ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
IV LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
1964

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦЫ ИГРЫ И ЗНАЧЕНИЯ ИГРЫ

Э. И. ВИЛКАС

Как известно, для любой матрицы игры $A=\|a_{ij}\|$, любых чисел $\alpha\geqslant 0$ и β

$$\operatorname{val}(\alpha A+\beta)=\alpha \operatorname{val} A+\beta,$$

где $\operatorname{val} A$ – значение игры с матрицей A. Естественно ставить вопрос в более общем виде: какими должны быть функции $f(x)$ и $g(x)$, чтобы для любой матрицы A имело место равенство

$$\operatorname{val}\|f(a_{ij})\|=g\left(\operatorname{val}\|a_{ij}\|\right). \quad * \tag{1}$$

Оказывается, что свойством (1) обладает только

$$f(x)\equiv g(x)\equiv \alpha x+\beta, \quad \alpha\geqslant 0.$$

Доказательство этого вместе с доказательством неравенства

$$\operatorname{val}\|f(a_{ij})\|\geqslant f\left(\operatorname{val}\|a_{ij}\|\right),$$

для случая выпуклой $f(x)$ является целью настоящей заметки.

Теорема 1. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют соотношению* (1) *для любой матрицы A, то*

$$f(x)\equiv g(x) \tag{2}$$

и существуют такие $\alpha\geqslant 0$ и β, что

$$f(x)\equiv \alpha x+\beta. \tag{3}$$

Доказательство. Тождество (2) легко следует из соотношения (1), если в него поставить 1×1 – матрицу $A\equiv x$:

$$f(x)\equiv \operatorname{val}\|f(x)\|=g\left(\operatorname{val}\|x\|\right)\equiv g(x)$$

для любого x.

Поэтому в дальнейшем нам достаточно рассматривать равенство

$$\operatorname{val}\|f(a_{ij})\|=f\left(\operatorname{val}\|a_{ij}\|\right). \tag{4}$$

Докажем две леммы.

Лемма 1. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет соотношению* (4) *для любой матрицы A, то $f(x)$ — неубывающая функция.*

* Задача была поставлена Н. Н. Воробъевым.

Доказательство. Пусть существуют такие x_1 и x_2, $x_1 < x_2$, что $f(x_1) > f(x_2)$. Тогда для матрицы $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{val}\begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \end{pmatrix} = f(x_1) > f(x_2) = f\left(\operatorname{val}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right),$$

и соотношение (4) не выполняется.

Лемма 2. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет соотношению (4) для любой матрицы A, то для всех x_1, x_3, $x_1 < x_3$, и $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3)$ точки плоскости*

$$\bigl(x_1, f(x_1)\bigr),\quad \bigl(x_2, f(x_2)\bigr),\quad \bigl(x_3, f(x_3)\bigr)$$

лежат на одной прямой.

Доказательство проведем от противного. Пусть либо

а) $f(x_2) > \frac{1}{2}\bigl(f(x_1) + f(x_3)\bigr)$,

либо

б) $f(x_2) < \frac{1}{2}\bigl(f(x_1) + f(x_3)\bigr)$.

Покажем, что любое из допущенной а) и б) ведет к противоречию. Для этого используем матрицы

$$A_а = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix},\qquad A_б = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_2 \\ x_3 & x_1 \end{pmatrix}.$$

В силу того, что $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3)$,

$$f(\operatorname{val} A_а) = f(\operatorname{val} A_б) = f\left(\operatorname{val}\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_1 \end{pmatrix}\right) = f(x_2).$$

Но легко видеть, что в случае а)

$$\operatorname{val}\begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ f(x_3) & f(x_2) & f(x_1) \end{pmatrix} = \operatorname{val}\begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_3) \\ f(x_3) & f(x_1) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\bigl(f(x_1) + f(x_3)\bigr) < f(x_2).$$

Аналогично в случае б)

$$\operatorname{val}\begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_3) \\ f(x_2) & f(x_2) \\ f(x_3) & f(x_1) \end{pmatrix} > f(x_2).$$

Лемма доказана.

Приступим к доказательству второй части теоремы. Пусть для некоторых точек x_1 и x_2, $x_1 < x_2$

$$f(x_1) = \alpha x_1 + \beta,\quad f(x_2) = \alpha x_2 + \beta.$$

Такие α и β, очевидно, существуют, причем по лемме 1 $\alpha \geqslant 0$. Разделим интервал $[x_1, x_2]$ пополам. Для точки деления x_3 по лемме 2

$$f(x_3) = \alpha x_3 + \beta.$$

Применяя лемму 2 к парам точек x_1, x_3 и x_3, x_2, получим, что для точек деления x_4 и x_5 интервалов $[x_1, x_3]$ и $[x_3, x_2]$, соответственно,

$$f(x_4) = \alpha x_4 + \beta, \quad f(x_5) = \alpha x_5 + \beta.$$

Продолжая этот процесс, получим, что

$$f(x) = \alpha x + \beta \tag{5}$$

для всех

$$x = x_1 + \frac{m}{2^n}(x_2 - x_1), \quad m < 2^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Равенство (5) имеет место и для точек

$$x = x_1 \pm k(x_2 - x_1), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Действительно, если бы равенство (5) не выполнялось для $x = 2x_1 - x_2$ и $x = 2x_2 - x_1$, то по лемме 2 оно не могло бы выполняться и для x_1 и x_2. Последовательно применяя такое рассуждение к соседним точкам последовательностей $x_1 \pm k(x_2 - x_1)$, $k = 1, 2, \ldots$, докажем, что для всех их имеет место (5). А тогда, очевидно, равенство (5) имеет место для всех $x \in M$, где множество

$$M = \left\{ x : x = x_1 \pm \frac{m}{2^n}(x_2 - x_1), \quad m, n = 1, 2, \ldots \right\}.$$

Множество M — всюду плотное на числовой прямой. Поэтому для любого x существуют две такие последовательности: $x_n \to x$, $x'_n \to x$ при $n \to \infty$, что $x_n < x < x'_n$ и $x_n \in M$, $x'_n \in M$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ Тогда в силу леммы 1

$$f(x_n) \leqslant f(x) \leqslant f(x'_n), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

А так как $f(x_n) = \alpha x_n + \beta$, $f(x'_n) = \alpha x'_n + \beta$ для всех n и $x_n \to x$, $x'_n \to x$ при $n \to \infty$, то из неравенств (6) следует равенство (5) для любого x, и (3) доказано.

В следующей теореме мы рассмотрим поэлементное выпуклое преобразование матрицы игры. Обозначим через Γ игру с матрицей $\|a_{ij}\|$, через Γ_f — игру с матрицей $\|f(a_{ij})\|$.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ — строго выпуклая в интервале $\left[\min\limits_{i,j} a_{ij}, \max\limits_{i,j} a_{ij}\right]$, а в интервале $\left(\operatorname{val} A, \max\limits_{i,j} a_{ij}\right)$ она возрастает, то*

$$\operatorname{val} \|f(a_{ij})\| \geqslant f\left(\operatorname{val} \|a_{ij}\|\right). \tag{7}$$

Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда существуют такие чистые оптимальные стратегии i_0-я первого игрока в игре Γ, j_0-я второго игрока в игре Γ_f, что

$$f\left(\min_j a_{i_0 j}\right) = \max_i f(a_{i j_0}). \tag{8}$$

Доказательство. Пусть размеры матрицы игры — $m \times n$. По определению значения игры для всех $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$

$$\operatorname{val} A \leqslant \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}, \tag{9}$$

где $p=(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m)$ оптимальная стратегия первого игрока в игре Γ. В силу возрастания и выпуклости функции $f(x)$, для всех $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, из (9) получаем

$$f(\operatorname{val} A) \leqslant f\left(\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{m} p_i f(a_{ij}). \tag{10}$$

Если к матрице $\| f(a_{ij}) \|$ присоединить строку, все элементы которой равны $f(\operatorname{val} A)$, то эта строка, как показывает (10), будет доминироваться остальными строками матрицы $\| f(a_{ij}) \|$. А это означает, что имеет место (7).

Если существуют указанные в теореме i_0 и j_0, то

$$\operatorname{val} \| a_{ij} \| = \min_j a_{i_0 j}, \quad \operatorname{val} \| f(a_{ij}) \| = \max_i f(a_{ij_0}),$$

и в силу (8)

$$\operatorname{val} \| f(a_{ij}) \| = f(\operatorname{val} \| a_{ij} \|). \tag{11}$$

Остается доказать необходимость для второй части теоремы. Предположим, что имеет место (11), и покажем, что тогда существуют соответствующие i_0 и j_0.

Для того, чтобы выполнялось (11), необходимо, чтобы для любой чистой стратегии второго игрока j, существенной в игре Γ_f, в неравенствах (10) достигались равенства. А это, в силу выпуклости функции $f(x)$, возможно только в случае, когда

$$a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{kj}=c_j, \quad p_i>0, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ k\leqslant m$$

для всех существенных в Γ_f чистых стратегий второго игрока j. Поэтому для второго игрока в игре Γ_f существует чистая оптимальная стратегия j_0, причем $c_{j_0} = \min_j c_j$. Следовательно,

$$\operatorname{val} \| f(a_{ij}) \| = \max_i f(a_{ij_0}).$$

Пусть $q=(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n)$ оптимальная стратегия второго игрока в игре Γ_f. Тогда, в силу выпуклости $f(x)$, для любой чистой стратегии первого игрока i, существенной в игре Γ,

$$\operatorname{val} \| f(a_{ij}) \| \geqslant \sum_{j=1}^{n} q_j f(a_{ij}) \geqslant f\left(\sum_{i=1}^{n} q_j a_{ij}\right).$$

Продолжая это рассуждение аналогично проведенному при получении j_0, мы докажем, что существует оптимальная чистая стратегия i_0 первого игрока в игре Γ. Это завершает доказательство теоремы.

Институт физики и математики
АН Литовской ССР

Поступила в редакцию
25.VI.1963

LOŠIMO MATRICOS IR LOŠIMO REIKŠMĖS TRANSFORMACIJOS

E. VILKAS

(*Reziumė*)

Tegu $A = \| a_{ij} \|$ – lošimo matrica. Jei bet kokiai matricai A funkcijos f ir g patenkina (1) lygybę, tai

$$f(x) \equiv g(x) \equiv \alpha x + \beta, \quad \alpha \geqslant 0.$$

Be to, kai funkcija $f(x)$ iškila, galioja (7) nelygybė.

TRANSFORMATION OF GAME MATRIX AND GAME VALUE

E. VILKAS

(*Summary*)

Let $A = \| a_{ij} \|$ is a game matrix. If for every matrix A functions f and g are that for-which holds equality (1), then

$$f(x) \equiv g(x) \equiv \alpha x + \beta, \quad \alpha \geqslant 0.$$

There is proved inequality (7) for convex function $f(x)$.