены частные классы таких гиперповерхностей, огибающие гиперповерхности вращения и циклиды Дюпена. Кроме того, в одной работе В. И. Ведерникова, которая скоро выйдет из печати, определена метрическая характеристика этих гиперповерхностей наряду с метрической характеристикой других классов гиперповерхностей.

Третье направление определилось в самое последнее время, хотя основной замысел этих исследований возник около десяти лет тому назад в связи с размышлениями над связью теории нормализаций А. П. Нордена с общей теорией связности. Опять таки следует указать на основную причину возникновения идей в рассматриваемом вопросе — на Казанскую школу А. П. Нордена. Кроме того, большое влияние оказали и идеи Э. Картана и работы Г. Ф. Лаптева по общей теории связностей. Работа эта только начинается и не может считаться полностью завершенной. Основная идея (В. И. Ведерников) состоит в обобщении метода нормализации А. П. Нордена на случай инфинитезимальной связности в произвольном главном расслоенном пространстве $P(B, G)$, где B — база этого расслоенного пространства, а G — группа, являющаяся слоем этого пространства. Если для группы G определено представление F, и соответствующее присоединенное расслоенное пространство $E(B, F, G)$ со слоем F, то под нормализацией мы понимаем определение в E некоторой секущей поверхности. Так как в $P(B, G)$ определена инфинитезимальная связность, то нормализацией определяется главное расслоенное пространство $P_1(B_1, H)$, где H — стационарная группа точки представления F, в котором может индуцироваться инфинитезимальная связность. В этом случае мы будем называть нормализацию индуцирующей. На ряде примеров показывается, что часто эта нормализация может оказаться индуцирующей. В частности, все случаи нормализации поверхностей, рассмотренные А. П. Норденом, укладываются в эту схему. Отметим, что в этом случае каждая нормализация индуцирует свою инфинитезимальную связность, которую мы назовём подчиненной связностью, и данная связность как бы расслаивается на подчиненные связности. Например, в случае римановой аффинной связности, можно рассмотреть представление линейной группы GL в пространстве $GL/O(n)$, где $O(n)$ — ортогональная подгруппа GL. Тогда определится расслоение линейной связности на связности, аналогичные евклидовой связности.

В приложениях, связанных с теорией нормализаций А. П. Нордена, всякий раз возникают связности, названные нами приводимыми связностями, которые порождаются линейными вполне приводимыми группами, являющимися слоем этого расслоенного пространства, в котором введена связность. Так как этому вопросу посвящен специальный наш доклад на этой конференции, то мы не будем подробно останавливаться на этом вопросе. Отметим лишь, что в остальных вопросах, которые здесь будут отмечены, всякий раз возникают приводимые связности. В частности, при нормализации следует стремиться именно к установлению приводимой связности, распадающейся на две связности, из которых одна может быть выбрана как нужная.

Нами исследована специальная инфинитезимальная связность, которую мы назвали псевдолинейной связностью. Эта связность была введена (В. И. Ведерниковым) в связи с необходимостью рассмотрения нормализаций в проективном пространстве, в котором введены однородные координаты. Именно, при установлении нормализации поверхности проективного пространства по способу, указанному А. П. Норденом, естественно возникает псевдолинейная связность, и на ее основе может быть введена линейная связность как ассоциированная с ней. Сам этот переход автоматически совершается при переходе к неоднородным координатам. Псевдолинейная связность очень удобна для построения ковариантного дифференциала, как оператора, переводящего любой псевдотензор того же строения. Нами определена метрическая псевдолинейная связность, для которой ассоциированная линейная связность оказывается связностью Вейля. Построены тензор кривизны и кручения введенных нами связностей (В. И. Ведерников и А. И. Пендюрин), изучены вопросы конформного и проективного преобразований псевдолинейных связностей и вопросы приложения этих связностей.

Оказалась тесно связаной с теорией приводимых связностей и теория сопряженных связностей. Именно, если рассматривать тот случай приводимой связности, когда слоем является группа матриц вида

$$\begin{pmatrix} A & O^* \\ O & A^* \end{pmatrix},$$

где A — произвольная n-мерная невырожденная матрица, а A^* — ей сопряженная матрица. Тогда в соответствующем расслоенном пространстве возникает связность, распадающаяся на две независимые связности, причем последние оказываются сопряженными в смысле А. П. Нордена. Такое понятие сопряженности допускает естественное обобщение на случай, когда матрица A не является произвольной невырожденной матрицей, а принадлежит какой-либо линейной группе. Кроме того, соответствие сопряженности может быть заменено любым соответствием изоморфизма или гомоморфизма двух групп. Нами (В. И. Ведерников и Н. Н. Чудинов) изучаются различные приложения и обобщения сопряженности связностей, в частности, общий случай гомоморфизма реализуется в различных частных случаях, допускающих различные приложения. Работы в любом из указанных направлений не могут считаться сколько-либо завершенными, и мы не говорим здесь о различных идеях, которые у нас не получили еще окончательной формы.

Отметим, наконец, что различными участниками наших семинаров (В. И. Ведерников, Л. Н. Кривоносов, Н. Г. Туманова, Н. А. Степанов, А. М. Полянсков) проводится работа и выходящая за рамки отмеченных трех основных направлений.

Р. М. ГЕЙДЕЛЬМАН (Москва)

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Симплектическое пространство имеет две трактовки: аффинную и проективную.

В первой трактовке симплектическим пространством называется аффинное пространство четной размерности, в котором задан невырожденный дважды ковариантный кососимметричный тензор $g_{\alpha\beta}$, порождающий инвариантную кососимметрическую билинейную форму от координат X^α и Y^β двух векторов X и Y:

$$\langle XY\rangle = g_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{1}$$

называемую скалярным произведением этих векторов.

Фундаментальной группой этого пространства является группа симплектических преобразований:

$$\overset{*}{X}{}^{\alpha}=a^{\alpha}_{\beta}X^{\beta}+a^{\alpha}_{0}, \tag{2}$$

где

$$(a^{\alpha}_{\beta})^{T}\cdot(g_{\alpha\beta})\cdot(a^{\alpha}_{\beta})=(g_{\alpha\beta}).$$

В проективной трактовке симплектическим пространством называется проективное пространство нечетной размерности, в котором задан двухвалентный ковариантный невырожденный кососимметрический относительный тензор $g_{\alpha\beta}$ (α, $\beta=1, 2, \ldots, 2n$); $g_{\beta\alpha}=-g_{\alpha\beta}$. Этот тензор $g_{\alpha\beta}$ порождает инвариантный комплекс K прямых

$$g_{\alpha\beta}p^{\alpha\beta}=0, \tag{3}$$

где $p^{\alpha\beta}$ — плюккеровы координаты прямой.

Следовательно, $(2n-1)$-мерное симплектическое пространство SP_{2n-1} можно определить как $(2n-1)$-мерное проективное пространство, фундаментальной группой которого является подгруппа коллинеаций, переводящая прямые некоторого линейного комплекса K, называемого абсолютным, в такие же прямые.

Тензор $g_{\alpha\beta}$ порождает относительно инвариантную билинейную форму от проективных координат X^{α} и Y^{β} точек A и B:

$$\langle AB\rangle=g_{\alpha\beta}X^{\alpha}Y^{\beta}. \tag{4}$$

Две точки A и B, для которых $\langle AB\rangle=0$, называются сопряженными относительно абсолютного комплекса K. Две плоскости называются сопряженными относительно абсолютного комплекса K, если каждая точка первой сопряжена каждой точке второй.

Кососимметрический тензор $g_{\alpha\beta}$ можно привести к каноническому виду:

$$g_{12}=g_{34}=\ldots=g_{2n-1,\,2n}=1;\quad g_{13}=g_{14}=\ldots=g_{2n-2,\,2n}=0. \tag{5}$$

Репер, в котором тензор $g_{\alpha\beta}$ принимает канонический вид (5), называется сопряженным. С помощью перенесения Плюккера строится интерпретация трехмерного симплектического пространства в четырехмерном неевклидовом.

2. Свойства плоскостей симплектического пространства были рассмотрены И. М. Ягломом. Систематическое развитие симплектической дифференциальной геометрии началось только в последнем десятилетии, хотя некоторые изолированные факты трехмерной симплектической геометрии известны из теории пар T проективной геометрии. Первые работы по симплектической теории поверхности принадлежат Н. М. Остиану. В ее диссертации и последующих работах были решены основные вопросы общей теории m-мерных поверхностей в $2m$-мерном симплектическом пространстве (в аффинной интерпретации): найдена последовательность объектов, определяющих поверхность, инвариантные нормализации и связность.

3. Основы симплектической теории конгруэнций прямых в трехмерном пространстве были заложены работами Р. М. Гейдельмана.

Для каждой прямой l конгруэнции, не принадлежащей абсолютному комплексу K, существует единственная прямая $\bar{l}$, сопряженная относительного абсолютного комплекса. Эта прямая $\bar{l}$ описывает конгруэнцию $(\bar{l})$, называемую сопряженной конгруэнцией. Пара сопряженных конгруэнций образует пару T с обратным соответствием развертывающихся поверхностей. Противоположные преобразования Лапласа пары сопряженных конгруэнций дают такие же пары, откуда следует, что это имеет место для всей последовательности Лапласа. Если данная конгруэнция прямых $(l)-W$ или R, то конгруэнции сопряженных прямых $(\bar{l})$ — тоже W или R.

Для конгруэнций прямых найдена последовательность фундаментальных объектов. Задание поля фундаментального объекта порядка три определяет конгруэнцию прямых в Sp_3 с точностью до симплектического преобразования.

Найдены и исследованы инвариантные геометрические образы, связаные с дифференциальными окрестностями 1-го и 2-го порядка. В частности, с дифференциальной окрестностью 2-го порядка пары взаимных прямых l и $\bar{l}$ инвариантно связана пара взаимных прямых l_1 и $\bar{l}_1$, названных L-преобразованиями прямых l и $\bar{l}$. Это L-преобразование порождает целую последовательность L-преобразований.

Рассмотрены другие вопросы общей теории конгруэнций прямых в Sp_3, а также специальные классы конгруэнций.

4. Автором рассмотрены также основные вопросы симплектической теории комплекса прямых в Sp_3.

Найдены дифференциальные уравнения комплекса и последовательность его фундаментальных геометрических объектов. Геометрический объект 2-го порядка определяет комплекс с точностью до симплектического преобразования. Найдены две инвариантные дифференциальные формы и три независимых алгебраических инварианта и квадратичные формы и инвариантные геометрические образы, связанные с текущей прямой комплекса. Различными способами может быть построен канонический репер комплекса в Sp_3.

5. В работе Р. М. Гейдельмана „Основы теории семейств подпространств в симплектических пространствах" изложены основы многомерной симплектической геометрии семейств плоскостей (L) в том случае, когда последние являются симплектическими подпространствами.

6. Начало развития симплектической дифференциальной геометрии выявило ее интерес и связь с геометриями других однородных пространст, поэтому весьма желательно участие молодых геометров в развитии как трехмерной так и многомерной дифференциальной геометрии.

Н. И. КОВАНЦОВ (Киев)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВ С ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППОЙ

1. Основы дифференциальной геометрии пространств с фундаментальной группой были заложены С. Ли [1], [2]. Свое дальнейшее развитие эти основы нашли в работах Ф. Клейна, сформулировавшего основные идеи геометрии однородных пространств в знаменитой Эрлангенской программе [3]. В соответствии с концепциями Ли и Клейна мы задаемся некоторым n-мерным числовым континуумом V_n, которому присваиваем название пространства и в котором каждый элемент определяется упорядоченной совокупностью n чисел $x^1, \ldots, x^n$ (действительных или мнимых). Мы задаемся, кроме того, совокупностью непрерывных преобразований, переводящих V_n в себя и зависящих от r параметров $a^1, \ldots, a^r$;

$$\bar{x}^i = f^i(x^1, \ldots, x^n;\ a^1, \ldots, a^r) \equiv f^i(x, a), \qquad i=1, \ldots, n. \tag{1}$$

От преобразований (1) требуется выполнения известных четырех условий, делающих их совокупность группой. Эти условия выполняются тогда и только тогда, когда функции $f^i = \bar{x}^i$ удовлетворяют вполне интегрируемой системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial a^\alpha} = \xi^i_\beta(\bar{x})\, A^\beta_\alpha(a), \tag{2}$$

([4]). Векторы ξ^i_β — линейно независимы с постоянными коэффициентами, $\det \| A^\beta_\alpha \| \neq 0$ в некоторой окрестности тождественного преобразования a_0. Последнее означает, что формы

$$\omega^\alpha = A^\alpha_\beta(a)\, da^\beta \tag{3}$$

линейно независимы. Это базисные формы группы. Они подчинены уравнениям структуры данной группы преобразований

$$D\omega^{\alpha}=C^{\alpha}_{\beta\gamma}[\omega^{\beta},\ \omega^{\gamma}],\quad \alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \ldots,\ r, \tag{4}$$

$C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — структурные константы, подчиняющиеся условиям

$$C^{\alpha}_{\beta\gamma}+C^{\alpha}_{\gamma\beta}=0,\quad C^{\varepsilon}_{\delta(\alpha}C^{\delta}_{\gamma\beta)}=0,\quad \varepsilon,\ \delta,\ \gamma=1,\ \ldots,\ r. \tag{5}$$

Формы ω^{α} инвариантны относительно преобразования параметров.

Равенства (2) могут быть записаны в виде уравнений в полных дифференциалах

$$d\bar{x}^{i}=\xi^{i}_{\alpha}(\bar{x})\,\omega^{\alpha}.$$

Геометрический образ, стационарная подгруппа которого есть тождественное преобразование, называется репером группы. Репер может состоять из конечного числа точек. Эти точки (вершины репера) всегда можно расположить в таком порядке, что стационарная подгруппа первой точки будет определяться уравнениями

$$\omega^{1}=0,\ \ldots,\ \omega^{n_1}=0,\qquad (n_1=n) \tag{6}$$

стационарная подгруппа двух первых точек — уравнениями (6) и

$$\omega^{n_1+1}=0,\ \ldots,\ \omega^{n_1+n_2}=0 \tag{7}$$

и т. д. Если репер состоит из p точек, мы получим p подобных систем уравнений, причем $n_1+\ldots+n_p=r$. Может случиться, что последние системы не содержат ни одного уравнения. Это будет иметь место в том случае, когда стационарная подгруппа какой-то части репера не сводится к непрерывному множеству преобразований.

Идея подвижного репера ведет свое начало от Гаусса [5]. Г. Дарбу [6] в евклидовом пространстве пользовался ортогональным репером при любой параметризации. У Э. Картана ([7]) метод подвижного репера был распространен на пространство с произвольной фундаментальной группой, у Г. Ф. Лаптева [8] — на произвольное неголономное пространство геометрических элементов с произвольной фундаментально-групповой связностью.

2. Нашим основным объектом рассмотрения будут являться линейчатые многообразия в пространствах с фундаментальной группой. Следовательно, в каждом из таких пространств должно быть определено понятие прямой как геометрического образа, заданного в целом. Принимая это во внимание, мы не можем, очевидно, довольствоваться теми аналогами прямой, которые предоставляет в наше распоряжение, скажем, произвольное пространство аффинной связности — геодезические линии такого пространства есть локальный геометрический образ, инфинитезимальные свойства которого, вообще говоря, незаконно переносить на весь образ в целом.

Прямая линия в том ее понимании, которое пригодно для наших рассмотрений, может быть определена только аксиоматически. Геометрия, в которой такая аксиоматика есть, — это проективная геометрия. Естественно поэтому при рассмотрении дифференциальной геометрии однородных пространств ограничиться рассмотрением полной линейной группы (фундаментальной группы проективного пространства) и всевозможных ее подгрупп.

3. Пусть n-мерное проективное пространство P_n отнесено к семейству реперов $A_1,\ \ldots,\ A_{n+1}$, инфинитезимальные смещения которых определены равенствами

$$dA_i=\omega^{j}_{i}A_j,\qquad i,\ j=1,\ \ldots,\ n+1. \tag{8}$$

Формы ω^{j}_{i} — базисные формы полной линейной группы. Этих форм $(n+1)^2$ в то время, как порядок группы, учитывая однородность проективных координат, равен $(n+1)^2-1$. Избыток линейных форм объясняется возможностью умножения координат всех вершин тетраэдра (включая и единичную точку) на один и тот же множитель пропорциональности. Чтобы избавиться от этого неопределенного множителя, можно положить $(A_1 \dots A_{n+1})=1$, а тогда как легко понять,

$$\omega_1^1+\dots+\omega_{n+1}^{n+1}=0. \tag{9}$$

Формы ω_j^i подчиняются известным уравнениям структуры проективного пространства

$$D\omega_j^i=[\omega_j^k,\ \omega_k^i], \qquad i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \dots,\ n+1. \tag{10}$$

Пусть в P_n действует некоторая подгруппа G_r полной линейной группы с базисными формами $\omega^1, \dots, \omega^r$, подчиненными структурным уравнениям (4). В таком случае

$$\omega_i^j=p_{i\alpha}^j\omega^\alpha, \qquad \alpha=1,\ 2,\ \dots,\ r, \tag{11}$$

где $p_{i\alpha}^j=\text{const}$. В силу (19) должно быть $p_{i\alpha}^i=0$. Ранг матрицы $\mathbf{M}=\|P_{i\alpha}^j\|$ равен r, в противном случае формы ω_j^i можно было бы выразить через базисные формы ω^α в числе, меньшем, чем r, а это означало бы, что подгруппа G_r имеет меньший порядок.

Дифференцируя (11) внешним образом и учитывая (10) и (4), получим

$$p_{i\alpha}^j C_{\beta\gamma}^\alpha=\frac{1}{2}\left(p_{i\beta}^k p_{k\gamma}^j-p_{i\gamma}^k p_{k\beta}^j\right). \tag{12}$$

В силу замечания о ранге матрицы $\mathbf{M}$ эти уравнения можно однозначно разрешить относительно $C_{\beta\gamma}^\alpha$. При этом равенства (5) — единственны равенства, связывающие структурные константы, — будут выполнены. Единственные условия на постоянные $p_{j\alpha}^i$ — те, которые получаются из (12) исключением структурных констант $C_{\beta\gamma}^\alpha$. Этих условий, впрочем, очень много, гораздо больше числа самых неизвестных (при $r>3$).

4. Равенства (11) позволяют определить (в случае, когда он существует) абсолют однородного пространства с заданной фундаментальной группой G_r. Это делается следующим образом:

Пусть $M=x^iA_i$ — точка пространства ($x^i=\text{const}$, причем $x^{n+1}\neq 0$). Тогда

$$dM=\frac{x^i}{x^{n+1}}\,\omega_i^{n+1}\mathbf{M}+\frac{x^i}{x^{n+1}}\left(x^{n+1}\omega_i^k-x^k\omega_i^{n+1}\right)\mathbf{A}_k, \qquad k=1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

Имеем формы

$$\Theta^k=\frac{x^i}{x^{n+1}}\left(x^{n+1}\omega_i^k-x^k\omega_i^{n+1}\right)=\frac{x^i}{x^{n+1}}\left(x^{n+1}p_{i\alpha}^k-x^k p_{i\alpha}^{n+1}\right)\omega^\alpha.$$

Матрица

$$\mathbf{B}=\left\|\frac{x^i}{x^{n+1}}\left(x^{n+1}p_{i\alpha}^k-x^k p_{i\alpha}^{n+1}\right)\right\| \tag{13}$$

содержит n строк (номера строк обозначены индексом k) и r столбцов (номера столбцов соответствуют индексу α). Точка M, для которой ранг q этой матрицы максимальный, есть обыкновенная. Точка, для которой этот ранг меньше q — особая. Мы получим особые точки, если приравняем к нулю все миноры матрицы $\mathbf{B}$ порядка q.

Если группа G_r транзитивна, то $r\geqslant n$. Максимальный ранг матрицы $\mathbf{B}$ равен n. Приравняв к нулю миноры порядка n, получим особые точки. Совокупность таких точек будет инвариантным многообразием V_{n-1} относительно автоморфизмов группы G.

Приравняв к нулю все миноры матрицы $\mathbf{B}$ порядка $n-1$, получим инвариантное многообразие V_{n-2}, принадлежащее многообразию V_{n-1}. Поступая так и далее, можем получить серию вложенных друг в друга инвариантных многообразий. Эта серия и будет абсолютом рассматриваемого однородного пространства.

Зная абсолют, мы в состоянии построить геометрию однородного пространства, определяя инварианты и инвариантные многообразия такой геометрии как соответствующие элементы проективной геометрии, взятые в их отношении к найденному абсолюту.

5. Пусть, например, $n=3$, $r=6$, причем

$$\omega_1^1=\omega_2^2=\omega_3^3=\omega_4^4=0, \quad \omega_1^2=-\omega_2^1=\omega^1, \quad \omega_1^3=-\omega_3^1=\omega^2, \tag{14}$$

$$\omega_1^4=-\omega_4^1=\omega^3, \quad \omega_2^3=-\omega_3^2=\omega^4, \quad \omega_2^4=-\omega_4^2=\omega^5, \quad \omega_3^4=-\omega_4^3=\omega^6.$$

Следовательно,

$$p_{11}^2=-p_{21}^1=p_{12}^3=-p_{32}^1=p_{13}^4=-p_{43}^1=-p_{24}^3=-p_{34}^2=p_{25}^4=-p_{45}^2=-p_{36}^4=-p_{46}^3=1.$$

Остальные $p_{i\alpha}^j=0$. Пусть структурные константы группы G_6 определяются равенствами

$$-C_{24}^1=-C_{35}^1=C_{14}^2=-C_{36}^2=C_{15}^3=C_{26}^3=-C_{12}^4=-C_{56}^4=-C_{13}^5=C_{46}^5=-C_{23}^6=-C_{45}^6=1.$$

Остальные $C_{\alpha\beta}^\gamma=0$. В этом случае равенства (12) тождественно удовлетворяются, следовательно, уравнения (14) — вполне интегрируемы. В данном случае

$$\mathbf{B}=\frac{1}{x^4}\begin{Vmatrix} -x^2x^4 & -x^3x^4 & -(x^4)^2-(x^1)^2 & 0 & -x^1x^2 & -x^1x^3 \\ x^1x^4 & 0 & -x^1x^2 & -x^3x^4 & -(x^4)^2-(x^2)^2 & -x^2x^3 \\ 0 & x^1x^4 & -x^1x^3 & x^2x^4 & -x^2x^3 & -(x^4)^2-(x^3)^2 \end{Vmatrix}.$$

Приравнивая к нулю все миноры 3-го порядка, получим единственное условие

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2=0. \tag{15}$$

Приравнивание к нулю миноров более низких порядков приводит к противоречию $x^1=x^2=x^3=x^4=0$. Следовательно, абсолютом однородного пространства является некоторая невырожденная мнимая поверхность 2-го порядка. Но это означает, что рассматриваемое однородное пространство есть эллиптическое пространство Римана. Подвижной репер пространства автополярен относительно абсолюта.

6. Существенные линейные формы ω_j^i проективного пространства (их число $(n+1)^2-1$) могут быть перенумерованы в определенном порядке

$$\Omega^1, \ldots, \Omega^R, \quad R=(n+1)^2-1.$$

В таком случае равенства (11) могут быть приведены к виду:

$$\Omega^u=p_\alpha^u\omega^\alpha, \quad u=1, \ldots, R, \quad \alpha=1, \ldots, r. \tag{16}$$

Дифференциальные уравнения группы G_R в неоднородных координатах есть

$$d\bar{x}^i=\eta_u^i\Omega^u, \qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

Внося сюда (16), получаем

$$d\bar{x}^i=\eta_u^i p_\alpha^u \omega^\alpha=\xi_\alpha^i \omega^\alpha,$$

где

$$\xi_\alpha^i=\eta_u^i p_\alpha^u.$$

Таким образом, зная полную проективную группу и базисные формы ее подгруппы G_r, мы можем найти векторы последней и тем самым полностью ее исследовать.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Lie, F. Engel. Theorie der Transformationsgruppen, Teubner, Leipzig.
2. S. Lie, G. Scheffers. Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen, Teubner, Leipzig.
3. F. Klein. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, 1872.
4. Л. П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований, М., 1947.
5. K. F. Gauss. Disquisitions generales circa superficies curvas, 1827.
6. Darboux. Leçons sur la théorie générale des surfaces, 1913.
7. Selecta jubile scientifique de M. Elie Cartan, Paris, 1939.
8. Г. Ф. Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Московского математического общества, т. 2, 1953.

В. И. БЛИЗНИКАС (Вильнюс)

О НЕКОТОРЫХ МНОГООБРАЗИЯХ ОПОРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Пусть на дифференцируемом многообразии V_n класса p задано поле пункторов u^i. Таким образом получаем некоторое новое многообразие $2n$ измерений V_{2n}, которое назовем многообразием центральных пункторов W_n. Пространство центральных пункторов является топологическим произведением многообразия V_n и пространства значений объекта u^i, т. е. n-мерного центропроективного пространства. Объект u^i будем называть опорным пунктором, а совокупность точки и опорного пунктора — центральным пунктором. Допустимые преобразования координат центрального пунктора (x^i, u^i) определяются формулами:

$$\left\{\begin{aligned} & x^{i'} = x^{i'}(x), \\ & u^{i'} = \frac{\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} u^i}{-\dfrac{1}{n+1} \dfrac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} \right\|}{\partial x^j} u^j + 1} \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Если на дифференцируемом многообразии V_n класса p рассматривается поле копункторов u_i, то каждой точке (x^i) можно отнести пространство значений копунктора u_i и получить новое многообразие $2n$ измерений, которое назовем многообразием центральных копункторов W_n^*. В этом случае объект u_i будем называть опорным копунктором, а (x^i, u_i) — центральным копунктором. Допустимые преобразования координат центрального копунктора (x^i, u_i) определяются формулами:

$$\left\{\begin{aligned} & x^{i'} = x^{i'}(x), \\ & u_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} u_i - \frac{1}{n+1} \frac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} \right\|}{\partial x^{i'}} \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Многообразия W_n и W_n^* являются частными случаями пространств опорных элементов в смысле Б. Л. Лаптева [1].

Если на многообразии W_n (или W_n^*) задано поле дифференциально-геометрического объекта, то этим в многообразии W_n (или W_n^*) будет установлена некоторая геометрия, инвариантная относительно преобразований (1) [или (2)].

Оказывается, что при помощи объекта центро-проективной связности, заданного на дифференцируемом многообразии, можно построить дифференциальный оператор, который переводит поле копункторов в тензорную пфаффовую форму.

Теперь построим теорию перенесения копункторов на многообразии W_n^*. Оказывается, что при помощи системы $2n^2(n+1)$ функций

$$\Gamma^i_{jk}, \quad \Gamma_{ij}, \quad C^{ik}_j, \quad C^i_j,$$

заданных на W_n^*, определяется инвариантный дифференциал

$$\delta T_i = dT_i - T_p\,(\Gamma^p_{ij}\,dx^j + C^{pj}_i\,du_j) - (\Gamma_{ij}\,dx^j + C^j_i\,du_j),$$

где T_i — копункторное поле тогда и только тогда, когда эти функции преобразуются по закону

$$\Gamma^{l'}_{j'k'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'}\,\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^l} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \left\{ \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma^l_{jk} + \left[\left(\frac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|^{-\frac{1}{n+1}}}{\partial x^p} - u_p \right) \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \frac{\partial^2 x^p}{\partial x^{k'}\,\partial x^{p'}} \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{dx^r} \right\|^{-\frac{1}{n+1}}}{\partial x^k\,\partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial x^{k'}} \right] C^{lk}_j \right\},$$

$$\Gamma_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \left\{ \Gamma_{ij} - \left(\frac{\partial^2 \ln \det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|^{-\frac{1}{n+1}}}{\partial x^i \partial x^j} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^{s'}}{\partial x^s} \right\|^{-\frac{1}{n+1}}}{\partial x^q} \right) \Gamma^q_{ij} \right\} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \left\{ \frac{\partial^2 \ln \det \left\| \frac{\partial x^{z'}}{\partial x^z} \right\|^{-\frac{1}{n+1}}}{\partial x^k \partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial x^{j'}} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|^{-\frac{1}{n+1}}}{\partial x^j} - u_j \right) \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \right\} C^k_i,$$

$$C^{i'j'}_{k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} C^{ij}_k,$$

$$C^{i'}_{j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \left\{ C^i_j - \frac{1}{n+1} \frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^k} C^{ki}_j \right\}.$$

Построен объект кручения и кривизны полного объекта центро-проективной связности (Γ^l_{jk}, Γ_{ij}, C^{ik}_j, C^l_j) пространства W^*_n, рассмотрены свойства геодезических линий пространства W^*_n и геометрические свойства некоторых подобъектов объекта кручения и кривизны пространства W^*_n.

ЛИТЕРАТУРА

Б. Л. Лаптев. Пространство опорных элементов, диссертация на соискание учен. степ. докт. физ.-мат. наук, Москва, МГУ, 1959.

С. Е. КАРАПЕТЯН (Ереван)

ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ СЕМЕЙСТВ МНОГОМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ И ЕЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

1. С каждой дифференциальной окрестностью d-мерной плоскости a — семейства методом Г. Ф. Лаптева связывается одна определенная инвариантная «трилинейная» форма, которая образуется из трех серий переменных, и выясняется ее геометрический смысл. Далее, методами алгебраической геометрии исследуются три «билинейные» системы, полученные из этой формы при изучении геометрического места того или другого геометрического объекта (точки, направления, гиперплоскости, .., всего 6 объектов, два из которых: фокусы и фокальные направления были известны раньше). Результаты первой части группируются вокруг шести алгебраических многообразий, описываемых этими объектами.

2. Изучаются соприкасающиеся (различного порядка) линейные многообразия плоскостей для семейства многомерных плоскостей. Это из себя представляет многомерное обобщение квадрик Ли, линейных конгруэнций и комплексов для линейчатой геометрии трехмерного пространства. В исследований этих многообразий большая роль принадлежит теории многообразий [1].

3. Все эти результаты имеют хорошее приложение в теории многомерных поверхностей, если последние рассматривать как геометрические места точек ($d=0$) или как геометрические места их касательных плоскостей (в этом случае d совпадает с размерностью поверхности).

4. Дается приложение теории к „многообразиям" трехмерного пространства путём интерпретации многомерной проективной геометрии. Например: Сфера евклидова пространства определяется уравнениями

$$x^0(x^2+y^2+z^2)+2x^1x+2x^2y+2x^3z+x^4=0,$$

следовательно, в P_4 она представляется точкой (x^i), окружность — прямой и т. д.

Пересечение двух прямых из P_4 приводит к консферичности двух окружностей и т. д. Доказывается изоморфность этих двух геометрий. Следовательно, все результаты из P_4 (см. [2, 3, 4]) автоматически переносятся на геометрию окружностей и сфер трехмерного пространства. Обычная конформная геометрия является частным случаем „проективной" геометрии сфер и окружностей.

По этой схеме доказана изоморфность и других геометрий, например: геометрии квадрик трехмерного пространства и геометрии двухмерных плоскостей пятимерного пространства и т. д.

Все эти результаты будут опубликованы в 1963 г. в „Известиях" АН Армении. Теория двухмерных семейств прямых и плоскостей изложена в [2, 3, 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ходж и Д. Пидо. Методы алгебраической геометрии, т. 1, II, ИЛ, 1954.
2. С. Е. Карапетян. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, XV, 1, 1962.
3. С. Е. Карапетян. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, XV, 2, 1962.
4. С. Е. Карапетян. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, XV, 3, 1962.

Я. П. БЛАНК, Л. Т. МОТОРНЫЙ (Харьков)

О ПОВЕРХНОСТЯХ СДВИГА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Поверхностью сдвига эллиптического пространства называется поверхность, допускающая параметризацию

$$x=a(u)\,b(v), \tag{1}$$

где x, a, b — кватернионы.

Ей соответствует в квазиэллиптическом пространстве (пространстве с абсолютом, распавшимся на пару комплексно сопряженных плоскостей и пару комплексно сопряженных точек) поверхность квазисдвига — допускающая параметризацию (1), где x, a, b — бикватерионы вида

$$\alpha=e_0\alpha_0+e_1\alpha_1+\varepsilon(e_2\alpha_2+e_3\alpha_3),\quad \varepsilon^2=0.$$

В работе отыскиваются все поверхности вращения эллиптического или квазиэллиптического пространства, являющиеся одновременно поверхностями сдвига или соответственно квазисдвига.

Найденные поверхности несут две существенно различные сети сдвига или квазисдвига, либо бесконечное множество таких сетей.

В силу известных отображений В. Бляшке, каждому движению в эвклидовой плоскости можно поставить в соответствие взаимно однозначным образом точку квазиэллиптического пространства. Поверхностям квазисдвига соответствуют при этом такие двупараметрические группы движений, которые расщепляются на произведение однопараметрических групп движений. Тем самым построен механизм, который реализует это расщепление двумя или бесконечным числом существенно различных способов.

И. П. ЕГОРОВ (Пенза)

ГОМОТЕТИЧЕСКИЕ РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Преобразование (точечное) риманова пространства называется гомотетическим, если оно с точностью до постоянного сомножителя λ переводит в себя фундаментальный тензор пространства. Гомотетическое преобразование, соответствующее значению $\lambda=1$, называется тривиальным. Совокупность всех гомотетических преобразований пространства V_n составляет группу гомотетических движений. Риманово пространство V_n, допускающее нетривиальные гомотетические преобразования, называется гомотетическими пространствами V_n. В дальнейшем речь идет о группах гомотетических преобразований, содержащих нетривиальные гомотетические движения.

1. Обзор результатов о максимально подвижных в гомотетическом смысле римановых пространствах первых трех лакунарностей.

2. Гомотетические движения в неприводимых симметрических пространствах первого класса; структура конформных движений в пространствах постоянной кривизны.

3. Классификация трехмерных римановых пространств по группам гомотетических движений и гомотетические поля тяготения (результаты Липатова Н. С.); классификация четырехмерных римановых пространств по группам гомотетических движений (результаты Абакирова Б. А.).

Далее мы рассматриваем гомотетические движения, порожденные специальными векторными полями (торсообразующие, конциркулярные и т. д.) в общих и приводимых пространств V_n.

4. Пространство V_n, допускающее $m+1$ конкурентных полей, обладает группой гомотетических движений порядка $r=m(m+1)/2+1$; конкурентность гомотетии v^α характеризуется градиентностью вектора v^α.

5. Необходимым и достаточным условием того, что приводимое пространство V_n допускает конкурентную гомотетию, является существование в каждом из составляющих пространств, на которые раскладывается V_n, конкурентной гомотетии.

6. Торсова гомотетия в V_n необходимо является конкурентной гомотетией; в римановом пространстве не существует рекуррентных гомотетических движений: всякое рекуррентное движение необходимо является движением с абсолютно параллельным векторным полем.

7. Если группа движений гомотетического пространства V_n полупроста, то группа гомотетических движений раскладывается в прямое произведение группы движений и некоторой одночленной группы гомотетий.

8. Для того, чтобы конгруэнция кривых $\xi^\alpha(x)$ в римановом пространстве V_n являлась конгруэнцией траекторий однопараметрической группы гомотетических движений, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

а) неголономный образ, определенный конгруэнцией кривых состоит из омбилических точек;

б) далее,

$$u_\alpha - \lambda n_\alpha = \partial_\alpha \ln \lambda,$$

где u_α — вектор первой кривизны линий конгруэнции, n_α — единичное векторное поле, идущее по $\xi^\alpha(x)$, λ — средняя кривизна неголономного образа.

9. Гомотетия в приводимых и полуприводимых пространствах: движения и гомотетии в частично приводимых пространствах; риманово пространство V_n называется частично производным, если одна из двух самостоятельных метрик входит в метрику пространства V_n с общим множителем, зависящим от всех координат пространства. Частично приводимое пространство характеризуется наличием одного поля или системы торсообразующих полей направлений.

10. Если интранзитивная группа движений G_r порядка $r>q(q-1)/2+1$ имеет q-мерные неизотропные поверхности системы интранзитивности, то $r=q(q+1)/2$ и метрика V_n определяется следующей дифференциальной квадратичной формой:

$$ds^2=g_{ij}(x^k)dx^i dx^j + \sigma(x^k)\, g_{\alpha\beta}(x^\gamma)\, dx^\alpha dx^\beta \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n-q;$$

$$\alpha, \beta, \gamma = n-q+1, \ldots, n),$$

где $g_{\alpha\beta}(x^\gamma)\, dx^\alpha dx^\beta$ — метрика пространства постоянной кривизны; не существует группы гомотетических движений G_r порядка $r>q(q-1)/2+2$, допускающей q-мерные неизотропные поверхности системы интранзитивности.

В. И. ВЕДЕРНИКОВ (Горький)

ПРИВОДИМЫЕ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ

В докладе рассматриваются инфинитезимальные связности, определенные в главном расслоенном пространстве $P(B, G)$, где G представляет из себя вполне приводимую группу линейных преобразований. В этом случае оказывается, что общая связность распадается на две независимые связности. При том следует различать два существенно различных, но важных приложениях, случая: 1) группа G состоит из матриц $A = \begin{Vmatrix} P & O^* \\ O & Q \end{Vmatrix}$, где матрицы P и Q никак не связаны и независимо пробегают элементы групп G_1 и G_2 и 2) группы G_1 и G_2 связаны соответствием изоморфизма φ и группа G состоит из матриц $A = \begin{Vmatrix} P & O^* \\ O & \varphi(P) \end{Vmatrix}$. Оба эти случая возникают в теории нормализации. Например, случай, когда φ есть переход от данной матрицы к сопряженной, приводит к понятию сопряженных связностей.

Рассматривается общая теория приводимых связностей и их многочисленные приложения (большей частью к теории нормализаций).

Н. И. КАБАНОВ (Саратов)

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КАРАТЕОДОРИ В ВАРИАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ

При рассмотрении геометрической теории вариационного исчисления удобно пользоваться известным понятием индикатрисы соответствующей вариационной задачи. Если ограничиться рассмотрением вариационных задач, содержащих только первые производные, то рассмотрение внутренней сингулярной вариационной задачи для простого (n — 1-кратного) интеграла приводит к изучению частичной секущей сингулярной гиперповерхности класса сингулярности m (соотв. $n - m - 1$ поверхности) касательного волокнистого пространства $E_n(\mathfrak{X}_n)$ (соотв. пространства $\mathfrak{E}(X_n)$, где $\mathfrak{E}_n$ — пространство контравариантных векторных плотностей веса $+1$).

Если в каждом волокне E_n (соотв. $\mathfrak{E}_n$) задать преобразования Каратеодори, т. е. гиперплоскостные (соотв. точечные) трансляции, определяемые градиентным ковариантным вектором (соотв. соленоидальной векторной плотностью), сохраняющим измеримые направления (соотв. $n-1$ — направления), то они подействуют и на секущие.

Возникают задачи разыскания инвариантной связности на этих секущих, которая бы определялась с точностью до преобразований Каратеодори. Оказывается, можно найти условия в инвариантной форме, которыми эти связности на соответствующих секущих будут однозначно определяться.

Полученные связности применяются для нахождения условий приводимости соответствующих секущих к однородным секущим, т. е. по существу для нахождения условий приводимости соответствующих вариационных задач к случаю, когда подинтегральные функции зависят лишь от производных, что важно в вариационном исчислении.

СЕКЦИОННЫЕ ДОКЛАДЫ

Первая секция

На заседаниях первой секции председательствовали:

1. 14 июня — доктор физико-матем. наук проф. Александр Петрович Норден.
2. 15 июня — доктор физико-матем. наук проф. Александр Евгеньевич Либер.
3. 17 июня — кандидат физико-матем. наук доц. Юло Гориевич Лумисте.

Ниже публикуются краткие содержания докладов первой секции (К. О Арива, А. С. Феденко и Л. М. Карпова на конференции не присутствовали).

А. Е. ЛИБЕР (Саратов)

О КЛАССИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ В РАССЛОЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ $X_2(X_2)$

Линейная связность в расслоенном пространстве $X_m(X_n)$ задается системой дифференциальных уравнений

$$d\eta^a + \Gamma^a_\lambda(\xi, \eta)\, d\xi^\lambda = 0 \quad (\nu, \mu, \lambda = 1, \dots n; \quad a, b = 1, \dots m),$$

где ξ^λ — координаты точки базисного X_n и η^a — координаты локального X_m. Связность относится к нулевому классу, если тензор кривизны

$$R^a_{\mu\lambda} = 2\left(\partial_{[\mu}\Gamma^a_{\lambda]} - \Gamma^b_{[\lambda}\frac{\partial\Gamma^a_{\mu]}}{\partial\eta^b}\right) \qquad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial\xi^\mu}$$

равен нулю; связность относится к первому классу (рекуррентная связность), если базисная абсолютная производная от тензора кривизны ему пропорциональна:

$$D_\nu R^a_{\mu\lambda} = g_\nu R^a_{\mu\lambda},$$

где g_ν некоторый множитель. Подробная классификация связности проводится для случая $m = n = 2$ (т. е. для расслоенного пространства $X_2(X_2)$); выделяются четыре основных класса (кроме нулевого и первого отмечены еще два больших класса), каждый из которых разбивается на несколько подклассов. В основу классификации положен способ построения четырех комитантов связности — двух независимых ковариантных векторов базисного пространства и двух независимых ковариантных векторов локального пространства; эти комитанты являются дифференциальными комитантами связности различного порядка в зависимости от класса связности. Выделяются подклассы, для которых таких комитантов не существует совсем и подклассы, для которых связность обладает нетривиальной псевдогруппой автоморфизмов.

Я. Л. ШАПИРО (Горький)

ГРУППА ПОДОБИЙ ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Пусть $A^\alpha(x^\beta)$ $(\alpha, \beta = 1, \dots, n)$ — векторное поле, порождающее однопараметрическую группу автоморфизмов пространства A_n аффиной связности. Линии такого поля A^α, пересекающие некоторую геодезическую линию Γ, образуют двумерную поверхность.

Если для любой геодезической Γ, построенная выше указанным образом поверхность является вполне геодезической, то движения, порождаемые полем A^α, будем называть (аффинными) подобиями.

Условия (необходимые и достаточные) для того, что поле A^α определяет в A_n группу подобий, состоят в равенствах:

$$A^\alpha_{,\beta} = T\delta^\alpha_\beta + B_\beta A^\alpha,$$

$$A^\alpha_{,\beta\gamma} = R^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}A^\varepsilon.$$

где T, B_α — некоторые величины, $R^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}$ — тензор кривизны, а $A^{\cdot\alpha}_{,\beta}$ обозначает ковариантную производную от A^α.

Если A_n допускает группу G_m подобий m-го порядка и $\overset{a}{A}_\alpha$ $(a = 1, \dots, m)$ её „символы", то необходимо имеет место

$$\overset{a}{A}{}^i_{,j} = \overset{a}{T}\delta^i_j + B_j\overset{a}{A}{}^i,$$

где B_j имеет одинаковое значение для всех $\overset{a}{A}{}^i$.

Максимальное значение m равно $n+1$ и достигается лишь в том случае, когда A_n локально-аффинно. Для случая, когда G_m просто-транзитивная группа, имеют место следующие результаты. Тензор кривизны имеет строение

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}=CB_{\beta}(B_{\varepsilon}\delta^{\alpha}_{\gamma}-B_{\gamma}\delta^{\alpha}_{\varepsilon}),$$

где C — произвольная константа.

Кроме того,

$$B_{\alpha,\beta}+(C+1)B_{\alpha}B_{\beta}=0.$$

Наоборот, из последних двух условий следует, что A_n допускает транзитивную группу подобий.

М. О. РАХУЛА (Тарту)

К ТЕОРИИ ПРОДОЛЖЕННЫХ ГРУПП

1. Пусть V — n-мерное аналитическое многообразие и G — группа всех аналитических гомеоморфизмов многообразия V. *Первой продолженной группой* G_1 *группы* G называется множество всех дифференциалов da, где $a\in G$. *i-ая продолженная группа* $G_{(i)}$ *группы* G определяется по индукции: это — первая продолженная группа $(i-1)$-ой продолженной группы $G_{(i-1)}$ группы G.

2. *Первым этажом* V_1 *многообразия* V называется множество всех касательных векторов к многообразию V. *i-ый этаж* $V_{(i)}$ *многообразия* V определяется по индукции как первый этаж $(i-1)$-го этажа $V_{(i-1)}$.

Теорема. В то время, как группа G действует как группа преобразований многообразия V, i-ая продолженная группа $G_{(i)}$ действует в качестве группы преобразований i-го этажа $V_{(i)}$.

3. Деривацией i-го порядка называется векторное поле на $(i-1)$-ом этаже $V_{(i-1)}$.

Теорема. Подобно тому как однопараметрическая подгруппа a_t группы G индуцирует деривацию 1-го порядка (обычное векторное поле на V), $(i-1)$-ое продолжение этой подгруппы индуцирует деривацию i-го порядка.

4. Рассмотрим последовательность групп

$$G,\ G_1,\ G_2,\ \ldots,\ G_i,\ \ldots,$$

где каждая последующая группа является группой внутренних автоморфизмов предыдущей группы.

Теорема. Группа G_i порождает группу $G_{(i)}$.

Введённые понятия и сформулированные теоремы позволяют обобщить с глобальной точки зрения многие результаты и формулы классической дифференциальной геометрии.

А. П. РЯБУШКО (Минск)

НЕКОТОРЫЕ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА ЭЙНШТЕЙНА

Указывается класс точных центрально-симметрических решений уравнений тяготения Эйнштейна в свободном пространстве (решения не являются стационарными). Обсуждаются некоторые свойства этих решений. Даётся классификация этих решений по типам А. З. Петрова.

Вторая часть сообщения посвящается обсуждению известной теоремы Биркгоффа, утверждающей, что предположение о сферической симметрии пространства-времени, метрика которого g_{ik} $(i,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ удовлетворяет уравнениям Эйнштейна в свободном пространстве

$$R_{ik}=0, \tag{1}$$

приводит автоматически к статичности этого пространства-времени. Более подробно: временная зависимость метрического тензора g_{ik}, обладающего сферической симметрией и являющегося решением уравнений (1), всегда может быть устранена с помощью некоторого преобразования системы координат, так что в итоге получается решение шварцшильдовского типа.

Однако, свойства центрально-симметрических пространств Эйнштейна, упоминаемых в первой части сообщения, таковы, что если считать теорему Биркгоффа справедливой, то переход к метрике Шварцшильда должен осуществляться с помощью разрывных (разрывы бесконечные) и не взаимно однозначных функций $x^i = x^i(x'^k)$. Но применение таких преобразований координат приводит к коренному изменению топологической структуры пространства-времени и не может быть оправдано с геометрической и физической точки зрения.

Отсюда следует, что обсуждаемая теорема Биркгоффа не верна.

Б. М. ШАЙН (Саратов)

К ТЕОРИИ ОБОБЩЁННЫХ ГРУПП ЛОКАЛЬНЫХ ГОМЕОМОРФИЗМОВ

Пусть Γ — обобщённая группа обратимых (взаимно однозначных) частичных преобразований множества A. Предположим, что Γ полна; т. е. для любого совместного [1] множества $\mathfrak{g} \subset \Gamma$ элементов существует наименьший мажорант $\Upsilon \mathfrak{g}$. Пусть $\Upsilon \mathfrak{g} = \cup \mathfrak{g}$ во всех случаях, когда $\Upsilon \mathfrak{g}$ существует. В этом случае будем говорить, что Γ — правильная обобщённая группа обратимых преобразований.

Если считать, что Γ эффективна, т. е. что $pr_1 \ (\cup \Gamma) = A$ (это означает, что каждый элемент из A попадает в первую проекцию какого-нибудь элемента из Γ), то множество первых проекций элементов из Γ является топологией на множестве A. Эту топологию будем называть Γ-топологией. При этом Γ является обобщённой группой локальных гомеоморфизмов Γ-топологии (локальным гомеоморфизмом называется отображение одного открытого подмножества топологического пространства на другое, являющееся гомеоморфизмом относительно топологий, индуцированных на открытых подмножествах).

Возникает вопрос: когда абстрактная обобщённая группа G будет изоморфна некоторой правильной обобщённой группе обратимых преобразований?

Отметим, что множество всех идемпотентов $\mathbf{I}$ полной обобщённой группы G будет полной решёткой относительно канонического отношения порядка (согласно которому $i_1 \prec i_2$, если $i_1 i_2 = i_1$ для $i_1, i_2 \in \mathbf{I}$). В случае, когда эта полная решётка бесконечно дистрибутивна (т. е. $(\Upsilon \mathfrak{i}) i = \Upsilon \mathfrak{i} \{ i \}$), мы будем называть обобщённую группу G локальной, следуя Ш. Эресману, [2]. Подмножество $\mathfrak{i} \subset \mathbf{I}$ называется минорантным базисом решётки $\mathbf{I}$, если всякий элемент из $\mathbf{I}$ является наибольшим минорантом некоторого подмножества из $\mathfrak{i}$, т. е. если $i = \curlywedge \mathfrak{i}'$ для некоторого $\mathfrak{i}' \subset \mathfrak{i}$. Идемпотент i называется простым, если из $i = i_1 i_2$ следует, что $i = i_1$ или $i = i_2$, где $i_1, i_2 \in \mathbf{I}$. Минорантный базис называется простым, если все его элементы просты.

Обобщённая группа тогда и только тогда изоморфна правильной обобщённой группе обратимых преобразований, когда она полна, локальна и множество её идемпотентов обладает простым базисом.

Отсюда следует, что класс всех полных обобщённых групп слишком широк с точки зрения применений к топологии или дифференциальной геометрии (ибо обобщённая группа локальных диффеоморфизмов дифференцируемого многообразия будет, очевидно, обобщённой группой локальных гомеоморфизмов). Это же замечание относится и к классу локальных псевдогрупп Эресмана [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Вагнер. Теория обобщённых груд и обобщённых групп, Матем. сб. 32 (1953), 545—632.
2. Ch. Ehresmann. Catégories inductives et pseudogroupes, Ann. Sci. Inst. Fourier 10 (1960).

Ф. И. КАГАН (Иванов)

О ГРУППАХ ПСЕВДОДВИЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ФИНСЛЕРА И РИМАНА

Пусть в n-мерном пространстве Финслера F_n с метрической функцией $L(\xi^\lambda, x^\lambda)$ задано поле r параметрических подгрупп центрально-аффинной группы преобразований, т. е. в каждом касательном пространстве пространства F_n задана r параметрическая группа преобразований

$$\bar{x}^\alpha = \Theta^\alpha_\omega (\xi^\lambda, b^i)\, x^\omega \qquad \begin{pmatrix} \alpha, \beta, \ldots, \omega = 1, \ldots, n; \\ i, j, k = 1, \ldots, r \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Мы будем говорить, что преобразование

$$\bar{\xi}^\alpha = f^\alpha(\xi^\lambda) \tag{2}$$

пространства F_n является псевдодвижением, если существует такое поле $b^i = b^i(\xi^\lambda)$ преобразований из (1), что

$$L[f^\alpha(\xi^\lambda),\ f^\alpha_\beta(\xi^\lambda)\, \Theta^\beta_\omega(\xi^\lambda, b^i(\xi^\lambda))\, x^\omega] = L(\xi^\lambda, x^\lambda). \tag{3}$$

Геометрически это означает, что деформированное преобразованием (2) поле локальных индикатрис пространства F_n после выполнения в каждом касательном пространстве подходящего преобразования из групп (1) совпадает с исходным полем локальных индикатрис. Псевдодвижение будем называть однородным, если параметры $b^i(\xi^\lambda)$ в соотношении (3) не зависят от координат точки ξ^λ.

Обычные движения и конформные преобразования являются частными случаями псевдодвижений, а гомотетические преобразования дают простейший пример однородных псевдодвижений. Рассматривавшееся Мельци [1] обобщение конформных преобразований в трехмерном евклидовом пространстве (так называемые преобразования *rotonda*), являются частным случаем псевдодвижений.

Можно показать, что в случае, когда поле (1) состоит из однопараметрических подгрупп, римановы пространства постоянной ненулевой кривизны не допускают собственных однородных псевдодвижений (при некотором дополнительном ограничении на группы преобразований поля (1)). Тем самым обобщается известный результат относительно гомотетических преобразований.

В случае евклидового пространства указывается максимальный порядок групп однородных и неоднородных псевдодвижений, зависящий от вида групп преобразований поля (1).

Пример пространств Финслера, обладающих группой (однопараметрической) неоднородных псевдодвижений дают двумерные пространства Финслера, вмещаемые в виде тангенциальных поверхностей в трехмерное аффинное пространство с векторной метрикой.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Melzi. Rend. mat. e applic., 1957, 16, N 1–2.

М. А. НИКОЛАЕНКО (Харьков)

О СОПРЯЖЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ В МНОГООБРАЗИИ МОНЖА

Понятие сопряженных направлений теории поверхностей можно распространить и на множество интегральных кривых монжева уравнения

$$\Omega(x_i;\ x_i') = 0, \tag{1}$$

нелинейного, неголономного многообразия евклидова пространства трех измерений.

Две безконечно-близкие касательные t, t' интегральной кривой монжева уравнения (1) определяют ее соприкасающуюся плоскость ω.

Плоскости α, α', касательные к локальным конусам монжева уравнения (1) вдоль t, t', пересекаются по прямой, предельное положение которой есть направление δx.

Плоскость ω и прямую δx назовем сопряженными.

Теорема. Соответствие между пучком соприкасающихся плоскостей ω интегральных кривых с общей касательной t и пучком направлений δx, лежащих в плоскости α, касательной к локальному конусу вдоль образующей t и проходящих через его вершину — проективно.

Понятие сопряженности в многообразии Монжа позволяет из множества интегральных кривых $\varkappa$ монжева уравнения (1), кроме уже известных кривых: асимптотических, линий кривизны двух родов, геодезических «кратчайших», геодезических «прямейших», выделить ещё весьма важный класс интегральных кривых — характеристик u.

Монжево уравнение (1) сопоставляет каждой плоскости π кривую C (геометрическое место вершин локальных конусов, касающихся плоскости π), лежащую в этой плоскости.

Теорема. Чтобы интегральная кривая монжева уравнения (1) была характеристикой, необходимо и достаточно, чтобы направление δx сопряженное ее соприкасающейся плоскости ω, совпало с касательной плоской кривой C, расположенной в плоскости α.

Такое свойство характеристики позволяет получить дифференциальное уравнение:

$$|\Omega_{x_i}' \, \Omega_{x_i}' \, (\Omega_{x_i})'| = 0 \tag{2}$$

геометрическим путем, непосредственно по монжеву уравнению (1), которое совпадает с раннее полученным автором исходя из системы обыкновенных дифференциальных уравнений характеристик в форме Коши для дифференциального уравнения в частных производных 1-ого порядка.

$$F(x, y, z; p, q) = 0.$$

К. О. АРИВА (Тарту)

ОБ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЕ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ V_n

Изопериметрическую проблему в более общей постановке рассматривали многие авторы, в том числе Ф. Миндинг (Тарту, 1876) для двухмерного риманова пространства и Э. Шмидт (Берлин, 1940, 1948) для n-мерного пространства постоянной кривизны.

В настоящем сообщении методом подвижного ортрепера и исчислением внешних дифференциальных форм доказывается для случая произвольного риманова пространства V_n следующий необходимый признак: если достаточно гладкая замкнутая гиперповерхность V_n в области локальной карты пространства V_n является решением изопериметрической проблемы, то её средняя кривизна постоянна.

В связи с этим результатом изучаются условия существования в V_n геодезических гиперсфер и вообще замкнутых гиперповерхностей постоянной средней кривизны.

В. И. БЛИЗНИКАС (Вильнюс)

К ТЕОРИИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Структурные уравнения пространства линейных элементов L_n имеет вид [1]:

$$D\omega^i = [\omega^k, \omega_k^i] + R_{pq}^i [\omega^p, \omega^q] + S_{pq}^i [\omega^p, \Theta^q],$$

$$D\omega_j^i = [\omega_j^k, \omega_k^i] + R_{jpq}^i [\omega^p, \omega^q] + S_{jpq}^i [\omega^p, \Theta^q] + P_{jpq}^i [\Theta^p, \Theta^q],$$

$$D\Theta^i = [\Theta^k, \omega_k^i] + R_{opq}^i [\omega^p, \omega^q] + S_{opq}^i [\omega^p, \Theta^q] + P_{opq}^i [\Theta^p, \Theta^q].$$

где

$$\Theta^i = dv^i + v^p \omega_p^i,$$

$$R_{opq}^i = R_{j\bar{p}q}^i v^j, \ \ldots, \ S_{opq}^i = S_{jpq}^{i'} v^j.$$

Гиперповерхность пространства L_n назовём $(n-1)$-мерное многообразие линейных элементов. Дифференциальные уравнения гиперповерхности имеет вид

$$\omega^i = \lambda_\alpha^i \Theta^\alpha, \qquad \Theta^i = \mu_\alpha^i \Theta^\alpha, \tag{1}$$

где формы имеют следующую структуру:

$$D\Theta^\alpha = [\Theta^\beta, \Theta_\beta^\alpha],$$

$$D\Theta_\beta^\alpha = [\Theta_\beta^\gamma, \Theta_\gamma^\alpha] + [\Theta_{\beta\gamma}^\alpha, \Theta^\gamma].$$

Продолжая систему (1), получаем последовательность дифференциально-геометрических объектов:

$$\lambda_\alpha^i, \ \lambda_{\alpha\beta}^i, \ \lambda_{\alpha\beta\gamma}^i, \ \mu_\alpha^i, \ \mu_{\alpha\beta}^i, \ \mu_{\alpha\beta\gamma}^i.$$

Фундаментальный дифференциально-геометрический объект третьего порядка охватывает оснащающий объект гиперповерхности и пучок объектов аффинной связности с кручением.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Близникас. К дифференциальной геометрии билинейно-метрических пространств линейных элементов, Учен. Тр. Вильнюсского гос. ун-та, т. 33, сер. физ.-мат., IX, 97—106, 1960.

В. Т. ВОДНЕВ, А. С. ФЕДЕНКО (Минск)

О НЕКОТОРЫХ ЧАСТИЧНО-ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В 1927 году Э. Картан нашел все неприводимые симметрические пространства знакоопределенной метрики. Все они связаны с простыми группами Ли. Группа движений неприводимого симметрического пространства знаконеопределенной метрики может быть как простой, так и не простой. Пространства с простыми группами изучали Б. А. Розенфельд, М. Берже, А. С. Феденко и др. В 1957 году Берже завершил классификацию таких пространств. Имеются лишь отдельные примеры пространств такого типа с не простыми группами движения.

Приводятся некоторые новые примеры неприводимых симметрических пространств с не простыми группами движений, которые в то же время являются частично-проективными пространствами в смысле В. Ф. Кагана. Линейный элемент рассматриваемых пространств имеет вид:

$$ds^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} dx^i dx^{\bar{i}} + (a_{ij} x^i dx^j)^2; \quad i, j = 1, 2, \ldots, n; \quad \bar{i} = i + n; \quad a_{ij} - \text{const}.$$

Случай $a_{ij} = a_{ji}$ исследован П. А. Широковым в 1943 году, случай $a_{ij} = -a_{ji}$ — А. С. Феденко в 1955 году. В случае произвольной билинейной формы $a_{ij} x^i dx^j$ делается её разложение на симметрическую и кососимметрическую части и используется классификация пар билинейных форм, из которых кососимметрическая является невырожденной, приведенная И. М. Ягломом. Рассматриваются некоторые случаи этой классификации, приводящие к наиболее подвижным римановым пространствам.

В. И. ВЕДЕРНИКОВ, В. В. ГОРОДЕЦКИЙ (Горький)

МЕТОД НОРМАЛИЗАЦИИ В ГЕОМЕТРИИ СФЕР ЛИ

Рассматривается геометрия сфер Ли как геометрия гиперповерхности второго порядка проективного пространства Π_5. В этом пространстве строятся различные реперы, приспособленные для перехода к подгруппам фундаментальной группы геометрии Ли. Эти реперы позволяют строить нормализацию в геометрии сфер Ли, определяющие инфинитезимальные связности. В частности, в геометрии Ли возникает специальная связность нулевой кривизны. Следуя Э. Картану, можно строить общую связность такого рода.

С. М. БАХРАХ (Смоленск)

КОНФОРМНОЕ СООТВЕТСТВИЕ ОБОБЩЕННЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Обобщенным римановым пространством называют многообразие, в котором задано поле ковариантного тензора второй валентности g_{ij} (метрического тензора), вообще говоря, несимметрического ($g_{ij} \neq g_{ji}$), удовлетворяющего при этом условию

$$g_{ij}x^ix^j > 0$$

для любого вектора x^i не равного нулю.

Изучается конформное соответствие обобщенных римановых пространств, т. е. такое взаимное однозначное соответствие, при котором тензоры g_{ij} и $\bar{g}_{ij}$ в соответствующих точках связаны соотношением

$$\bar{g}_{ij} = ag_{ij},$$

где скаляр a зависит лишь от выбора точки.

Получены условия того, чтобы обобщенное риманово пространство допускало конформное отображение на обобщенное евклидово пространство.

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД и Л. М. КАРПОВА (Коломна)

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛУРИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Полуримановы пространства представляют собой пространства аффинной связности, в каждом касательном пространстве которых задана полуевклидова метрика, т. е. проективная метрика, абсолют которой состоит из дважды взятой гиперплоскости, конуса второго порядка в этой гиперплоскости, конуса второго порядка в вершинной плоскости этого конуса, и аналогичных конусов, каждый из которых находится в вершинной плоскости предыдущего, а в вершинной плоскости последнего из которых находится невырожденная квадрика, причем указанные абсолюты переходят друг в друга при параллельном переносе пространства аффинной связности. В работе изучается полуриманова метрика в группах Ли и симметрических пространствах аффинной связности. Показывается, что во всякую неполупростую группу Ли можно ввести инвариантную полуриманову метрику, причем бесконечно удаленные плоскости радикала алгебры Ли этой группы и последовательных коммутантов этого радикала входят в состав вершинных плоскостей конусов абсолюта в полуевклидовой метрике в этой алгебре Ли. Выделяется класс групп Ли, в которых полуриманова метрика определяется единственным образом с точностью до масштабов. Эта метрика, фактически, строится в группах евклидовых, квазиэллиптических, флаговых и общих полуэллиптических движений и в симметрических пространствах, основными группами являются указанные группы — в пространствах плоскостей и других образов симметрии евклидовых, квазиэллиптических, флаговых и общих полуэллиптических пространств.

М. В. ЛОСИК (Саратов)

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ КРУЧЕНИЯ И ПОСТРОЕНИЯ СВЯЗНОСТИ В ГЕОМЕТРИИ ФИНСЛЕРА

Обозначим $T(V_n)$ расслоенное пространство касательных векторов многообразия V_n. Рассмотрим пространство $T(T(V_n))$ как расслоенное пространство с базой V_n. Типовым слоем этого пространства является в свою очередь расслоенное пространство T_2, базой которого является n-мерное векторное пространство, а типовым слоем — $2n$-мерное векторное пространство.

Согласно Эресману связность в пространстве $T(V_n)$ определяется заданием поля оснащений вертикальных пространств в каждом ассоциированном с точкой V_n пространстве T_2. Мы ограничимся рассмотрением связностей инвариантных относительно группы гомотетий, действующей в пространстве $T(V_n)$. Изучение некоторых алгебраических и дифференциально-геометрических свойств T_2 оказывается чрезвычайно полезным при рассмотрении связностей такого вида, в частности связности в пространстве Финслера. Особенно важной является каноническая инволюция α, введенная Кобаяси. Образом связности в T_2 относительно α является поле конусов. С этим полем конусов естественно связано некоторое поле касательных плоскостей к конусам поля, определяющее некоторую новую связность. Тогда кручение исходной связности определяется как билинейная форма, характеризующая уклонение этой связности от новой. Связность нулевого кручения определяется полем плоскостей, которые касаются соответствующего относительно α поля конусов. Заметим, что с помощью α можно определить линейную связность в $T(V_n)$, не прибегая к понятию главного расслоенного пространства.

Введенные нами понятия позволяют получить связность в пространстве Финслера с помощью простой геометрической конструкции в T_2, в то время как обычно ее получают, накладывая искусственные ограничения на ее выбор.

В. И. ШУЛИКОВСКИЙ (Казань)

ТРОЙКИ СЕТЕЙ И ЧЕТВЕРКИ СОПРЯЖЕННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ

Тройка попарно аполярных сетей $\underset{\alpha}{A}$ $(\alpha=1,\ 2,\ 3)$ определяет в пространстве двумерной аффинной связности G три связности $\underset{\alpha}{G}$, сопряженные со связностью G относительно сети $\underset{\alpha}{A}$, соответственно. Связности $\underset{\alpha}{G}$ и $\underset{\beta}{G}$ тоже оказываются сопряженными относительно сети $\underset{\gamma}{A}$ (α, β, γ различны).

Средняя связность этих четырех связностей (ее коэффициенты равны среднему арифметическому коэффициентов G; $\underset{\alpha}{G}$) квазиевклидова, а сети $\underset{\alpha}{A}$ в ней декартовы. Эта связность не зависит от выбора связности G и называется *присоединенной* к тройке сетей $\underset{\alpha}{A}$.

Для того, чтобы присоединенная связность была евклидовой, необходимо и достаточно чтобы сети $\underset{\alpha}{A}$ были попарно изотермичны.

Дополнительным вектором некоторого бивектора ε_{ij} в аффинной связности называют вектор ω_s, такой, что $\varepsilon_{ij|s}=2\omega_s\varepsilon_{ij}$.

Дополнительный вектор бивектора ε_{ij} в присоединенной связности

$$\tau_s=\frac{1}{4}\,(\omega_s+\underset{1}{\omega_s}+\underset{2}{\omega_s}+\underset{3}{\omega_s})=\frac{1}{2}\,(2\omega_s-\underset{1}{a_s}-\underset{2}{a_s}-\underset{3}{a_s})$$

(ω_s и $\underset{\alpha}{\omega_s}$ — дополнительные векторы того же бивектора в связностях G и $\underset{\alpha}{G}$, $\underset{\alpha}{a_s}$ — чебышевские векторы сетей $\underset{\alpha}{A}$ в связности G).

Изотермичная тройка сетей характеризуется тем, что ее вектор τ_s градиентен.

Если $\underset{\alpha}{A}$ — асимтотическая сеть поверхности P_3, то каждая нормализация этой поверхности определяет пару сопряженных связностей $\underset{\alpha}{G}$ и $\underset{\beta}{G}$. В общем случае, когда $\underset{\alpha}{A}$, G и $\underset{\alpha}{G}$ — произвольны, для сети $\underset{\alpha}{A}$ определяются, как и для поверхности P_3, линии D и S (аналоги линий Дабру и Сегре), инвариантный пучок векторов, нормальная риманова метрика с изотропной сетью $\underset{\alpha}{A}$, и т. д. Между этими понятиями для сетей тройки $\underset{\alpha}{A}$ имеются некоторые оотношения, приводящие к некоторым классам сетей и поверхностей.

И. В. БЛИЗНИКЕНЕ (Вильнюс)

О МНОГООБРАЗИЯХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КРИВЫХ ПРОСТРАНСТВА ЕВКЛИДОВОЙ СВЯЗНОСТИ

Рассмотрим m-параметрическое семейство геодезических линий n-мерного пространства евклидовой связности. Такое семейство образует некоторую $(m+1)$-мерную поверхность V_{m+1} пространства евклидовой связности.

Структурные уравнения пространства евклидовой связности имеют вид [1]:

$$D\omega^I=[\omega^K,\ \omega^I_K]+R^I_{PQ}\,[\omega^P,\ \omega^Q],$$

$$D\omega^I_J=[\omega^K_J,\ \omega^I_K]+R^I_{JPQ}\,[\omega^P,\ \omega^Q],$$

$$I,\ J,\ K=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1;\quad \hat{I},\ \hat{J},\ \hat{K}=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;$$

$$i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\quad \alpha,\ \beta,\ \gamma=m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n-1.$$

К каждой точке A поверхности V_{m+1} присоединим локальное пространство с таким подвижным репером, чтобы единичный вектор $\mathbf{e}_0$ был бы направлен вдоль касательной к кривой семейства, векторы $\mathbf{e}_i$ были бы ортогональны к нему и лежали бы в касательном пространстве точки A многообразия V_{m+1}, а векторы $\mathbf{e}_\alpha$ были бы ортогональны к $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{e}_i$. Тогда

$$\omega^\alpha=0,\ \omega^0_0=0,\ \omega\ +g_{ij}\,\omega^j+0,\ \omega^0_\alpha+g_{\alpha\beta}\,\omega^\beta_0=0,$$

$$\omega^\alpha_i+g^{\alpha\beta}g_{ij}\,\omega^j_\beta=0,$$

$$dg_{ij}-g_{kj}\,\omega^k_i-g_{ik}\,\omega^k_j=0,$$

$$dg_{\alpha\beta}-g_{\alpha\gamma}\,\omega^\gamma_\beta-g_{\gamma\beta}\,\omega^\gamma_\alpha=0,$$

где

$$\mathbf{e}^2_0=1,\ \mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j=g_{ij},\ \mathbf{e}_\alpha\,\mathbf{e}_\beta=g_{\alpha\beta},$$

$$g^{\alpha\beta}\,g_{\beta\gamma}=\delta^\alpha_\gamma.$$

Продолжая систему $\omega^\alpha=0$, т. е. систему дифференциальных уравнений поверхности V_{m+1}, получим

$$\omega^\alpha_0=b^\alpha_{00}\,\omega^0+b^\alpha_{0i}\,\omega^i,$$

$$\omega^\alpha_i=b^\alpha_{0i}\,\omega^0+b^\alpha_{ij}\,\omega^j,$$

$$b^\alpha_{ij}\neq b^\alpha_{ji}.$$

Кривая $\omega^i=0$, $\omega^\alpha=0$ является геодезической тогда и только тогда, когда

$$b^\alpha_{00}=0,\ \omega^i_0=a^i_j\,\omega^j.$$

Введя обозначения $b^\alpha_{0i}=a^\alpha_i$, получаем систему дифференциальных уравнений многообразия V_{m+1}:

$$\omega^\alpha=0,\ \omega^{\hat{I}}_0=a^{\hat{I}}_i\,\omega^i,\ \omega^\alpha_i=a^\alpha_i\,\omega^0+b^\alpha_{ij}\,\omega^j,$$

$$b^\alpha_{ij}\neq b^\alpha_{ji}.$$

Продолжая эту систему, мы получаем последовательность дифференциально-геометрических объектов многообразия V_{m+1}.

Введено понятие локального гиперсферического изображения многообразия V_{m+1}, локального направления двухпараметрического многообразия геодезических кривых многообразия V_{m+1}, локального параметра распределения, локального внешнего параметра распределения, локального внутреннего параметра распределения, локального бивектора распределения, локальных псевдофокусов и развертывающихся подмногообразий. Этим обобщены результаты Ю. Г. Лумисте [2]. Также рассмотренна конгруэнция геодезических кривых [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. И. В. Близникене. К локальной теории конгруэнций геодезических кривых пространства евклидовой связности, Литовский матем. сборник, т. 2, № 1, 17—24, 1962.
2. Ю. Г. Лумисте. Многомерные линейчатые поверхности евклидова пространства, Матем. сборник, т. 55 (97), № 4, 411—420, 1961.

Д. Е. ЧЕРНЫЙ (Саратов)

ГЕОМЕТРИЯ СИНГУЛЯРНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ С ДВОЙНЫМ ИНТЕГРАЛОМ В ПРОСТРАНСТВЕ X_4

Рассматривается вариационная задача на безусловный экстремум с двойным интегралом в пространстве X_4. Задание функции поверхности в данной задаче эквивалентно заданию 4-секущей поверхности с слоевыми сечениями на конусе Грассмана в расслоенном пространстве $M_{4+\binom{4}{2}}$, которая называется глобальной индикатрисой вариационной задачи. 4-мерная поверхность на конусе Грассмана в пространстве $M_{\binom{4}{2}}$ называется сингулярной третьего класса сингулярности, если её грассмановым собственным тангенциальным образом является кривая в сопряженном пространстве $^*M_{\binom{4}{2}}$. Рассматриваемая вариационная задача называется сингулярной третьего класса сингулярности, если слоевые сечения ее глобальной индикатрисы являются сингулярными третьего класса сингулярности поверхностями. Так как каждое слоевое сечение сингулярной 4-секущей поверхности однозначно определяется заданием его грассманова собственного тангенциального образа, то геометрия сингулярной 4-секущей поверхности в $M_{4+\binom{4}{2}}$ сводится к геометрии 1-секущей поверхности в $^*M_{4+\binom{4}{2}}$. В расслоенном пространстве $X_{4+(1)}$, точечным множеством которого является 1-секущая поверхность в $^*M_{4+\binom{4}{2}}$, внутренним образом определяется линейная частичная связность. С помощью этой связности решается задача локальной эквивалентности глобальных индикатрис двух сингулярных вариационных задач и, в частности, находятся необходимые и достаточные условия постоянства глобальной индикатрисы. Определение внутренним образом линейной частичной связности в $X_{4+(1)}$ позволяет построить инвариантную теорию второй вариации и уравнений Якоби в сингулярной вариационной задаче с двойным интегралом в X_4.

А. И. ПЕРШИН (Саратов)

К ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КАРАТЕОДОРИ В СИНГУЛЯРНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ЛАГРАНЖА В X_4

Рассматривается частный случай сингулярной, не удовлетворяющей условию регулярности, вариационной задачи Лагранжа в X_4, индикатрисами которой являются двумерные тангенциальные поверхности, т. е. поверхности, образованные касательными к кривой. Геометрически внутреннее задание сингулярной вариационной задачи Лагранжа в X_4 сводится к заданию тангенциальной 2-секущей поверхности в $E_4(X_4)$, пересекающей каждый слой E_4 по 2-мерной тангенциальной поверхности

$$x^{\alpha}=l^{\alpha}(\xi^{\lambda}, \eta)+\overset{(-1)}{\zeta}\,\underset{1}{l^{\alpha}}(\xi^{\lambda}, \eta). \tag{1}$$

Задание тангенциальной 2-секущей поверхности сводится к заданию 1-секущей поверхности

$$x^{\alpha}=l^{\alpha}(\xi^{\lambda},\ \eta). \tag{2}$$

что приводит к рассмотрению общего расслоенного пространства $X_1(X_4)$.

Тангенциальная 2-секущая поверхность в $X_1(X_4)$ называется постоянной тангенциалной 2-секущей поверхностью, если ее уравнения имеют вид

$$x^{\alpha}=l^{\alpha}(\eta)+\overset{(-1)}{\zeta}\,\underset{1}{l^{\alpha}}(\eta). \tag{3}$$

В сообщении речь будет идти о необходимых и достаточных условиях того, чтобы заданная тангенциальная 2-секущая поверхность была преобразована в постоянную тангенциальную 2-секущую поверхность с помощью преобразований Каратеодори, геометрическая форма которых в сингулярной вариационной задаче Лагранжа в X_4 состоит в преобразовании метрики Лагранжа, определяемой интегралом $\int\limits_{s_1}^{s_2} l_{\alpha}\,\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial\zeta}\,ds$ в новую метрику Лагранжа. Справедлива следующая теорема:

Тангенциальная 2-секущая поверхность в $X_{4+(1)}$ будет постоянной тангенциальной 2-секущей поверхностью тогда и только тогда, когда:

1. Внутренняя частичная линейная связность будет иметь нулевую кривизну.
2. Поля локальных плотностей $\overset{(-1)}{u},\ \overset{(-2)}{u},\ \overset{(-3)}{u}$ постоянны.
3. Локальные плотности $\underset{34}{{}^{*}\overset{0}{I}},\ \underset{34}{{}^{*}\overset{1}{I}},\ \underset{23}{{}^{*}\overset{0}{I}},\ \underset{14}{{}^{*}\overset{3}{I}}$ тождественно обращаются в нуль, где $\overset{(-a)}{u}$ — коэффициенты плотности дифференциального уравнения

$$^{*}\nabla^{s} l_{\alpha}+\overset{(-a)}{u}\,{}^{*}\nabla^{a} l_{\alpha}=0, \tag{4}$$

которые определяют кривую в E_4 и плотности $\underset{34}{{}^{*}\overset{0}{I}},\ \underset{34}{{}^{*}\overset{1}{I}},\ \underset{23}{{}^{*}\overset{e}{I}},\ \underset{14}{{}^{*}\overset{2}{I}}$ являются коэффициентами разложения

$$[{}^{*}D\,{}^{*}\nabla^{e}l]=\underset{cd}{{}^{*}\overset{e}{I}}\,[{}^{*}\nabla^{c}l\,{}^{*}\nabla^{d}l]. \tag{5}$$

Н. С. СИНЮКОВ (Одесса)

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ АФФИННО-СВЯЗНЫХ И РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ОБОБЩЕНИЯ

В первой части доклада предполагается дать небольшой обзор результатов, полученных за последние годы в теории геодезического отображения римановых пространств советскими и иностранными математиками, а затем обратить внимание слушателей на некоторые задачи, представляющие, по нашему мнению, определенный интерес в этой области.

Во второй части мы остановимся на встречавшихся в литературе обобщениях понятия геодезического отображения для аффинно-связных и римановых пространств.

Третья (основная) часть доклада будет посвящена разрабатываемой докладчиком теории почти геодезических отображений аффинно-связных и римановых пространств. Именно, здесь будет введено понятие о почти геодезических линиях, получены их дифференциальные уравнения, введено понятие о п о ч т и г е о д е з и ч е с к о м отображении пространств аффинной связности (без кручения), рассмотрен вопрос об их классификации, получены характеризующие каждый из классов почти геодезических отображений условия, условия, определяющие класс допустимых преобразований одного из пространств, находящихся в почти геодезическом соответствии, условия транзитивности и взаимности. Далее будет рассмотрены некоторые решения задачи о почти геодезическом отображении для римановых пространств.

В последней части доклада будут указаны дальнейшие обобщения теории геодезического отображения в том же направлении.

Я. Л. ШАПИРО (Горький)

ПРОЕКТИВНАЯ СВЯЗНОСТЬ С ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ПСЕВДОГРУППОЙ

1. Общая теория инфинитезимальной связности недостаточна, когда речь идет о связности проективной.

Для получения различных типов проективной и иных связностей следует к обычным представлениям о расслоенном пр-ве (E) с структурной группой Ли (G_r) присоединить псевдогруппу Г, дифференцируемым образом действующую на E и преобразующую любой слой в себя, причем каждое, индуцированное Г, преобразование слоя пренадлежит G_r.

Рассматривая картанову связность на E с точностью до преобразований, индуцированных Г, получим (в зависимости от выбора Г) тот или иной тип связности.

2. Пусть

$$\lambda^{*i}=\frac{a^i_j(x)\,\lambda^j}{1+a^0_j(x)\,\lambda^j}, \qquad i, j,=1, \ldots, n \tag{1}$$

псевдогруппа Г проективных пр-ний расслоенного многообразия касательных векторов (λ^i) дифференцируемого многообразия X_n с локальными координатами x^k.

Введем однородные координаты

$$(\Lambda^\alpha,\ \alpha=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$$

для касательного к X_n пр-ва T_n обычным образом:

$$\lambda^i=\frac{\Lambda^i}{\Lambda^0}.$$

Псевдогруппа Г может быть записана в виде

$$\Lambda^{*\alpha}=a^\alpha_\beta\,\Lambda^\beta \qquad (a^i_0=0;\quad \alpha,\ \beta=0,\ 1,\ \ldots,\ n;\quad i,\ j=1,\ \ldots,\ n).$$

Дифференцируемое проективное соответствие (φ) между T_μ и $T_{\mu+d\mu}$ определится соотношением

$$\delta\Lambda^\alpha+\omega^\alpha_\beta\Lambda^\beta=0,$$

где

$$\omega^\alpha_\beta=\Pi^\alpha_{\beta i}\,dx^i \quad \text{и} \quad \Pi^\alpha_{\beta i}$$

дифференцируемые функции координат. Для образования проективной связности с фундаментальной группой Г следует ω^α_β считать заданным с точностью до преобразований

$$(\tilde{\omega}^\alpha_\beta=(a)\,(\omega)\,(a^{-1})+(a^{-1})\,(da), \tag{2}$$

где

$$(a)\in \Gamma.$$

Если

$$a^i_j(x) \quad \text{и} \quad a^0_j(x)$$

произвольные, то за счет выбора a^i_j и a^0_j можно положить $\omega^i_0=dx^i$,

$$G^i_{ik}=\Pi^i_{ik}-n\,l_k=0, \quad (\omega^0_0=l_k\,dx^k).$$

Мы пришли к натуральному реперу Картана.

Псевдогруппе

$$\lambda^{*i}=\frac{\lambda^i}{1+\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\lambda^j} \qquad (3)$$

соответствует связность О. Веблена.

При $\omega_0^i=dx^i$ мы получаем тип проективной связности, характерный для нормализованных поверхностей проективного пространства.

Формулы преобразований, индуцированные группой Г вида (3) для коэффициентов

$$G_{jk}^i=\Pi_{jk}^i-l_k\delta_j^i,\quad p_{ij}=\Pi_{ij}^0$$

принимает вид

$$\tilde{G}_{jk}^i=G_{jk}^i+\varphi,_j\delta_k^i+\varphi,_k\delta_j^i,$$

$$\tilde{P}_{ij}=P_{ij}+\varphi,_{i,j}-\varphi,_i\varphi,_j$$

($\varphi,_{i,j}$ является пов-ной производной на базе G_{jk}^i) и совпадают с формулами А. П. Нордена.

Разумеется, на этом пути можно придти и к неизвестным типам связности

$$\left(\text{такова, например, связность с группой}\quad \lambda^{*i}=\frac{e^{c\varphi(x)}\lambda^i}{1+\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\lambda^j}\right).$$

Отметим, что если рассмотрение псевдогруппы

$$\lambda^{*i}=a_j^i(x)\lambda^j$$

в качестве фундаментальной приводит к различным обобщениям аффинной связности. Если, например,

$$\lambda^{*i}=a\lambda^i,$$

то соответствующая связность определена с точностью вида:

$$(\tilde{\omega})=(\omega)+\ln a(e).$$

ВТОРАЯ СЕКЦИЯ

На заседаниях второй секции председательствовали:

1. 14 июня — кандидат физико-матем. наук доц. Любовь Яковлевна Березина.
2. 15 июня — кандидат физико-матем. наук доц. Давид Ефимович Рускол.
3. 17 июня — кандидат физико-матем. наук доц. Юрий Ефимович Пензов.

Ниже публикуются краткие содержания докладов (Б. Г. Салаев и В. В. Весенин на конференции не присутствовали).

Ю. Е. ПЕНЗОВ (Саратов)

ГЕОМЕТРИЯ ПОРЯДКА НА ПРЯМОЙ, КАК ОБОБЩЕННАЯ АЛГЕБРА ОТНОШЕНИЙ

По А. Тарскому, алгеброй отношений называется множество, для элементов которого определены две бинарные операции (относительное сложение и относительное умножение) и две унарные операции (дополнение и обращение), удовлетворяющие определенным аксиомам. Собственной алгеброй отношений над множеством A называется множество всех бинарных отношений между элементами множества A.

Собственная обобщенная алгебра отношений над множеством A есть совокупность всех n-отношений ($n=1, 2, 3, \ldots$) между элементами этого множества. Основными константами и операторами ее являются: $(1, n)$ — диагональные плоскости степени n $\overset{(n)}{\Delta}_{1n}$ ($n=2, 3, \ldots$) операторы дополнения $'$, объединения $\cup$, $(1, i)$ — транспозиции T_{1i} ($i=2, 3, \ldots$): (r, s) — умножения $\overset{r}{\underset{s}{\mathrm{I}}}$ ($r, s=0, 1, 2, \ldots$).

Геометрия порядка на аффинной прямой есть собственная алгебра отношений, в которой дополнительно выделено новое постоянное тернарное отношение μ (отношение „между“), удовлетворяющее условиям:

$$\alpha)\quad \mu \subset \overset{-1}{\mu},$$

$$\beta_1)\quad \bigcup_{i=1,2,3} \mu_i = \overset{(3)}{D}, \qquad \beta_2)\quad \bigcup_{\substack{i \neq j \\ i,j=1,2,3}} (\mu_i \cap \mu_j) = \Phi;$$

$$\gamma)\quad (\mu_2 \cup \mu_3) \overset{1}{\mathrm{I}} \mu \subset \mu;$$

$$\delta)\quad \overset{(3)}{\Delta}_{13} \setminus \overset{(3)}{\Delta} \subset (\mu_2 \overset{1}{\underset{1}{\mathrm{I}}} \mu_3) \cup (\mu_3 \overset{1}{\underset{1}{\mathrm{I}}} \mu_2),$$

где:

$$\overset{-1}{\mu} = T_{13}\mu; \quad \mu_1 = \mu; \quad \mu_2 = T_{12}T_{13}\mu; \quad \mu_3 = T_{13}T_{12}\mu;$$

$$\overset{3}{D} = A^3 \setminus (\overset{(3)}{\Delta}_{12} \cup \overset{(3)}{\Delta}_{13} \cup \overset{(3)}{\Delta}_{23});$$

$$\overset{(3)}{\Delta} = \overset{(3)}{\Delta}_{12} \cap \overset{(3)}{\Delta}_{13}.$$

Д. З. ГОРДЕВСКИЙ (Харьков)

АФФИННО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

В метрической геометрии довольно хорошо изучены так называемые параллельные поверхности. Естественно поставить аналогичную задачу в аффинной геометрии. Но здесь при ее решении сталкиваемся с необходимостью выполнять громоздкие вычисления.

Автором найдены основные тензоры и инварианты аффинно-параллельных поверхностей. Найдена также аффинная нормаль и выяснены условия существования взаимно аффинно-параллельных поверхностей.

Б. Г. САЛАЕВ (Баку)

ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

Линейчатая поверхность в пространстве Лобачевского задается с помощью двух кривых:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(t), \tag{1}$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{y}}(t),$$

$$\mathbf{x}^2 = g_{ij}x^i x^j = -1: \quad \bar{\mathbf{y}}^2 = g_{ij}y^i y^j + 1: \quad \bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}} = 0,$$

где g_{ij}-метрический тензор пространства. По отображению Котельникова—Штуди линейчатая поверхность дается еще уравнением:

$$\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}(t) \tag{2}$$

где $\bar{\mathbf{A}}$ — единичный комплексный вектор, соответствующий образующей. Параметр распределения определяется формулой

$$\operatorname{tg} 2\Theta = \frac{1}{2}\,\frac{l_{ijkl}\dfrac{da^{ij}}{dt}\dfrac{da^{kl}}{dt}}{g_{ik}g_{jl}\dfrac{da^{ij}}{dt}\dfrac{da^{kl}}{dt}}, \tag{3}$$

где l_{ijkl} дискриминальный квадривектор, a^{ij} плюккеровы координаты образующей, а $\operatorname{tg}\Theta = d$ — параметр распределения. Положение стрикционных точек определяется формулой

$$\operatorname{th} 2\psi = -\frac{2\bar{x}'\bar{y}'}{\bar{x}'^2 + y'^2}. \tag{4}$$

Рассматриваются три взаимноперпендикулярные и единичные комплексные векторы $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$, где $\bar{A}_1=\bar{A}$ и соответствует образующей, $\bar{A}_3$ — есть общий перпендикуляр двух смежных образующих и называется стрикционной касательной, $\bar{A}_2$ называется стрикционной нормалью. Их производные выражаются через них следующим образом

$$\left.\begin{aligned} \bar{A}_1' &= P\bar{A}_2, \\ \bar{A}_2' &= -P\bar{A}_1+Q\bar{A}_3, \\ \bar{A}_3' &= -Q\bar{A}_2, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где

$$P=\sqrt{\bar{A}'^2}=p+ip^*, \quad Q=\frac{(\bar{A}\,\bar{A}'\,\bar{A}'')}{\bar{A}'^2}=q+iq^*$$

комплексные числа.

Рассматривается автополярный репер в каждой точке с вершинами в токах $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}_1$, и даются деривационные формулы:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}' &= q^*\bar{y}+p^*\bar{z}_2, \\ \bar{y}' &= q^*\bar{x}+p\bar{z}_1, \\ \bar{z}_1' &= -p\bar{y}+q\bar{z}_2, \\ \bar{z}_2' &= p^*\bar{x}-q\bar{z}_1. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Доказывается теорема о параллельном перенесении единичного вектора образующей по поверхности вдоль стрикционной линии.

Классифицируются развертывающиеся поверхности:

а) развертывающаяся поверхность образована касательными внутренней стрикционной линии;

б) развертывающаяся поверхность образована касательными внешней стрикционной линии

в) если образующие проходят через одну внутреннюю точку, то развертывающаяся поверхность называется конусом;

г) если образующие проходят через одну внешнюю точку, то развертывающаяся поверхность называется цилиндром.

Рассматривается параллельное перенесение комплексных векторов и показывается, что для параллельного перенесения комплексного вектора $\bar{A}$ по кривой $\bar{R}=\bar{R}(t)$ на комплексной сфере необходимо и достаточно, чтобы образующая линейчатой поверхности $\bar{R}$ совпала бы со стрикционной нормалью поверхности $\bar{A}$.

Е. В. КОРОБЕНОК (Минск)

К ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Выбирается вещественный канонический репер нелинейчатой поверхности (A) на основе полуканонического репера Т. Михэйлеску. Вершинами A_1 и A_2 служат преобразования Лапласа поверхности (A) соответственно в направлениях Дарбу и Сегре, вершиной A_3 — точка Кенигса нормали — прямой пересечения соприкасающихся плоскостей линий Дарбу и Сегре в точке (A).

Выясняется положение единичной точки, геометрически истолковываются дифференциальные инварианты. Исследуются уравнения структуры при всех постоянных инвариантах. Изучаются свойства поверхности, связанные с указанной канонизацией; рассматриваются поверхности, огибаемые координатными плоскостями, и конгруэнции координатных ребер. Исследуется отношение нормального репера Картана к выбранному реперу, а также совпадение определенных элементов обоих реперов.

В. В. ВАСЕНИН (Томск)

О РЕПЕРАЖЕ ПОДМНОГООБРАЗИЙ В НЕГОЛОНОМНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Подмногообразием ψ_2 неголономной поверхности X_3^2 называется совокупность элементов этой неголономной поверхности определяемая уравнением $\alpha_i\omega^i=0$ $(*)$, где ω^i — базисные формы неголономной поверхности X_3^2. Уравнение $(*)$ определяет неголономную поверхность $\tilde{X}_3^2$. Полуканонический (в смысле Р. Н. Щербакова, [1]) репер для исследования ψ_2 содержит касательную плоскость π_1 неголономной поверхности X_3^2, касательную плоскость π_2 неголономной поверхности $\tilde{X}_3^2$ и плоскость π_3, содержащую одно из асимптотических направлений и аффинную нормаль X_3^2. Репер инвариантно нормирован. 1. Выделены классы подмногообразий ψ_2, обладающие одним из следующих геометрических свойств: 1. Характеристика плоскости π_3 при смещении по линии $\pi_1\times\pi_2$ a) параллельна асимптотическому направлению X_3^2, b) параллельна аффинной нормали X_3^2, c) неопределена. 2. Линии пересечения плоскостей π_i, π_k $(i, k=1, 2, 3;\ i\neq k)$ образуют цилиндрическую неголономную конгруэнцию и т. д. Одномерные подмногообразия X_1^2 неголономной поверхности класса $\beta_1=0$ $(\alpha_2=0)$ [2] характеризуются тем, что характеристика плоскости, содержащей касательную к линии X_1^2 и касательную к асимптотической линии неголономной поверхности при смещении вдоль линии X_1^2, совпадает с асимптотической касательной. X_1^2 класса $\alpha_3=0$ $(\beta_3=0)$ [2] характеризуется тем, что соприкасающаяся плоскость линии X_1^2 содержит одну из асимптотических касательных неголономной поверхности. Произвольное подмногообразие ψ_2 содержит два X_1^2 класса $\beta_1=0$ $(\alpha_2=0)$ и три X_1^2 класса $\alpha_3=0$ $(\beta_3=0)$. Рассмотрены ψ_2, характеризующиеся теми или иными свойствами отмеченных выше классов X_1^2. Выделены частные классы неголономных поверхностей, характеризующихся наличием ψ_2 того или иного вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Н. Щербаков. Репераж подмногообразий в линейчатой геометрии, Первая всесоюзная геометрическая конференция, Тезисы и аннотации, Киев, 1962.
2. В. В. Васенин. К эквиаффинной теории неголономной поверхности, Геометрический сборник, вып. 3, Труды Томского университета (печатается).

В. А. МАНЕВИЧ (Москва)

К ОБРАЗОВАНИЮ ПЛОСКИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ n-ГО ПОРЯДКА ПО ГРАССМАНУ

Рассматривается характер образования плоской алгебраической кривой n-го порядка, заданной экстенсивным уравнением

$$XA_1a_1B_1b_1Xc_1D_1l_1Xc_2D_2l_2X\ldots Xb_2B_2a_2A_2X=0 \tag{1}$$

при четном и нечетном n.

Большое внимание уделяется задаче о конструктивном получении фиксированных элементов, нужных для образования экстенсивного уравнения кривой n-го порядка по ее данным $\frac{n(n+3)}{2}$ точкам. Решение этой задачи является новым доказательством теоремы Грассмана о том, что всякая алгебраическая кривая n-го порядка может быть представлена экстенсивным уравнением (1). Изучаются центральные соответствия на плоскости, т. е. такие, при которых соответственные точки лежат на прямых, проходящих через фиксированную точку — центр. Эти соответствия связаны с определенной системой данных элементов (точек, прямых). Определение степени центральных соответствий основано на грассманновском образовании плоских алгебраических кривых. Примером может служить центральное соответствие 6-й степени, при котором на каждой прямой $x\supset 0$ устанавливается проективитет $x(A, B, C\ldots)\,\overline{\wedge}\, x(A', B', C'\ldots)$, где A, B, C, A', B', C' точки пересечения x с фиксированными прямыми a, b, c a', b', c'. Рассмотренные соответствия допускают обобщение, если точку-центр заменить некоторой алгебраической кривой, а прямые x — касательными к ней. Центральные соответствия обобщаются также и на пространство.

Л. Я. БЕРЕЗИНА (Рига)

КАНОНИЧЕСКИЙ РЕПЕР m-МЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО И В n-МЕРНОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Определяя репер в пространствах постоянной кривизны как пучок гиперплоскостей, проходящих через одну точку, задача приводится к выбору определенных гиперплоскостей. Геометрия такого пучка ничем не отличается от геометрии векторного пространства. Поэтому канонизация репера может быть проведена во всех геометриях одинакового.

Р. Р. МУЛЛАРИ (Тарту)

ФОРМУЛЫ ФРЕНЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Выяснение инвариантных свойств многомерной поверхности V_m в R_n особенно усложняется в силу неинвариантности выбора репера в высших нормальных плоскостях к V_m. Во многих случаях может оказаться целесообразным определение векторов кривизны, векторов отражения кривизны и векторов кручения различных порядков, зависящих только от свойств поверхности и от выбора лишь касательного репера на ней. Это позволяет получить для V_m систему дифференциальных уравнений, напоминающих формулы Френе для кривой. Выбор начальных значений векторов и коэффициенты системы определяют поверхность V_m в R_n однозначно. Для существования поверхности V_m должен, конечно, быть удовлетворен еще ряд условий интегрируемости. Эти условия можно вывести для общего случая.

При использовании описанной методики в конкретных исследованиях возникает целый ряд новых трудностей. Наиболее хорошие результаты она, наверно, дает при исследовании систем импримитивности подгрупп ортогональной группы движений, где дело сводится к исследованию линейных алгебраических систем.

В. Л. ИЗРАИЛЕВИЧ (Саратов)

К ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В сообщении строится геометрическая интерпретация системы дифференциальных уравнений в частных производных с одной неизвестной функцией, как теория поля поверхностей специального вида («конусов») в ковариантных касательных пространствах $W_{(v,\,n)}$. Конусы изучаются (в случае $v=2$) с помощью структуры модуля, естественным образом вводимой на пространствах $W_{(v,\,n)}$. Находится инвариантная характеристика конусов, что дает возможность некоторой классификации их. Соответствующая классификация дифференциальных уравнений включает классическую классификацию Петровского. Строится связность поля гиперконусов (также для $v=2$), что позволяет указать способ отыскания полной системы инвариантов дифференциального уравнения. Некоторые частные типы конусов (соответствующие линейным уравнениям и близким к ним типам) характеризуются также тем, что они допускают группу преобразований.

А. С. ЛЕЙБИН (Харьков)

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ ДВУМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Как известно, паратактический поворот четырехмерного евклидова пространства E^4 можно задать с помощью умножения справа или слева каждого вектора p из E^4 на некоторый единичный вектор a по правилам умножения кватернионов. Семейство плоскостей, инвариантных относительно такого поворота, имеет два параметра (см., например, [1]).

2. Можно так выбрать декартову систему координат в E^4, чтобы плоскости E^2_{13} и E^2_{34}, содержащие соответственно орты осей e_1, e_2 и e_3, e_4, были инвариантными относительно заданного поворота и чтобы вектор a лежал в плоскости E^2_{12}; если $a=e_2$, то поворот будет на 90°.

3. Поверхность E^2 в E^4 называется аналитической [2], если ее уравнение может быть записано в виде

$$w=f(z),$$

где $z=x_1+ix_2$, $w=x_3+ix_4$, $i=\sqrt{-1}$, а функции $x_3=u(x_1, x_2)$ и $x_4=v(x_1, x_2)$ в каждой точке удовлетворяют известным условиям (уравнениям) Коши—Римана.

4. Оказывается, что условиям Коши—Римана эквивалентно следующее условие, выполненное в каждой точке поверхности: если вектор p является касательным к поверхности, то в этой же точке должен быть касательным и вектор e_2p. Иными словами, каждая плоскость, касательная к поверхности F, должна быть вполне параллельна какой-либо из инвариантных плоскостей паратактического поворота.

5. Если в условии 4 заменить вектор e_2p на вектор pe_2, то получится поверхность, представляющая собою функцию $f(\bar{z})$, сопряженную функции $f(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Розенфельд. Неевклидовы геометрии, М., 1955.
2. Б. А. Фукс. Теория аналитических функций многих комплексных переменных, М.—Л., 1948.

А. Ф. БОРАВЛЕВ (Житомир)

О ТРАЕКТОРИЯХ ПУЧКОВ ПРЯМЫХ В НЕЕВКЛИДОВЫХ ГЕОМЕТРИЯХ

Инверсиям в гиперболической плоскости соответствуют инверсии евклидовой плоскости в конформной интерпретации Пуанкаре на полуплоскости. Так как образами линий постоянной кривизны двулистной гиперболической плоскости являются линии постоянной кривизны в интерпретации, состоящей из двух интерпретаций Пуанкаре, склеенных по абсолюту, и так как в евклидовой плоскости любые две линии постоянной кривизны инверсны между собой, то инверсны между собой (притом без дефектов) и любые две линии постоянной кривизны двулистной гиперболической плоскости.

Рассмотрим в гиперболической плоскости пучок прямых произвольного типа и какую-либо траекторию Г постоянной кривизны этого пучка. Использование упомянутого факта позволяет найти выражение для угла φ между траекторией Г и прямыми пучка:

$$\cos\varphi=\lambda_{\varepsilon_i}s_{\varepsilon_i}(K_t^i\pm K_t), \quad (i=0;\ 1), \quad \varepsilon_i=\begin{cases} n, & i=0, \\ t, & i=1, \end{cases} \tag{1}$$

где K_t и K_t^i — кривизны по касательной кривой Г и некоторой вспомогательной кривой постоянной кривизны соответственно, а λ и s — некоторые параметры отсчета.

Эта задача обобщается на любую траекторию Г, имеющую в каждой своей точке вполне определенную касательную.

В случае эллиптического пучка находим в циклических координатах

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k\cdot\operatorname{sh}\frac{\rho}{k}}{\rho'}. \tag{2}$$

В случае гиперболического пучка находим в гиперциклических координатах

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{ch}\frac{t}{k}}{t'}. \tag{3}$$

В случае параболического пучка получаем в орициклических координатах

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{e^{-\frac{\tau}{k}}}{\tau'}. \tag{4}$$

Эти формулы являются обобщением одинаковой с ними структуры формулы евклидовой геометрии

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\rho}{\rho'}. \tag{5}$$

На основании (2)—(4) получаем, что зависимость (1) можно принять за определение кривой постоянной кривизны.

В эллиптической плоскости и на сфере имеются только эллиптические пучки и две линии постоянной кривизны: прямая и окружность.

Для них тоже имеет место формула (1), а для произвольных траекторий пучка справедлива зависимость

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{r\sin\frac{\rho}{r}}{\rho'}. \tag{6}$$

В. В. РОКОТЯНСКАЯ (Харьков)

ИЗГИБАНИЕ НА ГЛАВНОМ ОСНОВАНИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

В работе ставится задача об отыскании поверхностей нулевой кривизны эллиптического пространства, несущих на себе сопряженные сети, сохраняющиеся при изгибании.

Получены следующие результаты:

1. Показано, что поверхности Клиффорда несут на себе ∞^4 главных оснований, не состоящих из геодезических, ∞^2 главных оснований с одним семейством геодезических и ∞^1 оснований Фосса.

2. Доказано, что не существует поверхностей нулевой кривизны эллиптического пространства с ∞^3 главных оснований и что поверхностями Клиффорда исчерпывается класс поверхностей с ∞^4 главных оснований.

3. Найден класс линейчатых поверхностей нулевой кривизны с ∞^2 главных оснований и класс нелинейчатых поверхностей с ∞^1 главных оснований.

Ш. Д. ТРУПИН (Рига)

ДЕЛИМОСТЬ ТЕНЗОРОВ И КОМПЛАНАРНОСТЬ АФФИНОРОВ В ЛИНЕЙНОМ БЕЗРАЗМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Линейное пространство, в котором не вводится аксиома о размерности, называется безразмерным.

Доклад посвящен, в основном, решению двух следующих задач безразмерного линейного пространства:

1) доказательству теоремы об однозначности разложения полилинейной функции на линейные и билинейные множители;

2) применению этой теоремы для исследования условий компланарности трех аффиноров с системой линейно независимых векторов.

Л. Я. БЕРЕЗИНА (Рига)

К ТЕОРИИ m-МЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В n-МЕРНОМ ЭКВИАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

При $n<\frac{1}{2}m(m+3)$ можно указать $\frac{1}{2}m(m+3)-n$ двухвалентных контравариантных, независящих от выбора нормальной плоскости, симметрических тензоров, дающих возможность фиксировать определенные направления в касательной плоскости.

Р. В. ВОСИЛЮС (Вильнюс)

ГЕОМЕТРИЯ ПРОЕКТИВНЫХ НОРМАЛЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОСТОЯННОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

В докладе рассматриваются поверхности постоянной гауссовой кривизны. К каждой ее точке можно присоединить канонический репер $\{A, \bar{e}_i\}$, образованный единичными векторами касательных асимптотических линий и метрической нормали поверхности.

Продолжая дифференциальное уравнение поверхности $\omega^3=0$, получаем систему коэффициентов

$$\begin{cases} \lambda; \\ \lambda,\ a,\ b; \\ \lambda,\ a,\ b,\ \alpha,\ \beta; \\ \lambda,\ a,\ b,\ \alpha,\ \beta,\ \mu,\ \xi, \end{cases}$$

которые определяют соответственно вторую, третью, четвертую и пятую дифференциальную окрестность поверхности.

Исходя из геометрических свойств, построены проективные нормали поверхности: ребра Грина

$$\begin{cases} 4b\lambda x^1-\beta x^3=0, \\ 4a\lambda x^2-\alpha x^3=0, \end{cases}$$

директрисы Вильчинского

$$\begin{cases} 2a\lambda x^1+kx^3=0, \\ 2b\lambda x^2+kx^3=0, \end{cases}$$

проективные нормали Фубини

$$\begin{cases} 2ab\lambda x^1-(bk+a\beta)\,x^3=0, \\ 2ab\lambda x^2-(ak+b\alpha)\,x^3=0, \end{cases}$$

и рассмотрены метрические свойства их конгруэнций.

Также исследованы проективные классы поверхностей, такие как поверхности Фубини, Чеха, Цицейки-Вильчинского и еще некоторые другие классы, и получены для их новые геометрические интерпретации.

Б. А. АБАКИРОВ (Фрунзе)

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА, ДОПУСКАЮЩИЕ ПЯТИЧЛЕННЫЕ ГРУППЫ ГОМОТЕТИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

Необходимым и достаточным условием того, чтобы вектор $\{v^i(x)\}$ определял бесконечно малое гомотетическое движение в римановом пространстве V_n с фундаментальным тензором $g_{ij}(x)$, является выполнение следующей системы дифференциальных уравнений:

$$v^\alpha \partial_\alpha g_{ij}+g_{\alpha j}\partial_i v^\alpha+g_{i\alpha}\partial_j v^\alpha=2Cg_{ij}, \qquad \text{(A)}$$

где C — число, отличное от нуля, называемое гомотетической постоянной.

Если риманово пространство V_n допускает группу гомотетических движений G_r, то эта группа содержит подгруппу G_{r-1} движений, которая необходимо является нормальным делителем группы G_r.

В работе, основываясь на вышеуказанные факты и на классификации вещественных структур групп G_4, найдены все пространства V_n, допускающие пятичленные группы гомотетических движений G_5 (метрика пространств может быть знаконеопределенной).

Л. А. ТУУЛМЕТС (Тарту)

О ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ V_3 В R_n

Линейчатые поверхности V_3 в пространстве R_n (т. е. в собственно-евклидовом пространстве ${}^0R_n$ или псевдоевклидовом пространстве ${}^1R_n$) можно рассматривать, с одной стороны, как двухпараметрические семейства прямых ∞^2R_1, с другой стороны, как поверхности V_3 в R_n.

Оказывается, что некоторые свойства таких V_3, как поверхностей, интересным образом связаны со свойствами их, как семейств ∞^2R_1, и наоборот. Как семейства ∞^2R_1, они, как известно, делятся на: 1) конгруэнции (2 семейств торсов), 2) демиконгруэнции (1 семейство торсов), 3) псевдоконгруэнции (0 семейств торсов). Как поверхности, такие V_3 характеризуются тем, что нормали к V_3 в точках одной образующей: 1) параллельны между собой, 2) параллельны одной двухмерной плоскости, 3) параллельны образующим некоторого конуса второго порядка.

Получены еще и другие примеры свойств подобного рода:

1. Конгруэнция V_3 в R_n (как ∞^2R_1) является изотропной конгруэнцией тогда и только тогда, если поверхность V_3 является минимальной поверхностью.

2. Конгруэнция V_3 в R_4 (как ∞^2R_1) является нормальной конгруэнцией тогда и только тогда, если двухмерные плоскости, нормальные к V_3 вдоль образующих, огибают поверхность V_2.

Оказывается, что минимальные конгруэнции V_3 в R_4 допускают непрерывное изгибание в их классе. Рассматриваются также некоторые специальные классы демиконгруэнций (минимальные, нормальные и др.). Оказывается, что в R_4 существует семейство ∞^2R_1 и с такими свойствами, которые в R_3 невозможны (напр., минимальная нормальная параболическая демиконгруэнция, и др.).

ТРЕТЬЯ СЕКЦИЯ

На заседаниях третьей секции председательствовали:

1. 14 июня — доктор физико-матем. наук проф. Валерий Витальевич Рыжков.
2. 15 июня — доктор физико-матем. наук проф. Николай Иванович Кованцов.
3. 17 июня — кандидат физико-матем. наук доц. Константин Иванович Дуничев.

Ниже публикуются краткие содержания докладов (В. А. Романович, Л. И. Магазинников, М. Б. Пергаменщиков и Е. Т. Ивлев на конференции не присутствовали).

К. И. ДУНИЧЕВ (Москва)

РАССЛОЕНИЕ ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ ПРЯМЫХ ЛИНИЯМИ В МНОГОМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В пространстве $P_n(n>3)$ рассматривается пара двупараметрических семейств прямых $\{l\}$, $\{l'\}$, соответствующие элементы которых находятся во взаимнооднозначном соответствии и не пересекаются, причем семейство $\{l\}$ обладает двумя фокальными поверхностями.

Пару $\{l, l'\}$ называем расслояемой, если к каждой прямой каждого из семейств можно присоединить ∞^1 линий, соприкасающиеся плоскости которых в точках прямой образуют пучок, осью которого служит соответствующая прямая другого семейства.

Показано, что расслоение пары $\{l, l'\}$ семействами линий в P_n $(n>3)$ возможно в том и только в том случае, если лишь одна фокальная плоскость прямой l пересекает прямую l'. Доказана теорема существования и рассмотрены геометрические свойства расслояемой пары.

Л. К. ТУТАЕВ (Минск)

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ДВУМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В 4-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО–ЛОРЕНЦА

Уравнения инфинитезимальных перемещений ортонормированного канонического репера $(A,\ e_0,\ e_1,\ e_2,\ e_3)$, отнесенного к двумерной поверхности и ее точке A можно выбрать в виде:

$$dA=w^1 e_1+w^2 e_2,$$

$$de_0=aw^1 e_1+bw^2 e_2+(r_1 w^1+r_2 w^2)\, e_3,$$

$$de_1=aw^1 e_0+(q_1 w^1+q_2 w^2)+p_1 w^1 e_3,$$

$$de_2=bw^2 e_0-(q_1 w^1+q_2 w^2)\, e_1+p_2 w^2 e_3,$$

$$de_3=(r_1 w^1+r_2 w^2)\, e_0-p_1 w^1 e_1-p_2 w^2 e_2,$$

$e_1,\ e_2$ — тангенциальные векторы поверхности, $\{Ae_0 e_3\}$ — нормальная двумерная плоскость в точке A; $a,\ b,\ r_1,\ r_2,\ p_1,\ p_2,\ q_1\ \ q_2$ — полная система дифференциальных инвариантов.

Есть на нормали Ae_0 такая точка F_{01}, на нормали Ae_3 — точка F_{31}, что при смещении точки A по линии w^1 касательные к соответственным линиям (F_{01}) и (F_{31}) в указанных точках находятся в плоскости $\{Ae_0 e_3\}$ и пересекаются в точке прикосновения F этой плоскости с огибающей семейства всех плоскостей $\{Ae_0 e_3\}$; аналогично точки F_{02}, F_{32}, F соответствуют смещению начала репера по линии w^2.

Нормали $\{Ae_0\}$ и $\{Ae_3\}$ содержат диагонали квадратов с вершиной в точке A и с сторонами — образующих изотропного гиперконуса с вершиной A.

Геометрически истолковать дифференциальные инварианты можно, указав координаты точек F_{11}, F_{31}, F_{02}, F_{32} и точек пересечения координатных гиперплоскостей с касательными к линиям, описываемым единичными точками осей репера при смещении его начала по линиям w^1 и w^2.

Двумерные поверхности со всеми постоянными инвариантами можно отнести к четырем классам.

Уравнения инфинитезимальных перемещений ортонормированного канонического репера $(Ae_0,\ e_1,\ e_2,\ e_3)$ относительно гиперповерхности и ее точки A можно выбрать в виде:

$$dA=w^1 e_1+w^2 e_2+w^3 e_3,$$

$$de_0=aw^1 e_1+bw^2 e_2+ew^3 e_3,$$

$$de_1=aw^1 e_0+[p_1 w^1+p_2 w^2+l\,(a-c)\,(b-c)\,w^3]\, e_2+[q_1 w^1+l\,(a-b)\,(b-c)\,w^2+q_3 w^3]\, e_3,$$

$$de_2=bw^2 e_0-[p_1 w^1+p_2 w^2+l\,(a-c)\,(b-c)\,w^3]\, e_1+[l\,(a-b)\,(a-c)\,w^1+r_2 w^2+r_3 w^3]\, e_3,$$

$$de_3=cw^3 e_0-[q_1 w^1+l\,(a-b)\,(b-c)\,w^2+q_3 w^3]\, e_1-[l\,(a-b)\,(a-c)\,w^1+r_2 w^2+r_3 w^3]\, e_2,$$

e_0 — вектор нормали, $e_1,\ e_2,\ e_3$ — тангенциальные векторы, $a,\ b,\ c,\ p_1,\ p_2,\ q_1,\ q_3,\ r_2,\ r_3,\ l$ — полная система дифференциальных инвариантов.

Векторы $e_1,\ e_2,\ d_3$ — тангенциальные к линиям кривизны.

Дифференциальные инварианты гиперповерхности можно истолковать геометрически, указав фокусы нормали и точки пересечения координатных гиперплоскостей канонического репера с касательными к траекториям единичных точек его осей.

В. А. РОМАНОВИЧ (Томск)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПАР СПЕЦИАЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ

В трехмерном проективном пространстве рассматривается пара комплексов. Требуется, чтобы любая пара соответствующих линейчатых поверхностей была параболической [1]. При этом оказывается, что оба комплекса должны быть специальными, причем поверхности, которых касаются лучи обоих комплексов, в соответствующих точках имеют общую касательную прямую. Произвол существования исследуемого класса пар комплексов — одна функция двух аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Романович. Параболическая пара линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространстве, Геометрический сборник, Труды Томского университета, том 161, стр. 65—69.

К. И. ГРИНЦЕВИЧЮС (Вильнюс)

О КОРРЕЛЯТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

Линейные дифференциальные формы ω_i^j ($i, j, k=1, 2, 3, 4$), определяющие инфинитезимальное перемещение проективного тетраэдра $\{A_i\}$ в трехмерном пространстве, удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\omega_i^j=[\omega_i^k\,\omega_k^j].$$

Система дифференциальных уравнений

$$\omega_1=\omega_1^4=\omega_2^3=\omega_2^4=0$$

вполне интегрируема и первые интегралы этой системы определяют прямую A_1A_2.

Система дифференциальных уравнений

$$\omega_1^3=\omega_1^4=\omega_2^3=\omega_2^4=d\rho+\omega_3^3+\omega_4^4-\omega_1^1-\omega_2^2=0 \tag{1}$$

также вполне интегрируема и первые интегралы этой системы определяют элемент, который обозначим $\mathfrak{U}$. Если постоянные первых интегралов системы (1) являются переменными параметрами, то элемент $\mathfrak{U}$ будет описывать пятимерное многообразие, присоединенное к четырехмерному многообразию прямых, т. е. каждому лучу четырехмерного многообразия (базы) прямых соответствует одномерное многообразие (слой) элементов $\mathfrak{U}$.

Выясним геометрическую интерпретацию элемента $\mathfrak{U}$.

Дифференциальные уравнения дважды ковариантного тензорного поля a_{ij} суть

$$da_{ij}=a_{ik}\,\omega_j^k+a_{kj}\,\omega_j^k+a_{ij}\,\omega, \tag{2}$$

где $D\omega=0$.

Компоненты тензора a_{ij}, при фиксированом луче A_1A_2, определяют коррелятивное соответствие

$$a_{ij}x^iy^j=0, \tag{3}$$

где x^j и y^i — координаты двух точек относительно тетраэдра $\{A_i\}$. В случае $a_{ij}=a_{ji}$ (соответственно $a_{ij}=-a_{ji}$), коррелятивное соответствие (3) будет полярным соответствием (соответственно нулевой системой).

Все корреляции (3) можно разбить (при фиксированном луче A_1A_2) на однопараметрическое семейство классов уравнением

$$e^{2\rho}\,|\det\|a_{ij}\||=\left\{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\right\}^2, \tag{4}$$

где e — число Непера.

Инвариантность класса корреляций (4), в силу (2), определяется дифференциальными уравнениями (1). Таким образом, элемент $\mathfrak{U}$ составлен из луча A_1A_2 и одного класса корреляций (4).

В случае $a_{ij}=-a_{ji}$ уравнение (4) примет вид

$$e^{\rho}\,|a_{13}a_{24}+a_{13}a_{42}+a_{14}a_{23}|=a_{12}^2.$$

Элемент $\mathfrak{U}$

$$\Big(\text{луч } A_1A_2 + \text{класс корреляций (4)}\Big)$$

назовем коррелятивным элементом.

А. И. ДРЕЙМАНАС (Вильнюс)

К ВОПРОСУ РАССЛОЯЕМЫХ КОНГРУЭНЦИЙ

В пространстве P_3 конгруэнции прямых можно расслоять при помощи семейства плоских элементов H_3 и уравнением расслояющих поверхностей является

$$\Delta t\equiv dt+\omega_1^2+t\,(\omega_2^2-\omega_1^1)-t^2\omega_2^1=0.$$

Если расслояющие поверхности задать обобщенным уравнением

$$\Delta t+\mu_\alpha^1\omega_2^\alpha t^2+(\mu_\alpha^1\omega_1^\alpha-\mu_\alpha^2\omega_2^\alpha)\,t-\mu_\alpha^2\omega_1^\alpha=0,$$

где

$$p,\ q=1,\ 2;\ \alpha,\ \beta,=3,\ 4$$

и

$$\delta\mu_\alpha^p+\mu_\alpha^q\pi_q^p-\mu_\beta^p\pi_\alpha^\beta+\pi_\alpha^p=0,$$

то уравнения односторонне расслояемой пары будут:

$$[\nabla\mu_\alpha^1\omega_2^\alpha]=0,\quad [\nabla\mu_\alpha^2\omega_1^\alpha]=0,\quad [\nabla\mu_\alpha^1\omega_1^\alpha]-[\nabla\mu_\alpha^2\omega_2^\alpha]=0$$

где

$$\nabla\mu_\alpha^p\equiv d\mu_\alpha^p-\mu_\beta^p\omega_\alpha^\beta+\mu_\alpha^q\omega_q^p+\omega_\alpha^p-\mu_\alpha^q\mu_\beta^p\omega_q^\beta.$$

Если конгруэнция (A_1A_2) дана, то интегральное многообразие существует с произволом одной функции двух аргументов и первые интегралы вполне интегрируемой системы $\nabla\mu_\alpha^p=0$ являются линейными координатами луча второй конгруэнции (B_3B_4), где $B_\alpha=\mu_\alpha^pA_p+A_\alpha$. Аналогично строится для луча $(A_3A_4)\to(B_1B_2)$. Ставятся вопросы о двухсторонне расслояемых парах, совпадение лучей (B_3B_4) и (B_1B_2), циклического расслоения $K_1\to K_2\to K_3\to K_1$ и другие.

Р. М. ГЕЙДЕЛЬМАН (Москва)

ПРОЕКТИВНАЯ ТЕОРИЯ КОНГРУЭНЦИЙ ПРЯМЫХ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

1. Рассмотрим в четырехмерном проективном пространстве конгруэнцию прямых l — семейство, зависящее от трех параметров u^1, u^2, u^3. Отнесем конгруэнцию (l) к подвижному проективному реперу, состоящему из точек $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$, $\bar{A}_4$, $\bar{A}_5$, причем точки $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ поместим на текущую прямую l семейства.

Уравнения инфинитезимального перемещения этого репера имеют вид:

$$d\bar{A}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar{A}_\beta\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5), \tag{1}$$

где линейные дифференциальные формы ω_α^β удовлетворяют условиям полной интегрируемости системы (1), которые в символике внешних форм имеют вид:

$$D\omega_\alpha^\beta = [\omega_\alpha^\gamma\, \omega_\gamma^\beta]. \tag{2}$$

Дифференциальные уравнения конгруэнции имеют вид:

$$\omega_i^p = \lambda_{ix}^p du^x \quad (i = 1,\ 2;\ p = 3,\ 4,\ 5;\ x,\ x_1,\ x_2 = 1,\ 2,\ 3). \tag{3}$$

Продолжая систему (3) два раза, получим:

$$\begin{aligned} d\lambda_{ix}^p + \cdots &= \lambda_{ixx_1}^p du^{x_1}, \\ d\lambda_{ixx_1}^p + \cdots &= \lambda_{ixx_1x_2}^p du^{x_2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Величины λ_{ix}^p, $\lambda_{ixx_1}^p$, $\lambda_{ixx_1x_2}^p$ являются координатами фундаментального геометрического объекта конгруэнции третьего порядка.

Теорема. Задание поля фундаментального объекта 3 порядка определяет конгруэнцию прямых (l) с точностью до проективного преобразования.

2. Как известно, каждая прямая l конгруэнции несет 3 фокуса — точки пересечения ее с бесконечно-близкими прямыми конгруэнции. Каждый из этих 3 фокусов описывает гиперповерхность, называемую ф о к а л ь н о й. Через каждую прямую l конгруэнции проходит 3 гиперплоскости, касающиеся в фокусе каждой из фокальных гиперповерхностей. Эти 3 фокальных гиперплоскости пересекаются попарно по 3 плоскостям, порождаемых парами касательных t к линиям фокальной сети. Поместив точки A_3, A_4 и A_5 в точки пересечения пар этих касательных t, получим канонический репер конгруэнции. Все вершины, ребра, двумерные грани и грани этого канонического репера являются инвариантными геометрическими образами, связанными с дифференциальной окрестностью 2-го порядка конгруэнции.

3. Согласно введенной автором фокальной классификации семейств подпространств конгруэнции прямых делятся на 4 типа:

1) афокальные, неимеющие двупараметрических фокальных подсемейств;
2) конгруэнции, обладающие одним двупараметрическим фокальным подсемейством;
3) конгруэнции, обладающие двумя двупараметрическими фокальными подсемействами;
4) вполне фокальные конгруэнции, обладающие тремя двупараметрическими фокальными подсемействами. У этого типа все 3 фокальных гиперповерхности являются трижды сопряженными системами, являющимися преобразованиями Лапласа друг из друга.

Если у конгруэнции соответствуют асимптотические многообразия на двух фокальных гиперповерхностях, то она необходимо обладает двумя двупараметрическими фокальными подсемействами, если на всех трех, то она необходимо вполне фокальная.

Из двойственных соображений может быть получена проективная теория трехпараметрического семейства двумерных плоскостей.

П. И. ВАШКАС (Вильнюс)

К ВОПРОСУ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ ПАР КОМПЛЕКСОВ ПРЯМЫХ

Комплекс прямых трехмерного проективного пространства, описываемый ребром $A_1 A_2$ подвижного репера $\{A_i\}$ $(dA_i = \omega_i^j A_j;\ i, j = 1, 2, 3, 4)$, определяется дифференциальными уравнениями

$$\lambda_\alpha^p \omega_p^\alpha = 0, \quad [\nabla\lambda_\alpha^p \omega_p^\alpha] = 0,$$

где

$$\nabla\lambda_\alpha^p \equiv d\lambda_\alpha^p + \lambda_\alpha^q \omega_q^p - \lambda_\beta^p \omega_\alpha^\beta \qquad (p, q, r, s = 1, 2;\ \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon = 3, 4),$$

а комплекс прямых, описываемый ребром $A_4 A_3$, — уравнениями

$$\lambda_p^\alpha \omega_\alpha^p = 0, \quad [\nabla\lambda_p^\alpha \omega_\alpha^p] = 0,$$

где

$$\nabla\lambda_p^\alpha \equiv d\lambda_p^\alpha + \lambda_p^\beta \omega_\beta^\alpha - \lambda_q^\alpha \omega_p^q.$$

Расслоение комплекса $(A_1 A_2)$ в направлении $(A_4 A_3)$ осуществляется при помощи вполне интегрируемого (при любом t) уравнения

$$dt + t(\omega_2^2 - \omega_1^1) - t^2 \omega_2^1 + \omega_1^2 + \frac{1}{\sqrt{|A|}} (\mu_{2222} \lambda_\alpha^2 \omega_1^\alpha + 2\mu_{2221} \lambda_\alpha^1 \omega_1^\alpha - \mu_{2211} \lambda_\alpha^1 \omega_2^\alpha) t^3 +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{|A|}} (\mu_{2221} \lambda_\alpha^2 \omega_1^\alpha + 2\mu_{2211} \lambda_\alpha^1 \omega_1^\alpha - \mu_{2111} \lambda_\alpha^1 \omega_2^\alpha) t +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{|A|}} (\mu_{2211} \lambda_\alpha^2 \omega_1^\alpha + 2\mu_{2111} \lambda_\alpha^1 \omega_1^\alpha - \mu_{1111} \lambda_\alpha^1 \omega_2^\alpha) = 0,$$

а расслоение комплекса $(A_4 A_3)$ в направлении $(A_1 A_2)$ — при помощи вполне интегрируемого уравнения, получаемого из последнего заменой величин $t \leftrightarrow \tau$, $A \leftrightarrow B$ и индексов $1 \leftrightarrow 4$, $2 \leftrightarrow 3$ $(A \equiv \lambda_3^1 \lambda_4^2 - \lambda_3^2 \lambda_4^1 \neq 0,\ B \equiv \lambda_2^4 \lambda_1^3 - \lambda_2^3 \lambda_1^4 \neq 0;\ \mu_{pqrs},\ \mu_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}$ — симметричны по всем индексам).

Соответствующей канонизацией репера линейные уравнения комплексов приводятся к виду:

$$\omega_1^4 + \omega_2^3 = 0, \quad \lambda\omega_4^1 + \omega_3^2 = 0.$$

Доказано, что:

1) при $\lambda \neq \mathrm{const}$ двухсторонне расслояемая пара комплексов существует с произволом трех функций трех аргументов;

2) при $\lambda = \mathrm{const} \neq 1$ — произвол решения — две функции трех аргументов;

3) при $\lambda = 1$ — произвол решения — восемь функций двух аргументов.

ДАДАЖАНОВ НОРМАТ (Киев)

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПАРЫ T_n КОМПЛЕКСОВ

1. В 1948 году М. А. Акивис выделил интересную пару комплексов, которую он назвал парой T. Пара T может быть определена следующим образом: пусть дана пара комплексов G и G' с установленным взаимно однозначным соответствием между их лучами. Каждой точке M луча l комплекса G в главной корреляции соответствует на этом луче определенная плоскость Π. Последняя пересекает луч l' комплекса G' в некоторой точке M'. Плоскость Π', соответствующая в главной корреляции на луче l' в комплексе G' точке M', пересекает луч l в некоторой точке M^*. Соответствие σ точек M и M^* всегда проективно. Пара комплексов G и G' является парой T тогда

и только тогда, когда это соответствие есть тождество (в дальнейшем такую пару будем обозначать буквой T_1).

В настоящем сообщении рассматриваются те случаи пар комплексов, для которых σ является циклическим соответствием (включая сюда и инволюцию — циклическое соответствие второго порядка). Мы будем обозначать такие пары, соответственно, через T_2, T_3, T_4 и т. д., где индекс означает число тоже в цикле. Этим оправдывается обозначение T_1 для пары T, хотя пара T не получается как частный случай в нижеследующих рассмотрениях.

2. Выводится общая формула в проективных координатах для циклического соответствия любого порядка.

3. Отмечаются свойства пары T_n комплексов, в частности:

а) если пара комплексов есть пара T_n ($n\geqslant 2$), то в каждой паре их соответствующих лучей существует пара квадрик, из которых каждая гармонически пересекает один комплекс и дает в пересечении с другим цикл n-го порядка.

б) в каждой паре соответствующих лучей пары комплексов T_n ($n\geqslant 2$) существует пара линейных комплексов, из которых каждый касается одного комплекса пары и образуют в пересечении с другим циклическое соответствие n-го порядка;

в) класс циклических пар комплексов T_n ($n\geqslant 2$) существует с произволом четырех функций трех аргументов.

Л. И. МАГАЗИННИКОВ (Томск)

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЦЕНТРОАФФИННОЙ ТЕОРИИ КОМПЛЕКСОВ ПРЯМЫХ

Деривационные формулы $d\bar{A}_i = \omega_i^k A_k$ построенного репера второго порядка $(O, \bar{A}_i)$ (i, k 1, 2, 3) комплекса $\bar{R} = \bar{A}_1 + v\bar{A}_2$ (O — центр пространства, $\bar{A}_2$ — вектор, лежащий в касательной плоскости цилиндра комплекса) характеризуются следующими дифференциальными уравнеиями:

$$\omega_3^1 = x_1\,\omega_1^2 + (x_2 - 1)\,\omega_3^1 + x_2\,\omega_3^2, \quad \omega_1^1 = \omega_3^3,$$

$$-\omega_1^3 = x_3\,\omega_1^2 + x_4\,\omega_3^1 + x_5\,\omega_3^2,$$

$$-\omega_3^3 + \omega_2^2 = x_3\,\omega_1^2 + x_5\,\omega_3^2 + x_6\,\omega_3^3.$$

Определение 1. Неголономная конгруэнция комплекса, центральные точки [1] всех линейчатых поверхностей которой совпадают, называется уницентральной.

Теорема 1. Все уницентральные неголономные конгруэнции на данном луче комплекса имеют один общий фокус и одну общую фокальную плоскость, совпадающую с плоскостью, определяемой точкой O и лучом комплекса. В построенном репере точка $\bar{A}_1$ есть общий фокус уницентральных неголономных конгруэнций. В качестве координатных приняты следующие неголономные конгруэнции: $\omega_1^2 = 0$ — параболическая уницентральная, $\omega_3^1 = 0$ — бицилиндрическая [2], $\omega_3^2 = 0$ — цилиндрическая уницентральная. В любом комплексе каждая из этих конгруэнций определяется единственным образом.

Теорема 2. Комплекс $x_4 = 0$ характеризуется каждым из следующих свойств: а) конгруэнция $\omega_1^2 = 0$ — голономна; б) точка $\bar{A}_1$ описывает поверхность; в) фокальная поверхность конгруэнции $\omega_3^2 = 0$ вырождается в кривую; г) точка $\bar{A}_1$ является инфлекционным центром. Комплекс $x_4 = 0$ можно построить следующим образом: взять произвольную конгруэнцию и в каждой точке её фокальной поверхности в плоскости, определяемой точкой O и лучом конгруэнции, полученной из данной преобразованием Лапласа с помощью этой фокальной поверхности, провести пучок прямых.

Теорема 3. Комплекс $x_3 = 0$ характеризуется каждым из следующих свойств: а) точка $\bar{A}_1$ совпадает с аффинным центром луча комплекса [2]; б) конгруэнции $\omega_3^2 = 0$ сопряжен цилиндроид, этот цилиндроид является основным [2]; в) аффинная нормаль фокальной поверхности конгруэнции $\omega_3^2 = 0$ лежит в плоскости $(\bar{R}, \bar{A}_1, \bar{A}_3) = 0$. Этот комплекс существует с произволом в две функции двух аргументов. Произвольную пару комплексов, между лучами которых задано взаимно-однозначное соответствие, можно задать в виде:

$$\overline{R} = \overline{B}_1 + v\overline{B}_2, \qquad \overline{R} = m\overline{B}_1 + v\overline{B}_2. \tag{1}$$

где m — некоторая функция, зависящая от главных параметров. Если включим векторы $\overline{B}_1$, $\overline{B}_2$, $\overline{B}_3$ в репер пары комплексов, то элементы центроаффинных длин дуг [1] любых линейчатых поверхностей, проходящих через данный луч этих комплексов, найдутся по формулам:

$$ds_1 = \frac{\omega_1^1 \omega_3^2 - \omega_1^2 \omega_3^1}{\omega_3^2}, \quad ds_2 = \frac{(dlnm + \omega_1^1)\,\omega_2^3 - \omega_1^3 \omega_2^1}{\omega_2^3}.$$

Определение 2. Комплексы (1) (пара неголономных конгруэнций, принадлежащая паре комплексов (1)) называются наложимыми, если элементы центроаффинных длин дуг любых соответствующих линейчатых поверхностей их равны. В общем случае в каждой паре комплексов имеются три пары наложимых неголономных конгруэнций, уравнения которых получаются из условий $ds_1 = ds_2$ в виде

$$\Phi \equiv \omega_2^3 \omega_3^2\, dlnm - \omega_1^3 \omega_2^1 \omega_3^2 + \omega_1^2 \omega_3^1 \omega_2^3 = 0.$$

Если $\Phi \equiv 0$, то имеем пару наложимых комплексов.

Теорема 4. Если комплексы (1) наложимы, то комплекс, описываемый прямыми, проходящими через соответствующие фокусы любой пары соответствующих неголономных конгруэнций, вырождается в связку параллельных прямых и обратно.

Теорема 5. Если комплексы (1) наложимы, то любой цилиндрической неголономной конгруэнции одного соответствует цилиндрическая же конгруэнция другого, уницентральной соответствует уницентральная же и обратно.

Теорема 6. Если один из комплексов пары задать, то наложимый на него комплекс определиться с произволом в пять параметров. Рассмотрены и геометрически охарактеризованы некоторые случаи, когда среди трех пар наложимых неголономных конгруэнций пары комплексов имеются совпадения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mayer O. Ann. Sci. Univ. Jasi, 21 (1934), 1—77.
2. Щербаков Р. Н. Матем. сб., т. 60 (102), № 2 (1963), 131—159.

Л. К. ТУТАЕВ (Минск)

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ТРАЕКТОРИИ ТОЧКИ В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. Известные формулы Френе, соответствующие линии в 4-мерном пространстве Минковского—Лоренца, можно написать в виде:

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\sigma} = \mathbf{e}_1, \quad \frac{d\mathbf{e}_0}{d\sigma} = k_0 \mathbf{e}_2, \quad \frac{d\mathbf{e}}{d\sigma} = k\mathbf{e}_2, \quad \frac{d\mathbf{e}_2}{d\sigma} = -k\mathbf{e}_1 - k_1 \mathbf{e}_3, \quad \frac{d\mathbf{e}_3}{d\sigma} = k_0 \mathbf{e}_0 + k_1 \mathbf{e}_2. \tag{1}$$

Метрическая квадратичная форма:

$$d\sigma^2 = -dx^{0^2} + dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2} = (v^2 - c^2)\, dt^2.$$

2. Формулы для вычисления кривизн линии, заданной вектор-функцией $\mathbf{A}(\sigma)$ натурального параметра σ:

$$k^2 = \overset{2}{A^{(2)}}, \quad k_1^2 = \frac{\overset{2}{A^{(3)}}}{\overset{2}{A^{(2)}}} - \frac{(A^{(2)} A^{(3)})^2}{\overset{4}{A^{(2)}}} - \overset{2}{A^{(2)}}, \quad k_0 = \frac{|A^{(1)}\ A^{(2)}\ A^{(3)}\ A^{(4)}|}{k^3 k_1^2} \left(A^{(m)} = \frac{d^m A}{d\sigma^m}\right). \tag{2}$$

3. Кривизны k, k_1, k_0 линии можно геометрически истолковать, например, так. Уравнения характеристики семейства гиперплоскостей $\{\mathbf{A}\,\mathbf{e}_0\,\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3\}$ линии относительно канонического репера $(A\,\mathbf{e}_0\,\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3)$:

$$x^1 = 0, \quad 1 - kx^2 = 0;$$

— характеристики семейства гиперплоскостей $\{A\,\mathbf{e}_0\,\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_3\}$:

$$x^2 = 0, \quad kx^1 + k_1 x^3 = 0;$$

— характеристики семейства гиперплоскостей $\{\mathbf{A}\,\mathbf{e}_0\,\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\}$:

$$x^3 = 0, \quad k_0 x^0 - k_1 x^2 = 0.$$

4. Если $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$, $\dot{\mathbf{w}} = \dfrac{d\mathbf{w}}{dt}$, $\ddot{\mathbf{w}} = \dfrac{d\dot{\mathbf{w}}}{dt}$ — векторы скорости и первых трёх ускорений в евклидовом пространстве-подпространстве 4-мерного пространства Минковского—Лоренца, то формулы (2) для вычисления кривизн соответствующей траектории:

$$k^2 = \frac{(\mathbf{v}\times\mathbf{w})^2 - c^2\mathbf{w}^2}{(v^2 - c^2)^3}, \quad k_1^2 = \frac{(v^2 - c^2)\,(\mathbf{w}\times\dot{\mathbf{w}})^2 - \left(\mathbf{v}\times(\mathbf{w}\times\dot{\mathbf{w}})\right)^2}{\left((v\times w)^2 - c^2 w^2\right)^2}, \quad k_0 = \frac{c\,|\,\mathbf{w}\,\dot{\mathbf{w}}\,\ddot{\mathbf{w}}\,|}{k^3 k_1^2 (v^2 - c^2)^5}. \tag{3}$$

$(\times)$—знак векторного умножения.

5. В соответствии с основным релятивистским законом динамики

$$m_0 c^2 \frac{d^2\mathbf{A}}{d\sigma^2} = \mathbf{F}$$

($\mathbf{F}$ — 4-мерный вектор силы Минковского), траектория частицы с массой m_0, движущейся под действием силы $\mathbf{F}$, будет с кривизнами

$$k^2 = \frac{\mathbf{F}^2}{m_0^2 c^4}, \quad k_1 = \frac{\mathbf{F}^{(1)2}}{\mathbf{F}^2} - \frac{\mathbf{F}^2}{m_0^2 c^4} - \frac{\left(\mathbf{F}\,\mathbf{F}^{(1)}\right)^2}{\mathbf{F}^4}, \quad k_0 = \frac{|\,\mathbf{e}_1\,\mathbf{F}\,\mathbf{F}^{(1)}\,\mathbf{F}^{(2)}\,|}{m_0^2 c^4 k^2 k_1^2}. \tag{4}$$

6. Если сила образована электромагнитным полем в евклидовом трехмерном пространстве, действующим на заряд с заданной плотностью, и соответствует 4-мерной силы Лоренца

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi}\,\varphi^{\mu\rho}\,j_\rho\,e_\mu$$

($[\varphi_{\mu\rho}]$ — известная матрица, составленная из компонент векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ электрического и магнитного полей, j_μ — вектор тока), то указанной траектории частицы и её натуральным уравнениям

$$k = k(\sigma), \quad k_1 = k_1(\sigma), \quad k_0 = k_0(\sigma)$$

должно соответствовать поле, удовлетворяющее конечным уравнениям

$$m_0 c^2 k = \mathbf{F}^1, \quad \mathbf{F}^0 = 0, \quad \mathbf{F}^3 = 0$$

и последним двум дифференциальным уравнениям системы (4).

В. С. МАЛАХОВСКИЙ (Томск)

КОМПЛЕКСЫ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. При исследовании комплексов кривых второго порядка пространства P_3 целесообразно классифицировать их по числу параметров, от которых зависит семейство плоскостей, содержащих все коники комплекса.

2. Канонический репер наиболее общего комплекса коник, принадлежащего трехпараметрическому семейству плоскостей, строится следующим образом: три вершины A_1, A_2, A_3 репера помещаются в t — фокальные точки коники (см. [1]), а четвертая вершина A_4

является общей точкой трех плоскостей π_α, соответствующих точкам A_α ($\alpha=1, 2, 3$) и точкам M_α пересечения касательной коники в A_α с прямой $A_{\alpha+1}A_{\alpha+2}$ (сравнение по mod 3) так, что если смещение точки M_α происходит в плоскости коники, то соответствующее смещение точки A_α лежит в плоскости π_α.

Используя образы, описываемые вершинами, ребрами и гранями канонического тетраэдра при наличии одной или двух линейных зависимостей на первичные формы, устанавливаем некоторые общие закономерности и выделяем различные классы комплексов коник.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Малаховский. Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. (Печатается в этом номере.)

Д. К. ПЕТРУШКЕВИЧУТЕ (Вильнюс)

ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ ПРОСТРАНСТВА K_7

Рассматривается конкретное однородное пространство $K_7=G_{10}/g$, с образующим элементом — пространственной кривой третьего порядка κ^3 (g — ее стационарная подгруппа) и с группой преобразований G_{10}, оставляющей инвариантным линейный комплекс, присоединенный к κ^3.

Цель работы определить все вполне геодезические семейства кривых K^3 этого пространства. Для этого находится все классы эквивалентных подгрупп группы G_{10} и выделяются среди них нормальные [1], [2]. Приходим к следующим типам вполне геодезических многообразий (индексы внизу указывают размерность многообразия):

A_4 — совокупность кривых κ^3, имеющих общую точку A и общую касательную l в т. A; их соприкасающиеся конические сечения имеют в т. A касание первого порядка.

B_3 — совокупность кривых κ^3, имеющих общую точку A и общую касательную l в т. A; их соприкасающиеся конические сечения имеют в т. A касание второго порядка.

C_3 — совокупность кривых κ^3, каждая из которых пересекает прямую l в двух точках; касательные к ним, проведенные в точках пересечения, пересекаются соответственно в двух точках A_1 и A_2.

D_3 — совокупность кривых κ^3, которые пересекают две прямые l_1 и l_2 таким образом, что проведенная в точке пересечения кривой κ^3 с прямой l_1 касательная к κ^3 пересекает прямую l_2 и наоборот, т. е. в точке пересечения кривой κ^3 с прямой l_2 проведенная касательная пересекает l_1.

E_3 — совокупность кривых κ^3, пересекающих прямую l_1 в точке A; их общая касательная l в т. A пересекает все соприкасающиеся плоскости кривых κ^3, проведенные в точках пересечения кривых с плоскостью p, проходящей через l и l_1, в одной точке; касательные к ним, проведенные в точках пересечения кривых κ^3 с плоскостью p и лежащие в соответствующих соприкасающихся плоскостях, пересекают прямую l_1; соприкасающиеся конические сечения кривых κ^3 в т. A имеют касание первого порядка.

F_2 — совокупность кривых κ^3, имеющих общую точку A и общую касательную l в точке A, пересекающих инвариантную прямую l, проходящую через т. A таким образом, что в точках пересечения проведенные касательные к кривым κ^3 пересекаются в одной точке A_1.

G_2 — совокупность кривых κ^3, пересекающих две прямые l_1 и l_2; прямую l_1 они пересекают в точке A, а их общая касательная l в т. A, пересекает прямую l_2; в точках пересечения кривых κ^3 с прямой l_2 проведенные касательные пересекают прямую l_1.

H_2 — семейство кривых κ^3, соприкасающиеся конические сечения которых в т. A имеют касание третьего порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Васильев. Об одном классе аффинных связностей в однородном пространстве. Известия высших учеб. завед., Мат. N 2(9), 41, 1959.
2. А. М. Васильев. C' — связности в однородных пространствах и их вполне геодезические подмногообразия, ДАН СССР, Т. 140, N 2, 281—284, 1961.

Т. А. ШУЛЬМАН (Москва)

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ СЕТЯХ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрены сети, инвариантно связанные с гиперповерхностью в четырехмерном пространстве. Как известно, в каждой точке гиперповерхности имеется конус асимптотических направлений (1-го порядка), и к каждому направлению можно найти ∞^1 сопряженных направлений (1-го порядка). Можно показать, что в каждой точке гиперповерхности в четырехмерном пространстве имеется в общем случае шесть асимптотических направлений второго порядка, то есть таких направлений, вдоль которых соприкасающаяся гиперплоскость совпадает с касательной гиперплоскостью к гиперповерхности.

Доказаны теоремы существования и найдены геометрические характеристики гиперповерхностей, несущих одно, два или три семейства двойных асимптотических линий второго порядка. Введено понятие о тройках сопряженных направлений второго порядка. Эти направления обладают тем свойством, что все вершины бесконечно малого параллелепипеда, построенного на них, лежат в касательной гиперплоскости. Показано, что они обращают в нуль полярные формы от асимптотической формы первого порядка и введенной асимптотической формы второго порядка. Некоторые результаты возможно обобщить на случай гиперповерхности в n-мерном пространстве.

В. В. ГОЛЬДБЕРГ (Ярославль)

О НЕКОТОРЫХ ПАРАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЛАПЛАСА

Су Буцин рассматривал [1] пару находящихся в точечном соответствии, сохраняющем фокальные сети, последовательностей Лапласа, для которых соответствующие плоскости (одного и того же числа измерений), натянутые на последовательные вершины этих последовательностей, пересекаются в точке. Если эти две последовательности совпадают в одну, то получаются рассмотренные нами ранее последовательности L [2]. В докладе предполагается рассмотреть пары последовательностей Лапласа, для которых соответствующие плоскости (не обязательно одного и того же числа измерений, лишь бы сумма их размерностей была на единицу меньше размерности пространства) пересекаются в точке. Как частные случаи из таких пар можно получить пары Су Буцина, последовательности L и P, рассмотренные нами ранее [2], [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Su Buchin. Contribution to the theory of conjugate nets in projective hyperspace, IV, Scientia sinica, 1962, II, N 4, 457—468.
2. В. В. Гольдберг. Сети L и последовательности L N-мерного проективного пространства, ДАН СССР, 134, 4 (1960), 757—760.
3. В. В. Гольдберг. Последовательности Лапласа из обобщенных сопряженных сетей Розе N-мерного проективного пространства, ДАН СССР, 149, 2р, 2 (1963), 237—240.

М. Б. ПЕРТАМЕНЩИКОВ (Томск)

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЕГОРОВА В ТЕОРИИ КОНГРУЭНЦИЙ

Пусть конгруэнция $\{A_1A_2\}$ отнесена к полуканоническому реперу, построенному в работе [1]. Рассматривая эту конгруэнцию как однопараметрическое семейство линейчатых поверхностей, подвергнем каждую из них проективному преобразованию. Полученное таким образом двумерное многообразие прямых называется преобразованием Егорова конгруэнции $\{A_1A_2\}$. Сохраняя обозначения и терминологию, принятые в [1], и, обозначив $P(A_i)=P_i$ (1, 2, 3, 4), потребуем, чтобы конгруэнции $\{P_1P_2\}$ и $\{P_3P_4\}$ образовывали пару T Финикова. Тогда

$$\begin{gathered}\alpha_4^1=\alpha_3^2=\alpha_3^1-\alpha_4^2=0,\\ \alpha_3^2R_6+R_{14}=0,\qquad \alpha_3^1R_1+R_{12}=0,\\ R_{11}+R_{15}+\alpha_3^1(R_2+R_5)=0.\end{gathered}\tag{2}$$

Соотношения (1) характеризуют конгруэнции H. Дифференцирование уравнений (2) приводит к соотношениям, дифференцирование которых приводит к тождествам. Следовательно, преобразование Егорова, переводящее пару H (см. [2]) в пару T, может быть осуществлено с помощью произвольного подмногообразия пары $\{A_1A_2\}$ и $\{A_3A_4\}$.

Если же конгруэнции $\{P_1P_2\}$ и $\{P_3P_4\}$ образуют пару P (см. [2]), то

$$\begin{gathered}\alpha_3^1R_6+R_{14}=\alpha_3^1R_1+R_{12}=0,\\ R_{11}+R_{15}+\alpha_3^1(R_2+R_5)=0,\\ R_6(R_{11}+\alpha_3^1R_5)=R_1(R_{11}+\alpha_3^1R_5)=0,\\ R_2R_{11}-R_5R_{15}=0.\end{gathered}$$

Возможны следующие три случая:

1. $R_1=R_6=0,\qquad R_{11}+\alpha_3^1R_5\neq0;$
2. $R_{11}+\alpha_3^1R_5=0,\qquad R_1R_6\neq0;$
3. $R_1=R_6=R_{11}+\alpha_3^1R_5=0.$

Первый случай приходится исключить из рассмотрения, ибо конгруэнция $\{P_1P_2\}$ вырождается в линейчатую поверхность. Во втором случае преобразование Егорова осуществляется с помощью произвольного подмногообразия исходной пары. В третьем случае выделяется класс пар линейчатых поверхностей, с помощью которых можно осуществить преобразование Егорова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Н. Щербаков. Проективная теория репера линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруэнции, Матем. сб., 46 (88): 2, стр. 159–194, 1958.
2. М. Б. Пергаменщиков. Ещё о парах конгруэнций H, Геометрический сборник (вып. I), издат. ТГУ, стр. 39–44, 1962.

Н. Г. БЕЛЯЕВ (Черновцы)

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРОИЗВОДНОЙ В ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО И СЛЕДСТВИЯ

Если кривая в плоскости Лобачевского задана уравнением $y=f(x)$, где x, y—прямоугольные координаты и f—непрерывная функция, то

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{ch}\frac{y}{r}\operatorname{tg}\alpha.\tag{1}$$

т. е. производная в геометрии Лобачевского равна гиперболическому косинусу ординаты точки касания, умноженной на тангенс угла, образованного касательной к кривой с касательной в этой точке к эквидистанте с базисом по оси x и высотой, равной ординате точки касания.

Рассмотрены кривые с постоянной длиной нормали, с постоянной длиной касательной, с постоянной длиной поднормали.

Найдя, что угол τ между радиусом вектором и касательной выражается формулой

$$\operatorname{tg}\tau=\frac{\operatorname{sh}\rho}{\rho},$$

и выразив через гиперболические функции отрезки касательной, подкасательной, нормали и поднормали в полярных координатах, находим уравнения логарифмической спирали, спирали Архимеда, гиперболической спирали плоскости Лобачевского. Некоторые из них можно также получить используя производную—её геометрический смысл, как изогональные траектории некоторого семейства линий.

Исходя из предложенного геометрического истолкования производной, можно указать простой способ получения формулы кривизны по касательной в прямоугольных координатах

$$K_t=\frac{{}^{3}d\Theta}{ds}=\left|\frac{(\operatorname{ch}^2 y+2y'^2)\operatorname{ch} y-\operatorname{ch} y\cdot y''}{(y'^2-\operatorname{ch}^2 y)^{\frac{3}{2}}}\right|,$$

где $d\Theta$—угол между бесконечно-близкими касательными к кривой. Определив, затем, кривизну по нормали как предел отношения, т. е.

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\psi}{\Delta s}=k_n,$$

где $\Delta\psi$—угол между бесконечно близкими нормалями, для случая сходящихся нормалей, будем иметь:

$$k_n=\sqrt{K_t^2-1},$$

а для случая расходящихся нормалей кривизна по нормали принимает мнимое значение

$$\tilde{k}_n=ik_n.$$

Если ввести в рассмотрение $\Delta\mu$—длину общего перпендикуляра, расходящихся нормалей которую, следуя Киллингу и Либману, считаем мнимым углом, то кривизну по нормали в этом случае определим как

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\mu}{\Delta s}=\tilde{k}_n.$$

Далее, производя исчисления с точностью до бесконечно малых второго порядка, получим

$$\tilde{k}_n=\sqrt{1-k_t^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Смогоржевский. Основы геометрии, изд. „Радяньска школа“, 1954.
2. Д. Д. Мордухай-Болтовской. О кривизне плоских кривых в пространстве Лобачевского. Мат. сборник, Киев, Университет, 1951.
3. В. Ф. Каган. Основания геометрии, ГИЗ, Москва, 1949.
4. П. К. Рашевский. Курс дифференциальной геометрии, Москва, ГИЗ, 1959.
5. Н. Г. Беляев, Трактрисса и псевдосфера в пространстве Лобачевского, Доклады АН УССР, 1951.
6. Н. Г. Беляев. Формулы кривизны по касательной в плоскости Лобачевского, „Научный ежегодник“ Черновицкого Университета, 1958.

Е. Т. ИВЛЕВ (Томск)

О НЕКОТОРЫХ ЭКВИАФФИННО-ИНВАРИАНТНЫХ КЛАССАХ ПАР НЕГОЛОНОМНЫХ КОНГРУЭНЦИЙ И ПАР КОМПЛЕКСОВ

Отнесем пару комплексов, описываемую лучами k_1 и k_2, параллельными векторами $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, к полуканоническому реперу, который является каноническим репером произвольного подмногообразия — пары неголономных конгруэнций $\omega^3=0$. Начало этого репера поместим в точку **A**, удовлетворящую двум условиям: 1) она является серединой отрезка $\Pi_1\Pi_2$, где Π_1 и Π_2 суть точки пересечения прямой $\Pi_1\Pi_2$ с лучами k_1 и k_2, соответственно, 2) при смещении по подмногообразию $\omega^3=0$, она описывает неголономную поверхность с касательной плоскостью, параллельной векторам $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$. Вектор $\bar{e}_3$ выбирается так, что $\bar{e}_3=\overline{\Pi}_1-\bar{A}=\overline{\Pi}_2+\bar{A}$. Векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ нормированы так, что вектор $\bar{e}_1-\bar{e}_2$ параллелен характеристике плоскости $(\bar{R}-\bar{A}, \bar{e}_1\, \bar{e}_2)=0$ при смещении вдоль непараболической пары линейчатых поверхностей данной пары комплексов, у которой точки Π_1 и Π_2 суть квазифлекнодальные точки [1]. Пара $\omega^3=0$ называется парой p неголономных конгруэнций данной пары комплексов, если точки Π_1 и Π_2 суть фокусы лучей k_1 и k_2. Пара p характеризуется также тем, что точки Π_1 и Π_2 суть основные точки [2] лучей k_1 и k_2 любой её пары линейчатых поверхностей. Парой q_α $(\alpha=1, 2)$ неголономных конгруэнций данной пары комплексов называется пара, у которой точка $\Pi_{\alpha'}$ $(\alpha'\neq\alpha, \alpha'=1, 2)$ луча $k_{\alpha'}$ является главной точкой [2] любой её пары линейчатых поверхностей. Точка Π_α является серединой отрезка, соединяющего собственный фокус неголономной конгруэнции (k_α) пары q_α и точку, в которой плоскость, соответствующая в главной корреляции [3] комплекса (k_α), проходит через точку $\Pi_{\alpha'}$. Пара r неголономных конгруэнций характеризуется тем, что обе её неголономные конгруэнции (k_1) и (k_2) суть цилиндрические. Пара комплексов, у которой пара p неголономных конгруэнций является парой r, определяется с произволом в три функции трех аргументов и характеризуется тем, что она является парой K [4] с несобственными основными точками [4]. Пара комплексов, у которой пара p является одновременно парой q_1 и q_2 неголономных конгруэнций, определяется с произволом в две функции трех аргументов и характеризуется тем, что основные и главные точки [2] лучей k_1 и k_2 всех её пар линейчатых поверхностей совпадают с точками Π_1 и Π_2. Пара p неголономных конгруэнций этой пары комплексов является парой r неголономных конгруэнций. Пара B комплексов характеризуется тем, что через каждую пару соответствующих лучей проходит по крайней мере одна пара B неголономных конгруэнций (пара B неголономных конгруэнций определяется также, как и в голономном случае [2]). Парой B_0 комплексов называется пара, любая пара неголономных конгруэнций которой есть пара B. Пара B_0 характеризуется также тем, что характеристика плоскости $(\bar{R}-\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2)=0$ при смещении по любой её паре линейчатых поверхностей параллельна одному и тому же вектору $\bar{e}_1-\bar{e}_2$. Каждая из пар B и B_0 комплексов определяется с произволом в четыре функции трех аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Т. Ивлев. Доклады научн. конф. по прикладным и теор. вопросам матем. и мех., Томск, 1960, 50–51.
2. Е. Т. Ивлев, Р. А. Резниченко, Г. В. Горбанева. Доклады второй сибирской конф. по матем. и мех., Томск, 1962, 84–85.
3. Р. Н. Щербаков. Доклады научн. конф. по прикл. и теор. вопросам матем. и мех., Томск, 1960, 82–83.
4. Е. Т. Ивлев. Доклады второй сибирской конф. по матем. и мех., Томск, 1962, 83–84.

А. В. ГОХМАН (Саратов)

К ГЕОМЕТРИИ СТАТИКИ ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ

Устанавливается аналогия между равновесием тонкого стержня с переменными жесткостями и переменной внешней распределенной моментной нагрузкой и движением точки единичной массы в четырехмерном квази-реономном пространстве, слоями которого являются обобщенные пространства Эйлера. При этом под квази-реономным пространством понимается пространство X_4, расслоенное с помощью отображения на евклидову ориентированную прямую, причем слои снабжены римановой метрикой и оснащены. Обобщенное пространство Эйлера есть трехмерное риманово пространство специального вида, являющееся обобщением пространства конфигураций твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки в случае Эйлера.

Указанное квази-реономное пространство может служить также для геометрической интерпретации движения твердого тела с переменной массой.

В. И. КОРОВИН (Москва)

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ РАССЛОЯЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

1. Определение циклических расслояемых многообразий.
2. Некоторые классы циклических расслояемых многообразий в пятимерном проективном пространстве P.
3. Преобразование Лапласа циклических расслояемых многообразий.
4. Преобразование T двупараметрических семейств прямых при помощи демиквадрик.
5. Два преобразования T циклических расслояемых многообразий с одной общей конгруэнцией в пространстве P.
6. Два преобразования T циклических расслояемых многообразий с двумя общими конгруэнциями в пространстве P.
7. Преобразования T с помощью октаэдров в P.
8. Вписанные последовательности циклических расслояемых многообразий.

Д. Е. РУСКОЛ (Калининград)

СТРУКТУРА КОВАРИАНТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ СИММЕТРИЧЕСКОГО ТЕНЗОРА В ДВУМЕРНОМ РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

1. В двумерном римановом многообразии с метрическим тензором g_{ij} рассмотрим произвольный симметрический тензор b_{ij}, не коллинеарный метрическому. Пусть

$$2H=g^{\alpha\beta}\, b_{\alpha\beta};\quad 2K=\varepsilon^{\alpha\alpha_1}\,\varepsilon^{\beta\beta_1}\, b_{\alpha\beta}\, b_{\alpha_1\beta_1} \tag{1}$$

$$c_{ij}=[gb]_{ij}=\varepsilon_{(i}^{\cdot\alpha}\, b_{j)\alpha},\quad \varepsilon_{ij}=-\varepsilon_{ji},\quad \varepsilon_{12}=-\varepsilon_{21}. \tag{2}$$

2. Тензоры g_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, линейно независимы. Ковариантную производную тензора b_{ij} разложим по трем указанным тензорам (см. [1]):

$$b_{ij/\lambda}=a_\lambda\, g_{ij}+b_\lambda\, b_{ij}+c_\lambda c_{ij}. \tag{3}$$

Первые два ковектора разложения имеют следующий вид:

$$a_\lambda=\frac{1}{2}\,(H^2-K)^{-1}\,(HK_\lambda-2KH_\lambda),\quad b_\lambda=\frac{1}{2}\,\partial_\lambda \ln(H^2-K), \tag{4}$$

где H_λ, K_λ — соответствующие частные производные.

Ковектор b_λ всегда градиентен. Градиентность a_λ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы между H и K существовала функциональная зависимость. Если g_{ij}, b_{ij} — соответственно пёрвый и второй тензоры поверхности, то градиентность a_λ означает, что поверхность вейнгартенова.

Обращение в нуль ковектора a_λ необходимо и достаточно для того, чтобы между H и K существовала зависимость:

$$H^2 K^{-1}=\mathrm{const}.$$

3. Положим

$$d_{ij}=\varepsilon_{(i}^{\cdot\alpha}\, c_{j)\alpha}=\varepsilon_{i}^{\cdot\alpha}\, c_{j\alpha}. \tag{5}$$

Оказывается, что

$$c_{ij|\lambda}=b_\lambda c_{ij}+c_\lambda d_{ij} \tag{6}$$

$$d_{ij|\lambda}=b_\lambda d_{ij}-c_\lambda c_{ij}, \tag{7}$$

где b_λ и c_λ имеют те же значения, что и в формуле (3).

4. Геометрический смысл ковектора c_λ состоит в том, что он получается поворотом чебышевского вектора τ_λ сети, определяемой тензором c_{ij}, на угол в $+90°$.

5. Чтобы тензор b_{ij} удовлетворял уравнению Кодацци, необходимо и достаточно, чтобы ковектор c_λ имел следующий вид:

$$C_\lambda=\frac{1}{2}\,(H^2-K)^{-1}\,(\varepsilon_\lambda^{\cdot\alpha} K_\alpha-2\varepsilon^{\alpha\beta}\,b_{\alpha\lambda}\,H_\beta). \tag{8}$$

6. С помощью (3) и (6) нетрудно решается задача об определении минимальной поверхности заданием 2-го и 4-го основных тензоров. Именно, имеет место теорема: если тензоры b_{ij} и c_{ij} удовлетворяют условиям $b=c<0$, $\tilde{c}^{\alpha\beta}\,b_{\alpha\beta}=0$, а связности, порожденные тензорами b_{ij} и c_{ij} к тому же евклидовы, то ими определяется множество минимальных поверхностей, для которых b_{ij} и c_{ij} являются соответственно вторыми и четвертыми тензорами, а метрические тензоры этих поверхностей имеют вид:

$$g_{ij}=\frac{1}{\lambda}\,\eta^{\alpha\beta}\,c_{\alpha i}\,b_{\beta j}, \tag{9}$$

где

$$\eta^{\alpha\beta}=-\eta^{\beta\alpha},\ \eta^{12}=(-c)^{-\frac{1}{2}}; \tag{10}$$

а λ определяется из дифференциального уравнения

$$\lambda=\eta^{j\alpha}\,\tilde{c}^{i\beta}\,b_{\alpha\beta}\,\overset{b}{\nabla}_j\,\omega_i,\quad \omega_i=\frac{1}{2}\,\partial_i \ln(\lambda), \tag{11}$$

т. е. минимальные поверхности с заданными вторым и четвертым тензорами находятся в конформном соответствии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рускол Д. Е. К вопросу определения поверхности в трехмерном евклидовом пространстве заданием метрики и средней кривизны. „Труды семинара по векторному и тензорному анализу", вып. XII, 1963, 355—365.
2. Г. В. Бушманова и А. П. Нордон. Об инвариантах сетей в метрических пространствах. „Ученые записки" Казанского университета, т. III, кн. 8, 1951, 5—12.

В. А. МАНЕВИЧ (Москва)

ОБОБЩЁННАЯ ПРОБЛЕМА А. КЕЛИ

В настоящей работе решены следующие задачи:

Задача 1. Даны два тетраэдра $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ и два конических сечения α^2 и α_1^2. В гранях ABC и $A_1B_1C_1$ найти такие точки P и P_1, что связки $P(ABCD\alpha^2)$ и $P_1(A_1B_1C_1D_1\alpha_1^2)$ коллинеарны. Для нахождения точек P и P_1 нужно найти такие точки X и X_1, что

$$\alpha\,(a,\ \alpha^2,\ XZ,\ XK,\ XM)\,\overline{\wedge}\,\alpha_1\,(a_1,\ \alpha_1^2,\ X_1Z_1,\ X_1K_1,\ X_1M_1),$$

где α и α_1 — плоскости, в которых лежат кривые α^2 и α_1^2.

$$a\equiv\alpha\ \text{Лпп.}\ ABC,\quad a_1\equiv\alpha_1\ \text{Лпп.}\ A_1B_1C_1.\quad DA,\ DB,\ DC$$

пересекают плоскость α соответственно в точках Z, K, M. D_1A_1, D_1B_1, D_1C_1 пересекают α_1 соответственно в точках Z_1, K_1, M_1. Имеется 12 пар искомых точек X и X_1.

Задача 2. Пусть имеются данные задачи 1. Обозначим плоскости, в которых лежат конические сечения α^2 и α_1^2 соответственно через α и α_1. Определить геометрические места точек P и P_1 в плоскостях α и α_1, для которых справедливо $P(ABCD\alpha^2)\overline{\wedge}P_1(A_1B_1C_1D_1\alpha_1^2)$. Этот проективитет будем понимать в том смысле, что касательные к α^2 из P должны соответствовать касательным из P_1 к α_1^2. Решение этой задачи основано на обобщённом Р. Штурмом принципе многозначных соответствий Хаслеса: пусть в плоскости даны два поля Σ и Σ_1.

Каждой точке от Σn_1 точек в Σ_1 соответствует. Каждой точке от $\Sigma_1 n$ точек в Σ соответствует. На двух данных прямых из Σ и Σ_1 лежат m пар соответствённых точек. В таком соответствии существует $n+n_1+m$ коинцидентных точек. В плоскостях α и α_1 имеется 24 пары соответственных точек P и P_1. Рассматривается частный случай задачи 2, когда тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$ вырождается в плоский четырёхугольник. В этом случае единственной точке P плоскости α соответствуют 4 точки P_i в плоскости α_1.

Задача 3. Имеются данные задачи 1, причём, α^2 проходит через точки A, B, C, а α_1^2 через точки A_1, B_1, C_1. Определить геометрические места точек P и P_1, для которых

$$P(AB\,CD\,\alpha^2)\overline{\overline{\lambda}}P(A_1B_1\,C_1D_1\,\alpha_1^2).$$

Задача 4. При данных задачи 1 и требовании задачи 3 рассматривается тот случай, когда α^2 и α_1^2 проходят соответственно через точки

$$A,\ B \quad \text{и} \quad A_1,\ B_1.$$

Искомыми геометрическими местами являются пары соответственных плоскостей пучков, находящихся в [8, 8]-значном соответствии. Причём, между соответственными плоскостями устанавливается взаимно-однозначное соответствие второй степени.

А. ЗАЙЦ (Польша)

КОМИТАНТЫ ТЕНЗОРОВ ВТОРОЙ ВАЛЕНТНОСТИ

Рассматривается следующая задача: для заданного несимметрического тензора $a_{\lambda\mu}$ (λ, $\mu=1, \ldots, n$) найти полные системы комитантов, являющиеся а) инвариантами и б) тензорами второй валентности $\omega_{\lambda\mu}$, ω_{μ}^{λ}, $\omega^{\lambda\mu}$ соответственно ковариантными, смешанными и контравариантными. Частичные результаты были получены в работах Голомба, Икеды Абе и Леройа.

Эта задача охватывается более широкой задачей определения таких же комитантов пары тензоров $h_{\lambda\mu}$, $k_{\lambda\mu}$, каждый из которых либо симметрический, либо кососимметрический.

Рассмотрим пучок тензоров

$$h_{\alpha\beta}+\lambda k_{\alpha\beta}, \tag{1}$$

который будем называть соответственно вырожденным или регулярным в зависимости от того, обращается ли детерминант

$$|h_{\alpha\beta}+\lambda k_{\alpha\beta}|$$

тождественно в нуль или нет.

В случае регулярного пучка полная система инвариантов состоит из:

1) элементарных делителей пучка матриц $\|h_{\alpha\beta}\|+\lambda\|k_{\alpha\beta}\|$;

2) „частичных сигнатур“ клеток канонического вида этого пучка (точное определение дано в работе автора: Komitanten der Tensoren zweiter Ordnung, в печати).

В случае вырожденного пучка к инвариантам 1 и 2 добавляются еще минимальные индексы матричного пучка $\|h_{\alpha\beta}+\lambda k_{\alpha\beta}\|$.

Если пучок (1) регулярный, то существуют два разных значения λ_0, λ_1 параметра λ такие, что тензоры

$$a_{\alpha\beta}\stackrel{\text{def}}{=}h_{\alpha\beta}+\lambda_0 k_{\alpha\beta}, \qquad b_{\alpha\beta}\stackrel{\text{def}}{=}h_{\alpha\beta}+\lambda_1 k_{\alpha\beta}$$

невырождены. Можно построить обратный тензор $b^{\alpha\beta}$ (контравариантный), а затем смешанный тензор

$$s_{\beta}^{\alpha}\stackrel{\text{def}}{=}b^{\alpha\rho}\,a_{\rho\beta}.$$

Положим

$$\underset{(1)}{s}{}_{\beta}^{\alpha}=s_{\beta}^{\alpha}, \quad \underset{(k)}{s}{}_{\rho}^{\alpha}=s_{\beta}^{\alpha_1}\,s_{\alpha_1}^{\alpha_2}\ldots s_{\alpha_{k-1}}^{\alpha} \qquad (k=2, \ldots, N).$$

Полные системы искомых тензорных комитантов пары $(h_{\lambda\mu}, k_{\lambda\mu})$ имеют вид:

$$1)\quad \delta^{\alpha}_{\beta},\ \underset{(1)}{s}{}^{\alpha}_{\beta},\ \ldots,\ \underset{(N-1)}{s}{}^{\alpha}_{\beta};$$

$$2)\quad a_{\alpha\beta},\ a_{\alpha\rho}\underset{(1)}{s}{}^{\rho}_{\beta},\ \ldots,\ a_{\alpha\rho}\underset{(N-1)}{s}{}^{\rho}_{\beta};$$

$$3)\quad b^{\alpha\beta},\ b^{\alpha\rho}\underset{(1)}{s}{}^{\beta}_{\rho},\ \ldots,\ b^{\alpha\rho}\underset{(N-1)}{s}{}^{\beta}_{\rho};$$

где N равно степени минимального многочлена матрицы $\| s^{\alpha}_{\beta} \|$.

В случае вырожденного пучка, кроме линейных комбинаций тензоров $h_{\lambda\mu}$, $k_{\lambda\mu}$, никаких других ковариантных тензоров $\omega_{\lambda\mu}$ нет. Не существуют также нетривиальные смешанные или контравариантные тензоры ω^{λ}_{μ}, $\omega^{\lambda\mu}$ — комитанты пары $(h_{\lambda\mu}, k_{\lambda\mu})$.

РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ ПРИБАЛТИЙСКОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПО ВОПРОСАМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

(14 июня — 18 июня 1963 г.)

(принято на заключительном пленарном заседании конференции 18 июня 1963 г.)

Первая Прибалтийская геометрическая конференция по вопросам дифференциальной геометрии состоялась при Вильнюсском Государственном Педагогическом Институте с 14 по 18 июня 1963 г. Пленарные и секционные заседания происходили в гор. Тракай (25 км от Вильнюса).

В работе конференции приняло участие 72 геометра из 22 городов Советского Союза, в том числе 15 из Вильнюса, 8 из Москвы, 8 из Саратова, 6 из Харькова, 5 из Горького, 5 из Минска, 5 из Тарту, 2 из Риги, 2 из Пензы, а также геометры из Еревана, Томска, Иванова, Смоленска, Коломны, Житомира, Одессы, Фрунзе, Калининграда, Ярославля, Черновиц. Кроме того, в работе конференции участвовали проф. Артур Моор из Венгрии и доктор физико-математических наук Андрей Зайц из Польши.

Среди участников конференции было 13 профессоров и докторов физико-математических наук, 36 доцентов и кандидатов физико-математических наук и 23 научных сотрудников, преподавателей вузов и аспирантов.

Конференция работала по следующему плану. Было проведено четыре пленарных заседания, на которых выступило 14 докладчиков (А. П. Норден, Ю. Г. Лумисте, В. С. Малаховский, Г. Ф. Лаптев, А. Моор, В. И. Ведерников, Р. М. Гейдельман, Н. И. Кованцов, В. И. Близникас, С. Е. Карапетян, И. П. Егоров, Н. И. Кабанов, Я. П. Бланк, Л. Т. Моторный). Кроме того работали три секции, на которых было поставлено 59 докладов.

Геометры Прибалтийских республик выступили на конференции с 16 докладами.

На конференции не было докладов по геометрии в целом и это большой недостаток конференции.

Конференция отмечает, что:

1. Первая Прибалтийская геометрическая конференция по вопросам дифференциальной геометрии приняла характер Всесоюзной конференции с точки зрения представленных на ней геометрических школ и геометрических центров.

2. Дифференциальная геометрия широко развивается в Советском Союзе в самых разнообразных направлениях и коллектив научных работников — геометров пополняется новыми молодыми кадрами.

3. За последние 10 лет в Прибалтийских республиках вырос молодой коллектив геометров, которые успешно работают в различных направлениях дифференциальной геометрии в тесном контакте с Московской геометрической школой дифференциальной геометрии.

4. Конференция имеет большое значение для научных связей Прибалтийских геометров с представителями различных геометрических школ, что несомненно будет способствовать дальнейшему развитию геометрии в Прибалтийских республиках.

Учитывая выше изложенное, конференция постановляет:

1. Считать удачным опыт проведения региональных геометрических конференций и рекомендовать в дальнейшем организацию таких конференций как в Прибалтике, так и в других Союзных республиках.

2. Рекомендовать провести следующую Прибалтийскую геометрическую конференцию в гор. Тарту (Эстонская ССР) при Тартуском Государственном Университете и просить Ректорат оказать содействие в организации (предполагаемая дата конференции 1965 г.). Просить Государственный комитет высшего и среднего специального образования Эстонской ССР и Министерство высшего образования СССР утвердить организационный комитет конференции в следующем составе: доц. Ю. Г. Лумисте (Тарту, председатель оргкомитета), доц. Л. Я. Березина (Рига), доц. К. И. Гринцевичюс (Вильнюс), Р. Р. Муллари (Тарту), М. О. Рахула (Тарту) и В. И. Близникас (Вильнюс).

3. Поддержать решение оргкомитета, которое сообщил проф. А. П. Норден:

а) перенести место организации Второй Всесоюзной геометрической конференции из гор. Казани в гор. Ереван;

б) включить в состав оргкомитета Второй Всесоюзной геометрической конференции: С. Е. Карапетяна, Т. А. Хачатряна, А. В. Чакмазяна, В. Х. Бадальяна, Н. М. Остиану;

в) передать С. Е. Карапетяну полномочия председателя оргкомитета Второй Всесоюзной геометрической конференции;

г) просить Государственный комитет высшего и среднего специального образования при Совете Министров Армянской ССР и Министерство Высшего и среднего специального образования СССР утвердить оргкомитет Второй Всесоюзной геометрической конференции в новом составе: С. Е. Карапетян (Ереван, председатель оргкомитета), А. П. Норден (Казань, заместитель председателя оргкомитета), В. Г. Болтянский (Москва), В. В. Вагнер (Саратов), И. П. Егоров (Пенза), Н. В. Ефимов (Москва), Н. И. Кованцов (Киев), Б. Л. Лаптев (Казань), Г. Ф. Лаптев (Москва), А. З. Петров (Казань), Ю. Г. Решетняк (Новосибирск), Б. А. Розенфельд (Москва), С. П. Фиников (Москва), Н. Ф. Четверухин (Москва), В. И. Щуликовский (Казань), Н. М. Остиану (Москва), Н. Г. Гаспарян (Ереван), С. Г. Гаспарян (Ереван), Т. А. Хачатрян (Ереван), А. В. Чакмазян (Ереван), В. Х. Бадальян (Ереван).

4. Учитывая большое значение геометрии и геометрических методов в современной математике, в развитии математической культуры, в физике и других прикладных науках, считать необходимым дальнейшее повышение уровня геометрических исследований и усиление работы в области глобальной геометрии.

5. Для дальнейшего развития геометрии в Советском Союзе конференция считает, что:

а) необходимо обеспечение твердого положения курсов аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и оснований геометрии в учебных планах университетов и педагогических институтов;

б) необходимо дальнейшее совершенствование читаемых геометрических курсов и их перестройку в направлении современных геометрических исследований.

6. Просить Редакционную коллегию журнала «Литовский математический сборник» опубликовать резюме прочитанных на конференции докладов.

7. Просить оргкомитет Первой Прибалтийской геометрической конференции по вопросам дифференциальной геометрии опубликовать в журнале «Успехи математических наук» сообщение о конференции и принятое на ней решение.