IV LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1964

ЦЕЛЫЕ И МЕРОМОРФНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Л. НАВИЦКАЙТЕ

В работе [1] изучались целые и мероморфные решения разностного уравнения вида:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(z) f(z+\alpha_k) = g(z), \tag{1}$$

где $a_k(z)$ — целые функции конечного порядка, α_k — действительные числа и $g(z)$ — целая или мероморфная функция. Полученные там результаты можно обобщить на случай дифференциально-разностного уравнения такого вида:

$$M[f(z)] = a_1(z) f(z+\alpha_1) + a_n(z) f(z+\alpha_n) + \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=0}^{s_k} a_{kl}(z) f^{(l)}(z+a_k) = g(z), \tag{A}$$

где коэффициенты $a_1(z)$, $a_n(z)$, $a_{kl}(z)$ $(k=2, 3, \ldots, n-1;\ l=0, 1, \ldots, s_k)$ тоже целые функции, порядок которых не превышает конечного числа ρ, $0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n$ — действительные числа, $g(z)$ — целая или мероморфнач функция, $f(z)$ — искомая функция.

В этой работе для исследования дифференциально-разностного уравнения (А) пользуемся тем же методом, что в работе [1] применялся для изучения разностного уравнения типа (1). Местами изучение уравнения (А) не отличается от изучения уравнения (1). Поэтому в заметку мы включили только два параграфа. В первом из них приводим формальные решения уравнения (А) в виде итерационных рядов, а во втором — вспомогательные предложения, нужные для изучения сходимости приведенных формальных решений.

С помощью этих вспомогательных предложений изучение решений уравнения (А) проводится таким же образом (лишь с незначительными изменениями), как и решений (1) уравнения. При этом получаемые теоремы дословно совпадают с теоремами, приведенными в работе [1]. По этой причине в настоящей работе как формулировка теорем, так и их доказательства опущены.

§ 1. Формальные решения

Левую часть уравнения (А) можно представить в виде:

$$M[f(z)] = a_1(z)[f(z+\alpha_1) - Af(z+\alpha_1)], \tag{1.1}$$

или

$$M[f(z)] = a_n(z)[f(z+\alpha_n) - Bf(z+\alpha_n)], \tag{1.2}$$

где

$$Af(z) = -\frac{a_n(z-\alpha_1)}{a_1(z-\alpha_1)} f(z+\alpha_n-\alpha_1) - \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=0}^{s_k} \frac{a_{kl}(z-\alpha_1)}{a_1(z-\alpha_1)} f^{(l)}(z+\alpha_k-\alpha_1), \quad (1.3)$$

$$Bf(z) = -\frac{a_1(z-\alpha_n)}{a_n(z-\alpha_n)} f(z+\alpha_1-\alpha_n) - \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=0}^{s_k} \frac{a_{kl}(z-\alpha_n)}{a_n(z-\alpha_n)} f^{(l)}(z+\alpha_k-\alpha_n). \quad (1.4)$$

Рассмотрим итерационные ряды:

$$G[s(z)] = s(z) + As(z) + A^2 s(z) + \ldots \quad (1.5)$$

и

$$H[t(z)] = t(z) + Bt(z) + B^2 t(z) + \ldots, \quad (1.6)$$

где $s(z)$ и $t(z)$ — любые функции комплексного переменного. Из (1.1), (1.2) и последних формул легко следуют формальные равенства

$$M\Big[G[s(z)]\Big] = a_1(z)\, s(z+\alpha_1),$$

$$M\Big[H[t(z)]\Big] = a_n(z)\, t(z+\alpha_n).$$

Отсюда видно, что

$$f(z) = G[s(z)] + H[t(z)] \quad (1.7)$$

является формальным решением уравнения (A), если

$$a_1(z)\, s(z+\alpha_1) + a_n(z)\, t(z+\alpha_n) \equiv g(z). \quad (1.8)$$

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} \Delta^{l_1 l_2 l_3 \ldots l_m} &= \sum_{i=1}^{m} (\alpha_1 - \alpha_{l_i}), \\ \Delta_{k_1 k_2 \ldots k_m} &= \sum_{i=1}^{m} (\alpha_n - \alpha_{k_i}). \end{aligned}\right\} \quad (1.9)$$

Методом индукции легко убедиться, что итерации $A^m f(z)$ и $B^m f(z)$, выражаются через суммы такого вида:

$$A^m f(z) = \sum R^{j,\, l_1 l_2 \ldots l_m}(z)\, f^{(j)}(z - \Delta^{l_1 l_2 \ldots l_m}),$$

$$B^m f(z) = \sum R_{j,\, k_1 k_2 \ldots k_m}(z)\, f^{(j)}(z - \Delta_{k_1 k_2 \ldots k_m}), \quad (1.10)$$

где $l_1, l_2, \ldots, l_m$ независимо друг от друга пробегают значения $2, 3, \ldots, n$, $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — значения $1, 2, \ldots, n-1$, j изменяется от 0 до $s_{l_1} + s_{l_2} + \ldots + s_{l_m}$, соответственно до $s_{k_1} + s_{k_2} + \ldots + s_{k_m}$ в членах с фиксированными индексами $l_1, l_2, \ldots, l_m$, соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$, а коэффициенты связаны следующими рекуррентными формулами:

$$R^{l,\,k}(z) = -\frac{a_{kl}(z-\alpha_1)}{a_1(z-\alpha_1)},$$

$$R^{j,\, l_1 l_2 \ldots l_m}(z) = -\sum_{l=0}^{s_k} R^{l,\, l_m}(z) \sum_{t=0}^{j} C_l^t \left[R^{j-t,\, l_1 l_2 \ldots l_{m-1}}(z - \Delta^{l_m})\right]^{(l-t)},$$

$$R_{l,k}(z)=-\frac{a_{kl}(z-\alpha_n)}{a_n(z-\alpha_n)},$$

$$R_{j,k_1k_2\ldots k_m}(z)=-\sum_{l=0}^{s_k} R_{l,k_m}(z)\sum_{t=0}^{j} C_l^t R^{(l-t)}_{j-t,k_1k_2\ldots k_{m-1}}(z-\Delta_{k_m}), \qquad (1.11)$$

где $R^{(q)}_{p,k_1k_2\ldots k_m}(z)$, при $q<0$.

Заметим, что (1.8) будет выполнено, если выбрать

$$s(z)=\frac{1}{2}\,\frac{g(z-\alpha_1)-\varphi(z-\alpha_1)}{a_1(z-\alpha_1)},\quad t(z)=\frac{1}{2}\,\frac{g(z-\alpha_n)+\varphi(z-\alpha_n)}{a_n(z-\alpha_n)}, \qquad (1.12)$$

где $\varphi(z)$ — произвольно взятая функция. Тогда, подставляя в (1.7) $s(z)$ и $t(z)$ вида (1.12), получаем такое решение уравнения (A):

$$f(z)=\frac{1}{2}\left\{\frac{g(z-\alpha_n)+\varphi(z-\alpha_n)}{a_n(z-\alpha_n)}+\right.$$

$$+\sum R_{j,k_1k_2\ldots k_m}(z)\left[\frac{g(z-\alpha_n-\Delta_{k_1k_2\ldots k_m})+\varphi(z-\alpha_n-\Delta_{k_1k_2\ldots k_m})}{a_n(z-\alpha_n-\Delta_{k_1k_2\ldots k_m})}\right]^{(j)}+$$

$$+\frac{g(z-\alpha_1)-\varphi(z-\alpha_1)}{a_1(z-\alpha_1)}+$$

$$\left.+\sum R^{j,l_1l_2\ldots l_m}(z)\left[\frac{g(z-\alpha_1-\Delta^{l_1l_2\ldots l_m})-\varphi(z-\alpha_1-\Delta^{l_1l_2\ldots l_m})}{a_1(z-\alpha_1-\Delta^{l_1l_2\ldots l_m})}\right]^{(j)}\right\}, \qquad (1.13)$$

где суммы берутся по всем $m=1, 2, \ldots$; а $l_1, l_2, \ldots, l_m, k_1, k_2, \ldots, k_m$ и j принимают значения, указанные при формулах (1.10).

Положив в (1.13) $g(z)\equiv 0$, запишем формальное решение для однородного уравнения $M[f(z)]=0$:

$$f(z)=\frac{\varphi(z-\alpha_n)}{a_n(z-\alpha_n)}+\sum R_{j,k_1k_2\ldots k_m}(z)\left[\frac{\varphi(z-\alpha_n-\Delta_{k_1k_2\ldots k_m}}{a_n(z-\alpha_n-\Delta_{k_1k_2\ldots k_m})}\right]^{(j)}-$$

$$-\frac{\varphi(z-\alpha_1)}{a_1(z-\alpha_1)}+(-1)^j\sum R^{j,l_1l_2\ldots l_m}(z)\left[\frac{\varphi(z-\alpha_1-\Delta^{l_1l_2\ldots l_m})}{a_1(z-\alpha_1-\Delta^{l_1l_2\ldots l_m})}\right]^{(j)}. \qquad (1.14)$$

§ 2. Вспомогательные предложения

Для установления сходимости итерационных рядов (1.13) и (1.14) нам нужны оценки коэффициентов $R_{j,k_1k_2\ldots k_m}(z)$ $/R^{j,l_1l_2\ldots l_m}(z)/$. Сначала приведем некоторые нужные в дальнейшем предложения.

1. *Пусть* $T_1/T_2/$ — *последовательность чисел вида* $\Delta_{k_1k_2\ldots k_m}/\Delta^{l_1l_2\ldots l_m}/$, $m=1, 2, \ldots$ (см. (1.9)), причем точка $\Delta_{k_1k_2\ldots k_m}/\Delta^{l_1l_2\ldots l_m}/$ входит в последо вательность $T_1/T_2/$ с кратностью $s_{k_1}+s_{k_2}+\ldots+s_{k_m}/s_{l_1}+s_{l_2}+\ldots+s_{l_m}/$, но точки, отличающиеся одна от другой лишь порядком индексов $k_1k_2\ldots k_m$ $/l_1l_2\ldots l_m/$, считаем в $T_1/T_2/$ за одну точку. Напомним, что $k_1k_2, \ldots, k_m$ принимают значения $1, 2, \ldots, n-1$, а $l_1, l_2, \ldots, l_m$ — значения $2, 3, \ldots, n$. Если $\lambda_1/\lambda_2/$ показатель сходимости последовательности $T_1/T_2/$, то

$$\lambda_1\leqslant n \quad /\lambda_2\leqslant n/. \qquad (2.1)$$

Доказательство проведем лишь для точек $\Delta_{k_1k_2\ldots k_m}$. Так как $\alpha_n-\alpha_k\vee$ $>\alpha_n-\alpha_{n-1}$, $k=2, 3, \ldots, n-1$, то

$$\Delta_{k_1k_2\ldots k_m}=\sum_{i=1}^{m}(\alpha_n-\alpha_{k_i})>m\cdot(\alpha_n-\alpha_{n-1}).$$

Отсюда следует, что последовательность T_1 стремится в бесконечность при $m \to \infty$ и

$$m < \frac{1}{\alpha_n - \alpha_{n-1}} \cdot \Delta_{k_1k_2\ldots k_m} = C\Delta_{k_1k_2\ldots k_m}. \tag{2.2}$$

Следовательно, при $|\Delta_{k_1k_2\ldots k_m}| \leqslant r$,

$$m \leqslant Cr. \tag{2.3}$$

Кроме того, заметим, что кратность точек T_1

$$s_{k_1} + s_{k_2} + \ldots + s_{k_m} \leqslant sm, \quad \text{где} \quad s = \max s_k. \tag{2.4}$$

При m-фиксированном, число $N(m)$ точек $\Delta_{k_1k_2\ldots k_m} \subset T_1$ (с учетом их кратностей) удовлетворяет неравенству

$$N(m) \leqslant sm \cdot \binom{m+n-2}{n-2} < sm(m+n-2)^{n-2} < s(m+n)^{n-1}$$

(см. [3], зад. 13).

Отсюда и из (2.3) следует, что число $n(r)$ точек T_1 в круге $|z| \leqslant r$ удовлетворяет неравенству:

$$n(r) \leqslant \sum_{1}^{m} s \cdot (m+n)^{n-1} \leqslant Cm^n < Cr^n, \tag{2.5}$$

где C означает как здесь, так и в других формулах постоянные, не равные, в общем, между собой.

Следовательно,

$$\lambda_1 = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln n(r)}{\ln r} \leqslant n. \tag{2.6}$$

Доказанное верно и для точек последовательности T_2, а именно $\lambda_2 \leqslant n$.

2. Пусть $\{\gamma_s\}$, $\lim\limits_{s\to\infty} \gamma_s = \infty$ /$\{\beta_s\}$, $\lim\limits_{s\to\infty} \beta_s = \infty$/, последовательность точек комплексной плоскости, лежащих (за исключением, может быть, конечного числа) вне некоторого достаточно малого угла около отрицательной (положительной) действительной полуоси:

$$|\pi - \arg \gamma_s| \geqslant \delta > 0 \,/\, |\arg \beta_s| \geqslant \delta > 0/, \quad s > N$$

и ее показатель сходимости μ_1 /μ_2/.

Обозначим S_1 множество точек вида $\{\gamma_s + \Delta_{k_1k_2\ldots k_m}\}$ (S_2 — точек вида $\{\beta_s + \Delta^{l_1l_2\ldots l_m}\}$), причем точки эти входят в S_1 /S_2/ с той же кратностью, как точки $\Delta_{k_1k_2\ldots k_m}$ /$\Delta^{l_1l_2\ldots l_m}$/ в T_1 /T_2/.

Тогда последовательность S_1 /S_2/ не имеет предельных точек в конечной плоскости, и ее показатель сходимости не превышает $\mu_1 + \lambda_1$ /$\mu_2 + \lambda_2$/.

При доказательстве вспомним, что число точек γ_s в круге $|z| \leqslant r$

$$n_\gamma(r) \leqslant Cr^{\mu_1 + \varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

Так как $\Delta_{k_1k_2\ldots k_m} > 0$, то для того, чтобы точки $\{\gamma_s + \Delta_{k_1k_2\ldots k_m}\}$ попали в круг $|z| \leqslant r$, необходимо прежде всего, чтобы $\operatorname{Re} \gamma_s \leqslant r$, $|\operatorname{Im} \gamma_s| \leqslant r$.

В силу условия $|\pi - \arg \gamma_s| \geqslant \delta > 0$, число таких точек γ_s будет не больше $n_\gamma(R)$, где $R = \frac{r}{\sin \delta}$, а $n_\gamma(R)$ — число точек γ_s, $|\gamma_s| \leqslant R$.

Далее, если $\Delta_{k_1k_2\ldots k_m} > R + r$, то точки $\{\gamma_s + \Delta_{k_1k_2\ldots k_m}\}$ не попадут в круг $|z| \leqslant r$. Таким образом, число точек $\{\gamma_s + \Delta_{k_1k_2\ldots k_m}\}$, попадающих в круг

$|z| \leqslant r$, не больше $n_\gamma(R) \cdot n(R+r)$, где $n_\gamma(R)$ и $n(r)$ определены выше. Отсюда и из соотношений

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln n_\gamma(R)}{\ln R} = \mu_1, \qquad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln n(r)}{\ln r} = \lambda_1$$

легко следует, что показатель сходимости последовательности T_1 не больше $\lambda_1 + \mu_1$.

3. При исследовании сходимости итерационных рядов (1.13), (1.14), нам удобно пользоваться следующей леммой.

Лемма. Для любого $\varepsilon > 0$, $k > 0$ и $r > R_0(\varepsilon, k)$ можно найти при $m > kr$ такое число $p > 0$, зависящее лишь от

$$k_1 k_2 \ldots k_m \quad \text{и} \quad \frac{r}{2} < p < r, \tag{2.9}$$

что на окружности $|z| = p$ имеет место оценка

$$|R_{j, k_1 k_2 \ldots k_m}(z)| \leqslant C \exp m^{\rho+1+\varepsilon}. \tag{2.10}$$

Доказательству леммы предпошлем одну оценку мероморфной функции $f(z)$, имеющей конечный порядок ρ.

Пусть $f(z)$ имеет полюсы в точках λ_i, и круг K_i, $i = 1, 2, \ldots$ определен неравенством

$$|z - \lambda_i| \leqslant c |\lambda_i|^{-h}, \qquad h > \rho, \ c > 0. \tag{2.11}$$

Тогда (см. [2], 268) вне кругов K_i,

$$|f(z)| < Ce^{r^{\rho+\varepsilon}}. \tag{2.12}$$

Число c в (2.11) можно взять настолько малым, чтобы

$$\sum_{i=1}^{\infty} c |\lambda_i|^{-h} < \frac{1}{2}. \tag{2.13}$$

Тогда около каждой точки z, как около центра, можно провести окружность A радиуса a, $0 < a \leqslant \frac{1}{2}$, не пересекающую ни одного из кругов K_i.

В точках этой окружности по (2.12) имеет место неравенство

$$|f(z)| < Ce^{(r+1)^{\rho+\varepsilon}}. \tag{2.14}$$

Обозначим полюсы функции $f(z)$, лежащие в круге A, через $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, и пусть число этих полюсов $\nu(z)$. Очевидно,

$$\nu(z) < n(r+1), \tag{2.15}$$

где $n(r)$ число полюсов $f(z)$ в круге радиуса r.

Рассмотрим функцию

$$B(z) = f(z) \prod_{i=1}^{\nu(z)} (z - \beta_i). \tag{2.16}$$

На окружности A имеет место неравенство

$$|B(\zeta)| \leqslant Ce^{(r+1)^{\rho+\varepsilon}}, \qquad |\zeta - z| = a, \tag{2.17}$$

легко следующее из (2.14) и неравенства $|\zeta - \beta_i| < 1$.

Но $B(z)$ регулярна в круге A, и по принципу максимума получаем, что (2.17) выполнено во всем круге A, и в частности, в его центре z:

$$|B(z)| < Ce^{(r+1)^{\rho}}. \tag{2.18}$$

Из (2.16) получаем:

$$f(z) = \frac{B(z)}{\prod\limits_{i=1}^{\nu(z)} (z-\beta_i)}.$$

Если через $\mu = \mu(z)$ обозначим число, не превосходящее единицы и, в случае $\mu < 1$, равное наименьшему расстоянию от точки z до полюсов функции $f(z)$:

$$\mu = \min_i (|z-\lambda_i|,\ 1),$$

то

$$|f(z)| < C\,\frac{e^{(r+1)^{\rho}}}{\mu^{\nu(z)}} \leqslant \frac{C}{\mu^{n(r+1)}}\, e^{(r+1)^{\rho}}. \tag{2.19}$$

Кроме того заметим, что для производной s-того порядка мероморфной функции

$$f^{(s)}(z) = \frac{s!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z| = \frac{\mu}{2}} \frac{f(\zeta)}{|\zeta - z|^{s+1}}\, d\zeta$$

получается следующая оценка:

$$|f^{(s)}(z)| \leqslant \frac{s!\, 2^s C}{\mu^{n(r)+s}}\, e^{(r+1)^{\rho}}. \tag{2.20}$$

Обращаемся теперь к доказательству сформулированной леммы. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ — нули функции $a_n(z)$. Тогда коэффициенты $R_{j,k_1k_2\ldots k_m}(z)$, $m = 1, 2, \ldots$ суть мероморфные функции (см. (1.11)), полюсы которых лежат в точках множеств $\{\gamma_s + \alpha_n\}$, $\{\gamma_s + \alpha_n + \Delta_{k_1k_2\ldots k_m}\}$. Обозначим сумму этих множеств

$$\{\gamma_s + \alpha_n\} \cup \{\gamma_s + \alpha_n + \Delta_{k_1}\} \cup \ldots \cup \{\gamma_s + \alpha_n + \ldots + \Delta_{k_1k_2\ldots k_m}\} = S_m,$$

а через $\mu_m = \mu(m, r)$ число, определенное равенством

$$\mu_m = \min\Big(d(z, S_m),\ 1\Big),$$

где $d(z, S_m)$ — расстояние точки z до множества S_m.

Очевидно, что $S_{m-1} \in S_m$, и поэтому

$$\mu_{m-1} \geqslant \mu_m. \tag{2.21}$$

Порядок функции $R_{j,k_1}(z)$ не превышает конечного числа ρ. По (2.19) и (2.20)

$$|R_{j,k_1}(z)| \leqslant \frac{Ce^{(r+\alpha_n+1)^{\rho+\varepsilon}}}{\mu_1^{n(r+1)}} \tag{2.22}$$

и

$$|R^{(s)}_{j,k_1}(z)| \leqslant \frac{s!\, 2^s C}{\mu_1^{n(r+1)+s}}\, e^{(r+\alpha_n+1)^{\rho+\varepsilon}}. \tag{2.23}$$

Покажем методом индукции, что верно следующее неравенство:

$$|R_{j,k_1k_2\ldots k_m}(z)| \leqslant \frac{m!\, s^{2(m-1)}\, s!^{m-1}\, C^m\, 2^{(m-1)s} \exp\left[(r+\alpha_n)^{\rho+\varepsilon} + (r+\alpha_n+1+\Delta_{k_m})^{\rho+\varepsilon} + \ldots + (r+\alpha_n+m-1+\Delta_{k_2\ldots k_m})^{\rho+\varepsilon}\right]}{\mu_m^{n(r)+n(r+\Delta_{k_m})+\ldots+n(r+\Delta_{k_mk_{m-1}\ldots k_2})+s(m-1)}}. \tag{2.24}$$

Предположим, что неравенство (2.24) выполнено. Тогда

$$|R^{(s)}_{j,k_1k_2\ldots k_m}(z)|\leqslant\frac{s!\,2^s}{\mu_m^s}|R_{j,k_1k_2\ldots k_m}(\zeta)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{m!\,s^{2(m-1)}s!^m C^m 2^{ms}\exp\left[(r+\alpha_n+1)^{\rho+\varepsilon}+(r+\alpha_n+2+\Delta_{k_m})^{\rho+\varepsilon}+\ldots+(r+\alpha_n+m+\Delta_{k_m\ldots k_2})^{\rho+\varepsilon}\right]}{\mu_m^{n(r)+n(r+\Delta_{k_m})+\ldots+n(r+\Delta_{k_2\ldots k_m})+ms}}. \qquad (2.25)$$

Кроме того, из рекуррентной формулы (1.11) имеем

$$|R_{j,k_1k_2\ldots k_mk_{m+1}}(z)|\leqslant s_k\cdot j\cdot|R_{l,k_m}(z)|\cdot C_l^t|R^{(l-t)}_{j-t,k_1k_2\ldots k_m}(z-\Delta_{k_{m+1}})|,\qquad j\leqslant sm.$$

Последнее неравенство в соединении с (2.22) и (2.25) дает:

$$|R_{j,k_1k_2\ldots k_mk_{m+1}}(z)|\leqslant\frac{(m+1)!\,s^{2m}s!^m C^{m+1}2^{ms}}{\mu^{n(r)+\ldots+n(r+\Delta_{k_{m+1}k_m\ldots k_2})+ms}}\exp\left[(r+\alpha_n)^{\rho+\varepsilon}+\right.$$

$$\left.+(r+\alpha_n+1+\Delta_{k_{m+1}})^{\rho+\varepsilon}+\ldots+(r+\alpha_n+m+\Delta_{k_{m+1}k_m\ldots k_2})^{\rho+\varepsilon}\right]. \qquad (2.26)$$

Значит, неравенство типа (2.24) будет верно для функций $R_{j,k_1k_2\ldots k_mk_{m+1}}(z)$, если оно выполнено для функций $R_{j,k_1k_2\ldots k_m}(z)$. Также оно верно (см. (2.22)) для $R_{j,k_1}(z)$. Таким образом, неравенство (2.24) доказано.

Замечаем, что согласно (2.3) и (2.2)

$$S(r,\ m)=(r+\alpha_n)^{\rho+\varepsilon}+(r+\alpha_n+1+\Delta_{k_m})^{\rho+\varepsilon}+\ldots+(r+\alpha_n+m-1+\Delta_{k_m\ldots k_2})^{\rho+\varepsilon}\leqslant$$

$$\leqslant(m+1)\cdot(r+\alpha_n+m-1+\Delta_{k_m\ldots k_2})^{\rho+\varepsilon}<m\cdot Cr^{\rho+\varepsilon}<Cr^{\rho+1+\varepsilon}. \qquad (2.27)$$

Кроме того, при $|\Delta_{k_1k_2\ldots k_m}|>r$,

$$S(r,\ m)\leqslant Cm^{\rho+1+\varepsilon},\qquad \varepsilon>0. \qquad (2.28)$$

Так как, $n(r)<r^{\rho+\varepsilon}$, то

$$n(r)+n(r+\Delta_{k_m})+\ldots+n(r+\Delta_{k_2\ldots k_m})+(m-1)s\leqslant$$

$$\leqslant m\cdot(r+\Delta_{k_2\ldots k_m})^{\rho+\varepsilon}+ms<Cm^{\rho+1+\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$|R_{j,k_1k_2\ldots k_m}(z)|\leqslant\frac{C\exp m^{\rho+1+\varepsilon}}{\mu_m^{Cm^{\rho+1+\varepsilon}}}.$$

Если $|\mu_m(z)|>Cr^{-h}$, то получим

$$|R_{j,k_1k_2\ldots k_m}(z)|\leqslant C\exp m^{\rho+1+\varepsilon}. \qquad (2.10)$$

В работе [1] показано, что для любого r можно провести окружность $|z|=p$, $\frac{r}{2}<p<r$, для всех точек которой $\mu_m>Cr^{-h}$. Лемма доказана.

С помощью изложенных в этом параграфе предложений все теоремы из работы [1] о разностных уравнениях переносятся на случай дифференциально-разностных уравнений типа (A). Но при этом следует всем символам, входящим в формулировки этих теорем, как, напр., S_1, S_2, λ_1, λ_2, и т. п. придавать тот смысл, который они имеют в этом параграфе.

Вильнюсский государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
10.IV.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Нафталевич. О применении метода итераций для решения разностного уравнения, Матем. сборник, т. 57 (99), вып. 2 (1962), 151—178.
2. L. Bieberbach. Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. 2, Leipzig—Berlin, 1927.
3. Г. Полиа и Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа, Москва, Гостехиздат, 1956.

DIFERENCIALINĖS-SKIRTUMINĖS LYGTIES MEROMORFINIAI IR SVEIKI SPRENDINIAI

L. NAVICKAITĖ

(Reziumė)

Darbe parodyta diferencialinės-skirtuminės lygties

$$M[f(z)]=a_1(z)f(z+\alpha_1)+a_n(z)f(z+\alpha_n)+\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{l=0}^{s_k}a_{kl}(z)f^{(l)}(z+\alpha_k)=g(z)$$

sveikųjų ir meromorfinių sprendinių egzistencija. Pradžioje gaunami formalūs sprendiniai, iš reikšti iteracinėmis eilutėmis, paskui parodoma tų eilučių konvergencija. Nustatyta sprendinių augimo eilė.

GANZE UND MEROMORPHE LÖSUNGEN EINER DIFFERENZ-DIFFERENTIALGLEICHUNG

L. NAVICKAITĖ

(Zusammenfassung)

Es sei

$$M[f(z)]=a_1(z)f(z+\alpha_1)+a_n(z)f(z+\alpha_n)+\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{l=0}^{s_k}a_{kl}(z)f^{(l)}(z+\alpha_k)=g(z)$$

eine Differential-Differentialgleichung, in der die Koeffizienten $a_1(z)$, $a_n(z)$, $a_{kl}(z)$ ganze Funktionen sind, $g(z)$ ist eine ganze oder meromorphe Funktion, $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n$ sind reale Zahlen.

In der Arbeit wird die Existenz von ganzen und meromorphen Lösungen einer solcher Gleichung bewiesen.

Zuerst werden formale Lösungen untersucht, die durch iterierte Reihen ausgedrückt sind, dann wird die Konvergenz dieser Reihen bewiesen.

Auch wird hier das Wachstum solcher Lösungen untersucht.