IV LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1964

О МНОГОМЕРНОЙ ЛОКАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

А. К. РАУДЕЛЮНАС

Пусть R_s — s-мерное евклидовое пространство, $(x, y)=\sum_{i=1}^{s} x_i y_i$ — скалярное произведение векторов $x=(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_s)$ и $|x|=(x, x)^{\frac{1}{2}}$ — норма вектора x.

Пусть $\{\xi_k=(\xi_{k1}, \xi_{k2}, \ldots, \xi_{ks}),\ k=1, 2, \ldots\}$ — последовательность целочисленных независимых равномерно ограниченных ($|\xi_k|<K$, $k=1, 2, \ldots$) s-мерных случайных векторов. Не нарушая общности, будем считать, что $M\xi_k=0$, $k=1, 2, \ldots$. Пусть $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n=(S_{n1}, \ldots, S_{ns})$.

В этом случае, В. В. Сазоновым [1] было показано, что для существования последовательности невырожденных s-мерных нормальных распределений $\{L_n\}$ в R_s такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{E\in\bar{C}} |P_{S_n}(E)-L_n(E)|=0, \tag{1}$$

необходимо и достаточно следующее условие:

$$D(t, S_n)\to\infty (n\to\infty)$$

при всех $t\neq 0$, $t\in R_s$.

Здесь P_{S_n} — распределение случайного вектора S_n, $\bar{C}$ — класс всех выпуклых множеств в R_s.

Цель настоящей заметки доказать аналогичную многомерную локальную предельную теорему.

Теорема. *Пусть $\{\xi_k\}$ — последовательность целочисленных независимых, равномерно ограниченных случайных векторов.*

Условия:

а) $$D(t, S_n)\to\infty (n\to\infty)$$

для любого s-мерного вектора t с $|t|=1$ и

б) $$\sum_{k=1}^{\infty} \min_{0\leqslant r<q} P\{(a, \xi_k)\not\equiv r \pmod q\}=\infty,$$

для любого целого $q\geqslant 2$ и для любого целочисленного вектора $a=(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ с о.н.д. $(a_1, a_2, \ldots, a_s, q)=1$ является необходимым и достаточным для *существования последовательности $\{L_n\}$ — s-мерных нормальных распределений с невырожденными матрицами ковариаций A_n такой, чтобы*

$$\sqrt{\operatorname{Det} A_n}\, P\{S_n=m\}-\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^s}e^{-\frac{1}{2}[m]A_n^{-1}[m]^T}\to 0 \qquad (n\to\infty) \qquad (2)$$

равномерно относительно всех целочисленных векторов $m=(m_1, m_2, \ldots, m_s)$, где соотношение (2) выполняется для любой последовательности $\{\xi'_k\}$ отличающейся от $\{\xi_k\}$ лишь конечным числом членов. Тогда говорят, что для последовательности $\{\xi_k\}$ имеет место локальная предельная теорема в усиленной форме (Л.Т.У.).

Здесь $[m]$, $[m]^T$ — матрица строка и столбец соответственно, $D(t, S_n)$ — дисперсия случайной величины (t, S_n), она и квадратичная форма случайного вектора S_n.

Замечание. Условие б) равносильно следующему условию:

Общий наибольший делитель объемов всех s-мерных симплексов, все $s+1$ вершины которых лежат в целочисленных точках m, для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{\xi_k=m\}=\infty$$

равен $\frac{1}{S!}$.

Доказательство. Пусть $f_n(t)$ — характеристическая функция суммы S_n, т. е.

$$f_n(t)=\sum_m e^{i(t,\,m)}P\{S_n=m\}.$$

Имеем

$$P\{S_n=m\}=\frac{1}{(2\pi)^s}\int_{(-\pi)}^{(\pi)}\!\!\ldots\int e^{-i(t,\,m)}f_n(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^s\sqrt{\operatorname{Det} A_n}}\cdot\int\!\!\ldots\int_G e^{-i(t,\,m^*)}f_n^*(t)\,dt,$$

где $[m^*]=[m]B_n^{-1}$, $f_n^*(t)$ — характеристическая функция преобразованной случайной величины $[S_n]B_n^{-1}$, A_n — матрица ковариацией невырожденного нормального закона L_n из соотношения (1) и B_n определяется из соотношения $A_n=B_n\cdot B_n^T$. Области G — преобразованный при помощи B_n s-мерной интервал $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{s}(-\pi, \pi)$, т. е. $G=\left\{y:[y]=[x]B_n,\ x\in\mathop{\times}\limits_{k=1}^{s}(-\pi, \pi)\right\}$.

Пусть $g_n(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, $\varphi_n(t)$ — плотность вероятности и характеристическая функция распределения L_n и $g^*(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ и $\varphi^*(t)$ — плотность и характеристическая функция преобразованного нормального распределения L^*, полученного из L_n при помощи линейного преобразования B_n^{-1} с матрицей преобразования B_n^{-1} (т. е. $L^*=B_n^{-1}L_n$).

Тогда

$$\sqrt{\operatorname{Det} A_n}\,P\{S_n=m\}-\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^s}e^{-\frac{1}{2}[m]A_n^{-1}[m]^T}=I_1+I_2+I_3+I_4,$$

где

$$I_1 = \sqrt{\operatorname{Det} A_n} \int\limits_{G_1} \cdots \int e^{-i(t,\,m)} [f_n(t) - \varphi_n(t)]\, dt,$$

$$I_2 = \sqrt{\operatorname{Det} A_n} \int\limits_{R_s \setminus G_1} \cdots \int e^{-i(t,\,m)} \varphi_n(t)\, dt,$$

$$I_3 = \sqrt{\operatorname{Det} A_n} \int\limits_{G_2 \setminus G_1} \cdots \int e^{-i(t,\,m)} f_n(t)\, dt,$$

$$I_4 = \sqrt{\operatorname{Det} A_n} \int\limits_{G_3 \setminus G_2} \cdots \int e^{-i(t,\,m)} f_n(t)\, dt,$$

то для доказательства достаточности условий теоремы, достаточно показать, что каждый из этих интегралов стремится к нулю, когда $n \to \infty$ равномерно относительно m.

Здесь

$$G_1 = \{ t : |[t] B_n| \leqslant C \},$$
$$G_2 = \{ t : |t| < \varepsilon \},$$
$$G_3 = \{ t : -\pi \leqslant t_i \leqslant \pi,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s \}.$$

Константу C и $\varepsilon > 0$ подберем позднее.

Оценим эти интегралы:

1. Так как

$$I_1 = \int\limits_{|t| \leqslant C} \cdots \int e^{-i(t,\,m^*)} [f_n^*(t) - \varphi^*(t)]\, dt,$$

то $I_1 \to 0\,(n \to \infty)$ при любом C равномерно относительно m в силу центральной предельной теоремы.

2. $\varphi^*(t)$ — есть характеристическая функция невыраженного нормального распределения, поэтому

$$|I_2| \leqslant \int\limits_{|t| > C} \cdots \int |\varphi^*(t)|\, dt \to 0,$$

если только C устремить медлено к бесконечности, так, чтобы не нарушалось стремление I_2 к нулю, а это возможно.

3. Имеем

$$|I_3| \leqslant \sqrt{\operatorname{Det} A_n} \int\limits_{G_2 \setminus G_1} \cdots \int |f_n(t)|\, dt. \tag{3}$$

Как известно, для $f_n(t)$ имеет место неравенство

$$|f_n(t)| \leqslant \exp\left\{ -\sum_{k=1}^{n} \sum_{m_1,\, m_2} \sin^2 \frac{\big(t,\ (m_1 - m_2)\big)}{2}\, p_{k|m_1} p_{k|m_2}, \right. \tag{4}$$

где $p_{k|m} = P\{\xi_k = m\}$. У нас рассматриваемые величины равномерно ограниченны, поэтому в области $|t_i| \leqslant \frac{1}{K}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s$ выполняется неравенство

$$\sin^2 \frac{\big(t,\ (m_1 - m_2)\big)}{2} \geqslant C_1 \big(t,\ (m_1 - m_2)\big)^2, \qquad C_1 > 0.$$

Отсюда в области $|t_i| \leqslant \frac{1}{K}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s$

$$|f_n(t)| \leqslant \exp\{ -2C_1 D(t,\ S_n) \}. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (3), получаем, что при $\varepsilon=\frac{1}{sK}$

$$|I_3|\leqslant\sqrt{\operatorname{Det}A_n}\int\limits_{G_2\setminus G_1}\cdots\int|f_n(t)|\,dt\leqslant\sqrt{\operatorname{Det}A_n}\int\limits_{G_2\setminus G_1}\cdots\int e^{-2C_1D(t,\,S_n)}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{|t|\geqslant C}\cdots\int e^{-2C_1|t|^2}\,dt\to 0\qquad(C\to\infty).$$

4. Пусть

$$R_k(2\pi t)=\sum_{m_1,\,m_2}\sin^2\pi\Big(t,\ (m_1-m_2)\Big)p_{k/m_1}p_{k/m_2}. \tag{6}$$

Согласно теории диафантовых апроксимаций, каждый t_i, $i=1,2,\ldots,s$ можно представить в следующем виде $t_i=\frac{a_i}{q}+\vartheta_i$, $i=1,2,\ldots,s$, где $a_i\leqslant 2q$, $|\vartheta_i|\leqslant q^{-1}\tau^{-\frac{1}{s}}$, $0<\tau<\infty$, $2<q<\tau$ и о.н.д. $(a_1,a_2,\ldots,a_s,q)=1$.

Тогда область $G_2\setminus G_1$ распадается на конечное число кубиков $I_{\frac{a}{q}}$ с центром в точке $\frac{a}{q}=\left(\frac{a_1}{q},\ldots,\frac{a_s}{q}\right)$, $t\in I_{\frac{a}{q}}$.

Для $t_i\in\left[\frac{a_i}{q}-\vartheta_i,\ \frac{a_i}{q}+\vartheta_i\right]$, $i=1,2,\ldots,s$ при достаточно большом τ ввиду ограниченности ξ_k имеет место неравенство

$$R_k(2\pi t)\geqslant\frac{1}{2q^2}\min_{0\leqslant r<q}P\{(a,\xi_k)\not\equiv r\,(\operatorname{mod}q)\}+C_2D\left(\left(t-\frac{a}{q}\right),\ \xi_k\right), \tag{7}$$

где $C_2>0$.

Из соотношений (4), б), (6), (7) и независимости ξ_k в области $t\in I_{\frac{a}{q}}$ получаем

$$|I_4|\leqslant C_3\sqrt{\operatorname{Det}A_n}\sum_{\frac{a}{q}}\int\limits_{I_{\frac{a}{q}}}\cdots\int|f_n(2\pi t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant C_3\sqrt{\operatorname{Det}A_n}\sum_{\frac{a}{q}}\int\limits_{I_{\frac{a}{q}}}\cdots\int\exp\left\{-\frac{1}{2q^2}P_{naq}-C_2D\left(\left(t-\frac{a}{q}\right),\ S_n\right)\right\}dt, \tag{8}$$

где

$$C_3>0,\quad P_{naq}=\sum_{k=1}^{n}\min_{0\leqslant r<q}P\{(a,\xi_k)\not\equiv r\,(\operatorname{mod}q)\}.$$

Заменив $t=z+\frac{a}{q}$ и выполнив линейное преобразование $[z]=[z']B_n^{-1}$, которое переводит $D(z,\ S_n)$ в сумму квадратов и расширяя пределы интегрирования по всему пространству из условий теоремы и неравенства (8) получаем, что $I_4\to 0$ $(n\to 0)$ равномерно относительно m.

Таким образом, достаточность условий доказана.

Необходимость условия а) следует из центральной предельной теоремы В. В. Сазонова. Необходимость же условия б) для равномерно ограниченных слагаемых известна.

Вильнюсский государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
23.IX.1963

ЛИТЕРАТУРА

В. Сазонов. К многомерной центральной предельной теореме, Лит. мат. сб., **III**, (1963) (в печати).

DAUGIAMATĖS LOKALINĖS RIBINĖS TEOREMOS KLAUSIMU

A. RAUDELIŪNAS

(*Reziumė*)

Tegu $\{\xi_k\}$ – nepriklausomų, tolygiai aprėžtų ir priimančių sveikas reikšmes atsitiktinių vektorių seka. Straipsnyje randamos būtinos ir pakankamos sąlygos, kad sekai $\{\xi_k\}$ galiotų daugiamatė lokalinė ribinė teorema sustiprintoje formoje.

ON MULTIDIMENSIONAL LOCAL LIMIT THEOREM

A. RAUDELIUNAS

(*Summary*)

Let $\{\xi_k\}$ is a set of independent, identicaly bounded and integer valued random vectors. In this paper are obtained necessary and sufficient conditions under which for set $\{\xi_k\}$ hold multidimensional local limit theorem in strong form.