IV ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1964

НЕКОТОРЫЕ ВНУТРЕННИЕ ГЕОМЕТРИИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

В. И. БЛИЗНИКАС

Если гиперповерхность аффинного пространства или пространства аффинной связности оснащена, то с ней связывается пространство аффинной связности, свойства которого и определяют внутреннюю геометрию гиперповерхности. Таким образом, задача нахождения инвариантных оснащений гиперповерхности и является основной задачей геометрии гиперповерхностей. Решению этой задачи посвещено ряд работ Г. Ф. Лаптева, А. Е. Либера, А. П. Нордена, А. М. Лопшица, В. Д. Измайлова, Л. С. Атанасяна, П. И. Швейкина, В. Главатого, Ф. Ножичка и др. Фундаментальные результаты по теории оснащенных поверхностей пространств Клейна принадлежат Г. Ф. Лаптеву [3], А. П. Нордену [6], А. Е. Либеру [5] и П. И. Швейкину [7].

В статье указываются дифференциально-геометрические объекты, позволяющие строить инвариантные оснащения гиперповерхностей пространства аффинной связности с кручением. Полученные объекты отличны от соответствующих объектов Ф. Ножичка [10], В. Главатого [8] и В. Д. Измайлова [2]. Основным аппаратом исследования является метод внешних форм и метод продолжении и охватов полей дифференциально-геометрических объектов (метод Г. Ф. Лаптева и А. М. Васильева).

§ 1. АППАРАТ ИССЛЕДОВАНИЯ

1. *Пространство аффинной связности.* Пусть $\mathfrak{M}_n$ есть некоторое n-мерное аналитическое многообразие (база), с каждой точкой A которого ассоциированно n-мерное центроаффинное пространство $A_n(A)$ (локальное пространство точки A). Множество всех локальных пространств $A_n(A)$, ассоциированных с различными точками $\mathfrak{M}_n$, называется составным многообразием $A_n(\mathfrak{M}_n)$. Будем считать, что центроаффинное пространство $A_n(u)$ отнесено к аффинному реперу $\{A(u), e_1(u), \ldots, e_n(u)\}$, где $u^1, u^2, \ldots, u^n$ — координаты точки A. Если в многообразие локальных пространств $\{A_n(u)\}$ введена связность, определенная преобразованием полной линейной группы точек соседнего локального пространства, то многообразие $\mathfrak{M}_n$ называется пространством аффинной связности. Определяющее аффинную связность отображение соседнего локального пространства $A_n(u+du)$ на исходное пространство $A_n(u)$ можно определить отображением начального локального репера $\{A(u+du),$

$e_i(u+du)\}$ пространства $A_n(u+du)$ в некоторый репер $\{A(u, du), e_i(u, du)\}$ пространства $A_n(u)$:

$$A(u+du) \to A(u, du) = e_i(u)\,\omega^i + \dots,$$
$$e_i(u+du) \to e_i(u, du) = e_i(u) + \omega_i^k e_k(u) + \dots \tag{1}$$
$$(i, j, k = 1, 2, \dots, n; \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, n-1),$$

причем пфаффовые формы ω^i, ω_j^i (формы аффинной связности) имеют структуру [4]:

$$D\omega^i = [\omega^k;\ \omega_k^i] + R_{pq}^i[\omega^p, \omega^q],$$
$$D\omega_j^i = [\omega_j^k, \omega_k^i] + R_{jpq}^i[\omega^p, \omega^q]. \tag{2}$$

Величины R_{pq}^i и R_{jpq}^i образуют тензор кручения — кривизны пространства аффинной связности, причем $R_{(pq)}^i = 0$, $R_{j(pq)}^i = 0$.

2. *Последовательность фундаментальных объектов гиперповерхности.* Пусть в $\mathfrak{M}_n$ задана гиперповерхность $\mathfrak{M}_{n-1}$:

$$u^i = f^i(v^\alpha),$$

где v^α — независимые параметры. Если пфаффовые формы Θ^α образуют базис картановского кольца дифференциальных форм, порожденного дифференциалами параметров v^α, то дифференциальные уравнения гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$ можно записать в следующем виде:

$$\omega^i = \Lambda_\alpha^i \Theta^\alpha, \tag{3}$$

где

$$D\Theta^\alpha = [\Theta^\beta, \Theta_\beta^\alpha],$$
$$D\Theta_\beta^\alpha = [\Theta_\beta^\gamma, \Theta_\gamma^\alpha] + [\Theta_{\beta\gamma}^\alpha, \Theta^\gamma], \tag{4}$$
$$D\Theta_{\beta\gamma}^\alpha = [\Theta_{\beta\gamma}^\varepsilon, \Theta_\varepsilon^\alpha] - [\Theta_{\varepsilon\gamma}^\alpha, \Theta_\beta^\varepsilon] - [\Theta_{\beta\varepsilon}^\alpha, \Theta_\gamma^\varepsilon] + [\Theta_{\beta\gamma\varepsilon}^\alpha, \Theta^\varepsilon].$$

Если ввести обозначение

$$\nabla T_{\alpha_1\dots\alpha_p}^{i_1\dots i_q} = dT_{\alpha_1\dots\alpha_p}^{i_1\dots i_q} - \sum_{s=1}^{p} T_{\alpha_1\dots\alpha\dots\alpha_p}^{i_1\dots i_q}\,\Theta_{\alpha_s}^\alpha + \sum_{s=1}^{q} T_{\alpha_1\dots\alpha_p}^{i_1\dots i\dots i_q}\,\omega_i^{i_s},$$

то, продолжая систему (3), получаем

$$\nabla\Lambda_\alpha^i = \Lambda_{\alpha\beta}^i\Theta^\beta, \tag{5}$$
$$\nabla\Lambda_{\alpha\beta}^i + \Lambda_\gamma^i\Theta_{\alpha\beta}^\gamma = \Lambda_{\alpha\beta\gamma}^i\Theta^\gamma, \tag{6}$$
$$\nabla\Lambda_{\alpha\beta\gamma}^i + \Lambda_{\alpha\sigma}^i\Theta_{\beta\gamma}^\sigma + \Lambda_{\sigma\beta}^i\Theta_{\alpha\gamma}^\sigma + \Lambda_{\sigma\gamma}^i\Theta_{\alpha\beta}^\sigma - \Lambda_\sigma^i\Theta_{\alpha\beta\gamma}^\sigma = \Lambda_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}^i\Theta^\varepsilon, \tag{7}$$

где

$$\Lambda_{[\alpha\beta]}^i = -R_{pq}^i\Lambda_\alpha^p\Lambda_\beta^q, \tag{8}$$
$$\Lambda_{\alpha_1\dots\alpha_s[\alpha\beta]}^i = -R_{pqr}^i\Lambda_{\alpha_1\dots\alpha_s}^p\Lambda_\alpha^q\Lambda_\beta^r. \tag{9}$$

Системы величин

$$\Lambda_\alpha^i;\ \Lambda_\alpha^i, \Lambda_{\alpha\beta}^i;\ \Lambda_\alpha^i, \Lambda_{\alpha\beta}^i, \Lambda_{\alpha\beta\gamma}^i;\ \Lambda_\alpha^i, \Lambda_{\alpha\beta}^i, \Lambda_{\alpha\beta\gamma}^i, \Lambda_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}^i;\dots \tag{10}$$

образуют последовательность фундаментальных дифференциально-геометрических объектов гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$ в смысле Г. Ф. Лаптева [4].

3. *Неголономное ковариантное дифференцирование.* Если в пространстве аффинной связности $\mathfrak{M}_n$ определено относительное тензорное поле $T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ веса p:

$$\nabla T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} - pT^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}\omega^k_k = T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p, k}\omega^k, \qquad (11)$$

то систему величин $T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p, k}$ назовем неголономной ковариантной производной рассматриваемого поля. В том случае, когда репер $\{A, e_i\}$ голономный, т. е. $\omega^i = du^i$, структурные уравнения (2) дают:

$$[du^k, \ \omega^i_k + R^i_{kp}du^p] = 0, \qquad (12)$$

$$D\omega^i_j = [\omega^k_j, \ \omega^i_k] + R^i_{jpq}[du^p, \ du^q]. \qquad (13)$$

Применяя лемму Картана к равенствам (12), мы получим

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{jk}du^k, \qquad (14)$$

где

$$R^i_{jk} = -\Gamma^i_{[jk]}.$$

Если подставить значения форм ω^i_j в (13), то получим обычную формулу для определения компонент тензора кривизны R^i_{jpq} через Γ^i_{jk} и $\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial u^p}$:

$$R^i_{jpq} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^i_{jq}}{\partial u^p} - \frac{\partial \Gamma^i_{jp}}{\partial u^q}\right) - \Gamma^k_{j[p}\Gamma^i_{|k|q]}.$$

Внося значения форм ω^i и ω^i_j в дифференциальные уравнения (11), получаем равенства

$$\nabla_k T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} = T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p, k}, \qquad (15)$$

которые и оправдывают выше приведенное определение неголономной ковариантной производной.

Дифференцируя уравнения (11) внешним образом, в силу структурных уравнений пространства аффинной связности и леммы Картана, мы получим

$$\nabla T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p, k} - pT^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p, k}\omega^s_s = T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p, kr}\omega^r, \qquad (16)$$

где

$$T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p, [kr]} = \sum_{a=1}^{p} T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots s\ldots i_p} R^s_{i_a kr} - \sum_{a=1}^{q} T^{j_1\ldots s\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} R^{j_a}_{skr} + pT^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} R^s_{skr} + T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p, s} R^s_{kr}.$$

Нетрудно заметить, что в случае голономного репера

$$\nabla_r\nabla_k T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} = T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p; kr},$$

$$\nabla_{[r}\nabla_{k]} T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} = \sum_{a=1}^{p} T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots s\ldots i_p} R^s_{i_a kr} - \sum_{a=1}^{q} T^{j_1\ldots s\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} R^{j_a}_{skr} +$$
$$+ pT^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} R^s_{skr} + \nabla_s T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} R^s_{kr}. \qquad (17)$$

Таким образом, систему величин $T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p, kr}$ естественно назвать второй неголономной ковариантной производной рассматриваемого тензорного поля. Аналогичным образом определяются неголономные ковариантные производные любого порядка. Операция неголономного ковариантного дифференцирования обладает такими же свойствами как и операция ковариантного (абсолютного) дифференцирования. Дифференциально-геометрический объект $T^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$, определенный на гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$, называется p раз ковариантным и q раз контравариантным относительным тензорным полем веса P гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$, если его компоненты являются решением системы дифференциальных уравнений

$$\nabla T^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p} - PT^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\Theta^{\gamma}_{\gamma} = T^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\gamma}\Theta^{\gamma}. \tag{18}$$

Дифференциально-геометрический объект $T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}$, определенный на гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$, называется $p+q$ раз контравариантным и $r+s$ раз ковариантным относительным смешанным тензорным полем двойного веса $(P,\ Q)$ гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$, если его компоненты являются решением системы дифференциальных уравнений

$$\nabla T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\beta_q} - T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}(P\omega^k_k + Q\Theta^{\gamma}_{\gamma}) = T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q,\,\gamma}\Theta^{\gamma}. \tag{19}$$

Однокомпонентное относительное тензорное поле веса P называется относительным инвариантом веса P, а однокомпонентное относительное смешанное тензорное поле двойного веса $(P,\ Q)$ называется смешанным относительным инвариантом двойного веса $(P,\ Q)$.

Дифференциально-геометрический объект $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$, определенный на гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$, называется объектом аффинной связности, если его компоненты являются решением системы дифференциальных уравнений:

$$\nabla\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} + \Theta^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta,\,\varepsilon}\Theta^{\varepsilon}, \tag{20}$$

причем тензор кручения и кривизны этой связности имеет вид

$$R^{\gamma}_{\alpha\beta} = -\Gamma^{\gamma}_{[\alpha\beta]},$$
$$R^{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma} = -\Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\,[\beta\gamma]} - \Gamma^{\varepsilon}_{\sigma\,[\beta}\Gamma^{\sigma}_{|\alpha|\,\gamma]}. \tag{21}$$

Процесс неголономного ковариантного дифференцирования на гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$ введем следующим образом. Дифференцируя внешним образом (18) и (19), в силу леммы Картана, получим

$$\nabla T^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\gamma} - PT^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\Theta^{\sigma}_{\sigma} + \sum_{a=1}^{p} T^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\sigma\ldots\alpha_p}\Theta^{\sigma}_{\alpha_a\gamma} -$$
$$-\sum_{a=1}^{q} T^{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\Theta^{\beta_a}_{\sigma\gamma} - PT^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\Theta^{\sigma}_{\sigma\gamma} = T^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\gamma\varepsilon}\Theta^{\varepsilon} \tag{22}$$

и

$$\nabla T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q,\,\gamma} - T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q,\,\gamma}(P\omega^k_k + Q\Theta^{\sigma}_{\sigma}) + \sum_{a=1}^{q} T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\sigma\ldots\alpha_q}\Theta^{\sigma}_{\alpha_a\gamma} -$$
$$-\sum_{a=1}^{s} T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}\Theta^{\beta_a}_{\sigma\gamma} + QT^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}\Theta^{\sigma}_{\sigma\gamma} = T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q,\,\gamma\sigma}\Theta^{\sigma}, \tag{23}$$

где

$$T^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\gamma\varepsilon}=T^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\varepsilon\gamma}$$

и

$$T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q,\,[\gamma\sigma]}=\sum_{a=1}^{p}T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots k\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}R^k_{i_a hl}\Lambda^h_\gamma\Lambda^l_\sigma-$$

$$-\sum_{a=1}^{r}T^{j_1\ldots k\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}R^{j_a}_{khl}\Lambda^h_\gamma\Lambda^l_\sigma+PT^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}R^k_{khl}\Lambda^h_\gamma\Lambda^l_\sigma.$$

Так как в дифференциальные уравнения (20), (21) и (23) входят формы $\Theta^\gamma_{\alpha\beta}$ или линейные комбинации этих форм с компонентами рассматриваемых тензоров, то, исключая их мы получим, что система величин

$$T^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\gamma}-\sum_{a=1}^{p}T^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\sigma\ldots\alpha_p}\Gamma^\sigma_{\alpha_a\gamma}+\sum_{a=1}^{q}T^{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\Gamma^{\beta_a}_{\sigma\gamma}-PT^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\Gamma^\sigma_{\sigma\gamma}$$

образует $p+1$ раз ковариантное и q раз контравариантное относительное тензорное поле веса P, а система величин

$$T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q,\,\gamma}-\sum_{a=1}^{q}T^{j_1\ldots j_q\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\sigma\ldots\alpha_q}\Gamma^\sigma_{\alpha_a\gamma}+\sum_{a=1}^{s}T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}\Gamma^{\beta_a}_{\sigma\gamma}+$$

$$+QT^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}\Gamma^\sigma_{\sigma\gamma}$$

образует $p+q+1$ раз ковариантное и $r+s$ раз контравариантное относительное смешанное тензорное поле двойного веса $(P,\ Q)$. Эти тензоры мы будем называть неголономными ковариантными производными соответствующих тензоров (или смешанных тензоров), а процесс получения таких производных — неголономным ковариантным дифференцированием на гиперповерхности. Эти неголономные ковариантные производные будем обозначать следующим образом

$$D_\gamma T^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}=T^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\gamma}-\sum_{a=1}^{p}T^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\sigma\ldots\alpha_p}\Gamma^\sigma_{\alpha_a\gamma}+\sum_{a=1}^{q}T^{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_q}\Gamma^{\beta_a}_{\sigma\gamma}-PT^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\Gamma^\sigma_{\sigma\gamma},$$

$$D_\gamma T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}=T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q,\,\gamma}-\sum_{a=1}^{q}T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\sigma\ldots\alpha_q}\Gamma^\sigma_{\alpha_a\gamma}+$$

$$+\sum_{a=1}^{s}T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}\Gamma^{\beta_a}_{\sigma\gamma}-PT^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}\Gamma^\sigma_{\sigma\gamma}. \tag{24}$$

Желая составить ковариантные производные относительного смешанного тензорного поля, мы должны знать частные производные этого поля, т. е. систему дифференциальных уравнений:

$$dT^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}=\frac{\partial T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}}{\partial v^\gamma}dv^\gamma,$$

и объект аффинной связности $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$. Совершенно аналогично составляются неголономные ковариантные производные смешанного относительного тензорного поля, но только частные производные $\partial_\gamma T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_p}$ заменяются величинами $T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q,\,\gamma}$.

Кососимметрическая часть второй неголономной ковариантной производной относительного тензорного поля, определенного на гиперповерхности имеет следующий вид:

$$D_{[\beta}D_{\alpha]}T^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}=\sum_{a=1}^{p}T^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\sigma\ldots\alpha_p}R^{\sigma}_{\alpha_a\alpha\beta}-$$

$$-\sum_{a=1}^{q}T^{\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}R^{\beta_a}_{\sigma\alpha\beta}+D_\sigma T^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}R^{\sigma}_{\alpha\beta}+PT^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}R^{\sigma}_{\sigma\alpha\beta}, \tag{25}$$

а смешанного относительного тензорного поля —

$$D_{[\beta}D_{\alpha]}T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}=\sum_{a=1}^{p}T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots k\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}R^{k}_{i_a hl}\Lambda^h_\alpha\Lambda^l_\beta-$$

$$-\sum_{a=1}^{r}T^{j_1\ldots k\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}R^{j_a}_{khl}\Lambda^h_\alpha\Lambda^l_\beta+\sum_{a=1}^{q}T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\sigma\ldots\alpha_q}R^{\sigma}_{\alpha_a\alpha\beta}-$$

$$-\sum_{a=1}^{s}T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}R^{\beta_a}_{\sigma\alpha\beta}+D_\sigma T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}R^{\sigma}_{\alpha\beta}+$$

$$+T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}(PR^k_{khl}\Lambda^h_\alpha\Lambda^l_\beta+QR^{\sigma}_{\sigma\alpha\beta}). \tag{26}$$

Если репер $\{A,\ e_i\}$ голономный и $\Theta^\alpha=dv^\alpha$, $\Theta^\alpha_\beta=0$, $\Theta^\alpha_{\beta\gamma}=0$, то из (3), (18) и (19) вытекают следующие равенства

$$\Lambda^i_\alpha=\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha},\quad T^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\alpha}=\frac{\partial T^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}}{\partial v^\alpha},$$

$$T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q,\,\alpha}=\frac{\partial T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}}{\partial v^\alpha}-\sum_{a=1}^{p}T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots k\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}\Gamma^k_{i_a s}\Lambda^s_\alpha+$$

$$+\sum_{a=1}^{r}T^{j_1\ldots k\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}\Gamma^{j_a}_{ks}\Lambda^s_\alpha-PT^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}\Gamma^k_{ks}\Lambda^s_\alpha. \tag{27}$$

В этом случае формулы (24_1) и (24_2), в силу соотношений (27), принимают следующий вид:

$$D_\alpha T^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}=\frac{\partial T^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}}{\partial v^\alpha}-\sum_{a=1}^{p}T^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\sigma\ldots\alpha_p}\Gamma^{\sigma}_{\alpha_a\alpha}+\sum_{a=1}^{q}T^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\Gamma^{\beta_a}_{\sigma\alpha}+PT^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\Gamma^{\sigma}_{\sigma\alpha},$$

$$D_\alpha T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}=\frac{\partial T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}}{\partial v^\alpha}-\sum_{a=1}^{p}T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots k\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}\Gamma^k_{i_a h}\Lambda^h_\alpha+$$

$$+\sum_{a=1}^{r}T^{j_1\ldots k\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}\Gamma^{j_a}_{kh}\Lambda^h_\alpha-\sum_{a=1}^{q}T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\sigma\ldots\alpha_q}\Gamma^{\sigma}_{\alpha_a\alpha}+$$

$$+\sum_{a=1}^{s}T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}\Gamma^{\beta_a}_{\sigma\alpha}-T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}(P\Gamma^l_{lh}\Lambda^h_\alpha+Q\Gamma^{\sigma}_{\sigma\alpha}). \tag{28}$$

Оказывается, что линейный дифференциальный оператор D^*_α, определенный следующим образом

$$D^*_\alpha T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}\left(T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q,\,\alpha}\right)_0-\sum_{a=1}^{q}\left(T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\sigma\ldots\alpha_q}\right)_0\Gamma^\sigma_{\alpha_a\gamma}+$$

$$+\sum_{a=1}^{s}\left(T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\sigma\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}\right)_0\Gamma^{\beta_a}_{\sigma\gamma}-P\left(T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}\right)_0\Gamma^\sigma_{\sigma\gamma},\tag{24'}$$

где

$$\left(T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q,\,\alpha\beta\gamma\ldots\chi}\right)=T^{j_1\ldots j_r\beta_1\ldots\beta_s}_{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q,\,(\alpha\beta)\gamma\ldots\chi},$$

т. е. если компоненты смешанного тензора являются функциями R^i_{jk}, то компоненты тензора кручения заменяются нулями, обладает всеми свойствами неголономной ковариантной производной D_α.

§ 2. ВНУТРЕННИЕ АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

4. *Основной ковектор*. Если ранг матрицы $\|\Lambda^i_\alpha\|$ равен $n-1$, то векторы

$$\Lambda_\alpha=\Lambda^i_\alpha e_i\tag{29}$$

линейно независимы и определяют в каждой точке A гиперповерхности гиперплоскость $A_{n-1}(v)\subset A_n(v)$, которая называется касательной гиперплоскостью. Смешанный тензор Λ^i_α называется неголономным связующим тензором гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$.

Гиперповерхность $\mathfrak{M}_{n-1}$ пространства $\mathfrak{M}_n$ называется оснащенной (или нормализованной), если в каждом локальном пространстве $A_n(v)$ задан оснащающий вектор, непринадлежащий касательной гиперплоскости $A_{n-1}(v)$ и проходящий через точку A. Оснащение гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$ в $\mathfrak{M}_n$ называется внутренне аффинным, если координаты оснащающего вектора образованы из компонент объектов (10). В таком случае оснащающий вектор называется аффинной нормалей гиперповерхности, а самое оснащение — инвариантным оснащением гиперповерхности. Если координаты оснащающего вектора являются функциями объекта $(\Lambda^i_{\alpha_1},\ \Lambda^i_{\alpha_1\alpha_2},\ \ldots,\ \Lambda^i_{\alpha_1\ldots\alpha_r})$, то число r называется порядком рассматриваемого оснащения.

Система величин $\Lambda^i_{\alpha\beta}$, как это следует из (6), не образует геометрического объекта. Очевидно, что при помощи ковектора m_i, компоненты которого являются решением системы

$$\Lambda^i_\alpha m_i=0,\tag{30}$$

из величин $\Lambda^i_{\alpha\beta}$ можно построить тензор. Так как векторы Λ_α линейно независимы, то система (30) определяет на $\mathfrak{M}_{n-1}$ поле ковариантного вектора с точностью до скалярного множителя λ. Общее решение уравнений (30) имеет вид:

$$\tilde m_i=\lambda\sigma_{ii_1\ldots i_{n-1}}\Lambda^{i_1}_{[1}\Lambda^{i_2}_{2}\ldots\Lambda^{i_{n-1}}_{n-1]},\tag{31}$$

где

$$\sigma_{i_1\ldots i_n}=\delta^{1\ldots n}_{i_1\ldots i_n},$$

а $\delta^{j_1\ldots j_n}_{i_1\ldots i_n}$ — обобщенные символы Кронекера—Крамлета. Положим

$$\tilde m_i|_{\lambda=1}=m_i\quad(\tilde m_i=\lambda m_i).\tag{32}$$

Дифференцирование этих выражений, в силу (5) и (30), дает

$$\nabla m_i = m_{i\alpha}\Theta^{\alpha}, \tag{33}$$

где

$$m_{i\alpha} = \frac{\partial m_i}{\partial \Lambda^k_\beta} A^k_{\beta\alpha}, \quad A^k_{\beta\alpha} = (-1)^{k+\alpha+1}\Lambda^k_{\beta\alpha}.$$

Ковектор m_i будем называть основным ковектором первого порядка гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$. Так как

$$d\lambda = \lambda_\alpha \Theta^{\alpha}, \tag{34}$$

то при перенормировании основного ковектора m_i, согласно (32), величины $m_{i\alpha}$ преобразуются по следующему закону:

$$\tilde{m}_{i\alpha} = \lambda m_{i\alpha} + m_i\lambda_\alpha. \tag{35}$$

5. *Основные тензоры второго порядка*. Фундаментальный дифференциально-геометрический объект второго порядка $(\Lambda^i_\alpha, \Lambda^i_{\alpha\beta})$, присоединенный к $\mathfrak{M}_{n-1}$, охватывает тензоры:

$$a_{\alpha\beta} = \Lambda^i_{\alpha\beta} m_i, \tag{36}$$

$$b_{\alpha\beta} = a_{(\alpha\beta)}. \tag{37}$$

Дифференцирование выражений (36) дает:

$$\nabla a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta,\,\gamma}\Theta^{\gamma}, \tag{38}$$

где

$$a_{\alpha\beta,\,\gamma} = \Lambda^i_{\alpha\beta\gamma} m_i + \Lambda^i_{\alpha\beta} m_{i\gamma}. \tag{39}$$

Тензор $a_{\alpha\beta}$ называется основным ковариантным тензором гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$, а его дискриминант

$$a = \det \| a_{\alpha\beta} \| \tag{40}$$

— основным дискриминантом второго порядка гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$. Если $a \neq 0$, то

$$d\ln\sqrt{|a|} - \Theta^{\alpha}_{\alpha} = a_\alpha\Theta^{\alpha}, \tag{41}$$

где

$$a_\alpha = \frac{1}{2}\, {}^*a^{\beta\gamma} a_{\beta\gamma,\,\alpha} \tag{42}$$

и

$${}^*a^{\alpha\beta} = \frac{\partial \ln |a|}{\partial a_{\alpha\beta}}. \tag{43}$$

Дискриминант тензора $b_{\alpha\beta}$:

$$b = \det \| b_{\alpha\beta} \| \tag{44}$$

назовем дополнительным дискриминантом второго порядка гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$. Его дифференциальное уравнение имеет вид

$$d\ln\sqrt{|b|} - \Theta^{\alpha}_{\alpha} = b_\alpha\Theta^{\alpha}, \tag{45}$$

где

$$b_\alpha = \frac{1}{2} b^{\beta\gamma} a_{(\beta\gamma),\,\alpha}, \tag{46}$$

$$b^{\alpha\beta} = \frac{\partial \ln |b|}{\partial b_{\alpha\beta}}. \tag{47}$$

Очевидно, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1 & m_{11}\ldots m_{1,\,n-1} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ m_n & m_{n1}\ldots m_{n,\,n-1} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{48}$$

При преобразованиях основного ковектора m_i величины $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, a, b, a_α, b_α и Δ преобразуются следующим образом:

$$\tilde{a}_{\alpha\beta}=\lambda a_{\alpha\beta}, \quad \tilde{b}_{\alpha\beta}=\lambda b_{\alpha\beta}, \tag{49}$$

$$\tilde{a}=\lambda^{n-1}a, \quad \tilde{b}=\lambda^{n-1}b, \tag{50}$$

$$\tilde{a}_\alpha=a_\alpha+\frac{n-1}{2\lambda}\lambda_\alpha, \quad \tilde{b}_\alpha=b_\alpha+\frac{n-1}{2\lambda}\lambda_\alpha, \tag{51}$$

$$\tilde{\Delta}=\lambda^n\Delta. \tag{52}$$

Частичные продолжения уравнений (41) и (45) дают

$$\nabla a_\alpha+\Theta^\beta_{\beta\alpha}=p_{\alpha\beta}\Theta^\beta, \quad \nabla b_\alpha+\Theta^\beta_{\beta\alpha}=q_{\alpha\beta}\Theta^\beta, \tag{53}$$

где

$$p_{[\alpha\beta]}=0, \quad q_{[\alpha\beta]}=0.$$

6. *Деривационные уравнения*. Если задано поле оснащающих векторов $\boldsymbol{n}=n^i\boldsymbol{e}_i$ гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$, то в каждом $A_n(v)$ существует n линейно независимых векторов $\boldsymbol{\Lambda}_\alpha$ и $\boldsymbol{n}$. Разложение векторов $\Lambda^i_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_i$ и $n^i_\alpha\boldsymbol{e}_i$, где

$$\nabla n^i=n^i_\alpha\Theta^\alpha, \quad \nabla n^i_\alpha=n^i_{\alpha\beta}\Theta^\beta,$$
$$n^i_{[\alpha\beta]}=-n^kR^i_{kpq}\Lambda^p_\alpha\Lambda^q_\beta, \tag{54}$$

по векторам $\boldsymbol{\Lambda}_\alpha$ и $\boldsymbol{n}$ называются деривационными уравнениями гиперповерхности:

$$\Lambda^i_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_i=\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\boldsymbol{\Lambda}_\gamma+a'_{\alpha\beta}\boldsymbol{n}, \tag{55}$$

$$n^i_\alpha\boldsymbol{e}_i=a^\beta_\alpha\boldsymbol{\Lambda}_\beta+n_\alpha\boldsymbol{n}. \tag{56}$$

Если задано векторное поле n^i, то $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ и $a'_{\alpha\beta}$ определяются однозначно. Если $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ и $a'_{\alpha\beta}$ заданы, то n^i определяются тоже однозначно ($\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\neq\Gamma^\gamma_{\beta\alpha}$). Дифференцируя (55) и (56), в силу (5), (6), (54), (55), (56) и уравнений $d\boldsymbol{e}_i=\omega^k_i\boldsymbol{e}_k$, мы получим

$$\left.\begin{aligned}(\nabla\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}+\Theta^\gamma_{\alpha\beta})\boldsymbol{\Lambda}_\gamma+(\nabla a'_{\alpha\beta})\boldsymbol{n}&\equiv0,\\ (\nabla a^\beta_\alpha)\boldsymbol{\Lambda}_\beta+(\nabla n_\alpha)\boldsymbol{n}&\equiv0.\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{mod}\ \Theta^\alpha)$$

Отсюда, в силу линейной независимости векторов $\boldsymbol{\Lambda}_\alpha$ и $\boldsymbol{n}$, следует, что величины $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ являются решениями системы (20), а $a'_{\alpha\beta}$ и n_α — следующих систем

$$\nabla a'_{\alpha\beta}=a'_{\alpha\beta,\gamma}\Theta^\gamma, \tag{57}$$

$$\nabla a^\beta_\alpha=a^\beta_{\alpha,\gamma}\Theta^\gamma, \tag{58}$$

$$\Delta n_\alpha=n_{\alpha,\beta}\Theta^\beta, \tag{59}$$

т. е. $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ — объект аффинной связности, $a'_{\alpha\beta}$, a^β_α и n_α — тензоры. Так как неголономная ковариантная производная объекта Λ^i_α имеет вид

$$\overset{\Gamma}{D}_\beta\Lambda^i_\alpha=\Lambda^i_{\alpha\beta}-\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\Lambda^i_\gamma,$$

то уравнения (55) можно переписать так

$$\overset{\Gamma}{D}_\beta\Lambda^i_\alpha=a'_{\alpha\beta}n^i.$$

Если в качестве тензорного поля $a'_{\alpha\beta}$ взять $a_{\alpha\beta}$, то любому решению системы (54) однозначно соответствует решение системы (20).

7. *Собственная связность тензора* $b_{\alpha\beta}$. Величины $X^\gamma_{\alpha\beta}$, определенные следующим образом

$$X^\gamma_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}b^{\gamma\sigma}(b_{\alpha\sigma,\beta}+b_{\sigma\beta,\alpha}-b_{\alpha\beta,\sigma}), \tag{60}$$

называются неголономными символами Кристоффеля второго рода или коэффициентами собственной связности тензора $b_{\alpha\beta}$. Дифференцирование этих выражений дает

$$\nabla X^{\gamma}_{\alpha\beta}+\Theta^{\gamma}_{\alpha\beta}=X^{\gamma}_{\alpha\beta,\sigma}\Theta^{\sigma}, \tag{61}$$

где $X^{\gamma}_{\alpha\beta,\sigma}$ — рациональные функции от компонент объекта (Λ^i_α, $\Lambda^i_{\alpha\beta}$, $\Lambda^i_{\alpha\beta\gamma}$, $\Lambda^i_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}$). При перенормировании ковектора m_i, т. е. при конформном преобразовании (49) тензора $b_{\alpha\beta}$, неголономные символы Кристоффеля $X^{\gamma}_{\alpha\beta}$ преобразуются по закону

$$\tilde{X}^{\gamma}_{\alpha\beta}=X^{\gamma}_{\alpha\beta}+G^{\gamma\sigma}_{\alpha\beta}\tilde{\lambda}_\sigma, \tag{62}$$

где

$$G^{\gamma\sigma}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\delta^{\gamma}_{\beta}\delta^{\sigma}_{\alpha}+\delta^{\gamma}_{\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta}-b^{\gamma\sigma}b_{\alpha\beta}\right) \tag{63}$$

и

$$\tilde{\lambda}_\alpha=\frac{\lambda_\alpha}{\lambda}. \tag{64}$$

очевидно, что [2]:

$$G^{\gamma\sigma}_{\alpha\gamma}\tilde{\lambda}_\sigma=\frac{n-1}{2}\tilde{\lambda}_\alpha,\quad X^{\beta}_{\alpha\beta}=b_\alpha, \tag{65}$$

$$b^{\alpha\beta}G^{\gamma\sigma}_{\alpha\beta}\tilde{\lambda}_\sigma=\frac{3-n}{2}b^{\gamma\sigma}\tilde{\lambda}_\sigma. \tag{66}$$

Если на гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$ задано такое ковариантное векторное поле

$$\nabla v_\alpha=v_{\alpha,\beta}\Theta^\beta, \tag{67}$$

что

$$v_\alpha=v_\alpha-\tilde{\lambda}_\alpha, \tag{68}$$

то этому полю на гиперповерхности соответствует симметрическая связность

$$\Lambda^{\gamma}_{\alpha\beta}=X^{\gamma}_{\alpha\beta}+G^{\gamma\sigma}_{\alpha\beta}v_\sigma, \tag{69}$$

инвариантная относительно конформных преобразований тензора $b_{\alpha\beta}$. В этом случае

$$\Lambda^{\beta}_{\alpha\beta}=b_\alpha+\frac{1}{2}(n-1)v_\alpha. \tag{70}$$

Так как неголономные ковариантные производные объекта Λ^i_α относительно кристоффелевой связности имеют вид:

$$\begin{gathered}\overset{X}{D}_\beta\Lambda^i_\alpha=\Lambda^i_{\alpha\beta}-\Lambda^i_\gamma X^{\gamma}_{\alpha\beta},\\ \overset{X}{D}_\gamma(\overset{X}{D}_\beta\Lambda^i_\alpha)=\Lambda^i_{\alpha\beta\gamma}-\Lambda^i_{\sigma\gamma}X^{\sigma}_{\alpha\beta}-\Lambda^i_\sigma X^{\sigma}_{\alpha\beta,\gamma}-\overset{X}{D}_\sigma\Lambda^i_\alpha X^{\sigma}_{\beta\gamma}-\overset{X}{D}_\beta\Lambda^i_\sigma X^{\sigma}_{\alpha\gamma},\end{gathered} \tag{71}$$

то величины

$$\varphi_\alpha=\frac{2}{n+1}b^{\beta\gamma}(\overset{X}{D}{}^{*}_{\alpha}\overset{X}{D}{}^{*}_{\beta}\Lambda^i_\gamma)m_i \tag{72}$$

и

$$\varphi^*_\alpha=\frac{2}{n+1}b^{\beta\gamma}(\overset{X}{D}{}^{*}_{\beta}\overset{X}{D}{}^{*}_{\alpha}\Lambda^i_\gamma)m_i \tag{73}$$

являются ковекторами, компоненты которых при конформных преобразованиях (49) преобразуются по закону (68). Итак, симметрические объекты аффинных связностей

$$\underset{\varphi}{\Lambda}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}=Y^{\gamma}_{\alpha\beta}+G^{\gamma\sigma}_{\alpha\beta}\varphi_\alpha,\quad \underset{\varphi^*}{\Lambda}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}=X^{\gamma}_{\alpha\beta}+G^{\gamma\sigma}_{\alpha\beta}\varphi^*_\sigma \tag{74}$$

являются инвариантными относительно конформных преобразований тензора $b_{\alpha\beta}$. Эти связности являются инвариантно присоединенными к гиперповерхности, но не принадлежат к пучку индуцированных связностей гиперповерхности*.

8. *Связность Эйнштейна.* Объект аффинной связности $Y^{\gamma}_{\alpha\beta}$, при помощи которого построенные аффинные связности

$$\Theta^{\alpha},\quad \underset{1}{\Theta^{\alpha}_{\beta}} = \Theta^{\alpha}_{\beta} + Y^{\alpha}_{\beta\gamma}\Theta^{\beta}$$

и

$$\Theta^{\alpha},\quad \underset{2}{\Theta^{\alpha}_{\beta}} = \Theta^{\alpha}_{\beta} + Y^{\alpha}_{\gamma\beta}\Theta^{\gamma}$$

являются слабо сопряженными** относительно тензора $a_{\alpha\beta}$ (с нулевым дополнительным ковектором):

$$a_{\alpha\beta,\,\gamma} - a_{\sigma\beta}Y^{\sigma}_{\alpha\gamma} - a_{\alpha\sigma}Y^{\sigma}_{\gamma\beta} = 0, \tag{75}$$

назовем неголономным объектом аффинной связности Эйнштейна. Если $\overset{Y}{D}_{\gamma}$ — символ неголономной ковариантной производной относительно объекта $Y^{\gamma}_{\alpha\beta}$, то систему эйнштейновых уравнений (75) можно переписать так

$$\overset{Y}{D}_{\gamma}a_{\alpha\beta} = 2a_{\alpha\sigma}S^{\sigma}_{\gamma\beta}, \tag{76}$$

где

$$S^{\gamma}_{\alpha\beta} = Y^{\gamma}_{[\alpha\beta]}. \tag{77}$$

Так как

$$a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + c_{\alpha\beta}, \tag{78}$$

то

$$\overset{Y}{D}_{\gamma}b_{\alpha\beta} = 2S^{\sigma}_{\gamma(\alpha}a_{\beta)\sigma}, \tag{79}$$

$$\overset{Y}{D}_{\gamma}c_{\alpha\beta} = 2S^{\sigma}_{\gamma[\alpha}a_{\beta]\sigma}, \tag{80}$$

где

$$c_{\alpha\beta} = -R^{i}_{pq}\Lambda^{p}_{\alpha}\Lambda^{q}_{\beta}m_{i}. \tag{81}$$

Общее решение системы (62) имеет вид:

$$Y^{\alpha}_{\beta\gamma} = X^{\alpha}_{\beta\gamma} + S^{\alpha}_{\beta\gamma} + 2b^{\alpha\sigma}S^{\tau}_{\sigma(\gamma}c_{\beta)\tau}. \tag{82}$$

Обозначив

$$\overset{X}{D}_{\gamma}c_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta,\,\gamma} - c_{\sigma\beta}X^{\sigma}_{\alpha\gamma} - c_{\alpha\sigma}X^{\sigma}_{\beta\gamma}, \tag{83}$$

в силу уравнений (63) и циклировании по индексам α, β и γ мы получим:

$$X^{\sigma\rho\tau}_{\alpha\beta\gamma}S_{\sigma\rho\tau} = \frac{1}{2}K_{\alpha\beta\gamma}, \tag{84}$$

где

$$K_{\alpha\beta\gamma} = \overset{X}{D}_{\alpha}c_{\beta\gamma} + \overset{X}{D}_{\beta}c_{\gamma\alpha} + \overset{X}{D}_{\gamma}c_{\alpha\beta}, \tag{85}$$

$$S_{\sigma\rho\tau} = b_{\tau\chi}S^{\chi}_{\sigma\rho}, \tag{86}$$

$$X^{\sigma\rho\tau}_{\alpha\beta\gamma} = \delta^{[\sigma}_{\alpha}\delta^{\rho]}_{\beta}\delta^{\tau}_{\gamma} - 2\delta^{[\sigma}_{\gamma}c^{\rho]}_{[\alpha}c^{\tau}_{\beta]} + 2c^{[\sigma}_{[\alpha}\delta^{\rho]}_{\beta]}c^{\tau}_{\gamma}, \tag{87}$$

$$c^{\beta}_{\alpha} = b^{\beta\sigma}c_{\alpha\sigma}. \tag{88}$$

Система (67) имеет единственное решение $S_{\alpha\beta\gamma}$ тогда и только тогда, когда ранг матрицы $\|X^{\sigma\rho\tau}_{\alpha\beta\gamma}\|$ равен $\frac{n^2(n-1)}{2}$. Так как решение системы (84) имеет вид

$$S_{\sigma\rho\tau} = \frac{1}{2}K_{\alpha\beta\gamma}Y^{\alpha\beta\gamma}_{\sigma\rho\tau},$$

---

* Если $R^{i}_{jk}\neq 0$, то и тензор кручения любой индуцированной связности на гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$ отличен от нуля.

** Понятие пары слабо сопряженных аффинных связностей введено в работе [1].

где

$$X^{\alpha\beta\gamma}_{\sigma\rho\tau} Y^{\sigma\rho\tau}_{\xi\eta\zeta} = \delta^{[\alpha}_{[\xi} \delta^{\beta]}_{\eta]} \delta^{\gamma}_{\zeta},$$

то компоненты аффинной связности Эйнштейна определяются следующими формулами [9]:

$$Y^{\nu}_{\lambda\mu} = X^{\nu}_{\lambda\mu} + \left(\frac{1}{2} K_{\alpha\beta\gamma} Y^{\alpha\beta\gamma}_{\lambda\mu\sigma} + K_{\alpha\beta\gamma} Y^{\alpha\beta\gamma}_{\sigma(\lambda|\delta|} c^{\delta}_{\mu)}\right) b^{\sigma\nu}. \tag{89}$$

В силу того, что

$$\tilde{K}_{\alpha\beta\gamma} = \lambda K_{\alpha\beta\gamma}, \quad \tilde{S}_{\alpha\beta\gamma} = \lambda S_{\alpha\beta\gamma},$$

мы имеем

$$\tilde{Y}^{\gamma}_{\alpha\beta} = Y^{\gamma}_{\alpha\beta} + G^{\gamma\sigma}_{\alpha\beta} \tilde{\lambda}_{\sigma}, \tag{90}$$

т. е. при конформном преобразовании тензора $a_{\alpha\beta}$ коэффициенты эйнштейновой связности преобразуются таким же образом как и символы Кристоффеля*.

При помощи объекта $Y^{\gamma}_{\alpha\beta}$ мы можем построить следующие ковекторы

$$\psi_{\alpha} = \frac{2}{n+1} b^{\beta\gamma} (\overset{Y}{D^*_{\alpha}} \overset{Y}{D^*_{\beta}} \Lambda^i_{\gamma}) m_i, \tag{91}$$

$$\psi^*_{\alpha} = \frac{2}{n+1} b^{\beta\gamma} (\overset{Y}{D^*_{\beta}} \overset{Y}{D^*_{\alpha}} \Lambda^i_{\gamma}) m_i. \tag{92}$$

В силу того, что эти ковекторы при конформных преобразованиях тензора $a_{\alpha\beta}$ преобразуются по закону (68), мы имеем на гиперповерхности две внутренние конформно-инвариантные связности с кручением

$$\underset{\psi}{\Lambda^{\gamma}_{\alpha\beta}} = Y^{\gamma}_{\alpha\beta} + G^{\gamma\sigma}_{\alpha\beta} \psi_{\sigma}, \quad \underset{\psi^*}{\Lambda^{\gamma}_{\alpha\beta}} = Y^{\gamma}_{\alpha\beta} + G^{\gamma\sigma}_{\alpha\beta} \psi^*_{\sigma}. \tag{93}$$

Ковекторы

$$\chi_{\alpha} = a\psi_{\alpha} + b\psi_{\alpha}, \tag{94}$$

где $a+b=1$, обладают такими же свойствами как и ковекторы ψ_{α} и ψ^*_{α}. Этим ковекторам соответствует пучок конформно-инвариантных связностей

$$\underset{\chi}{\Lambda^{\gamma}_{\alpha\beta}} = Y^{\gamma}_{\alpha\beta} + G^{\gamma\sigma}_{\alpha\beta} \chi_{\sigma}, \tag{95}$$

внутренне присоединенных к гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$. Ковекторы ψ_{α}, ψ^*_{α} и линейные комбинации ковекторов φ_{α}, φ^*_{α}, ψ_{α} и ψ^*_{α} типа (91) можно использовать для построения симметрических конформно-инвариантных связностей гиперповерхности, соответствующих объектам $X^{\gamma}_{\alpha\beta}$ и $Y^{\gamma}_{\alpha\beta}$.

9. *Конформно-инвариантные копункторные поля.* Дифференциальные уравнения произвольного копункторного поля, определенного на гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$, имеют вид

$$\nabla x_{\alpha} + \Theta^{\beta}_{\alpha\beta} = x_{\alpha,\beta} \Theta^{\beta}. \tag{96}$$

Будем рассматривать копункторные поля на гиперповерхности, охваченные фундаментальными объектами гиперповерхности. Свернутые объекты аффинных связностей являются копункторами. Объекту аффинной связности с кручением соответствуют два копунктора. Копункторное поле x_{α}, определен-

---

* В нечетномерных пространствах аффинной связности с кручением существует специальный класс гиперповерхностей с вполне определенной внутренней связностью

$$G^{\gamma}_{\alpha\beta} = X^{\gamma}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} c^{\gamma\sigma} (c_{\rho\alpha,\beta} - c_{\alpha\beta,\sigma} + c_{\beta\sigma,\alpha}) + c^{\gamma\sigma} c_{\alpha\rho} X^{\rho}_{\sigma\beta},$$

относительно которой тензор $a_{\alpha\beta}$ ковариантно постоянный, т. е. $\overset{G}{D}_{\gamma} a_{\alpha\beta} = 0$. В этом случае $b_{\sigma\beta} G^{\sigma}_{[\alpha\gamma]} + b_{\alpha\sigma} G^{\sigma}_{[\beta\gamma]} = 0$, $c_{\gamma\alpha} c^{\gamma\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha}$.

ное на $\mathfrak{M}_{n-1}$, будем называть конформно-инвариантным копункторным полем, если $\tilde{x}_\alpha = x_\alpha$, т. е. если оно инвариантное относительно перенормировки основного ковектора. Из леммы В. Д. Измайлова [2] следует, что если на гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$ задано конформно-инвариантное копункторное поле, то на ней внутренними средствами определяется аффинная связность, которая является индуцированной связностью гиперповерхности. Величины, построенные по следующим формулам

$$\underset{\varphi}{\Gamma_\alpha} = a_\alpha + \frac{n-1}{2}\varphi_\alpha, \qquad \underset{\varphi}{{}'\Gamma_\alpha} = b_\alpha + \frac{n-1}{2}\varphi_\alpha, \tag{97}$$

$$\underset{\varphi^*}{\Gamma_\alpha} = a_\alpha + \frac{n-1}{2}\varphi^*_\alpha, \qquad \underset{\varphi^*}{{}'\Gamma_\alpha} = b_\alpha + \frac{n-1}{2}\varphi^*_\alpha, \tag{98}$$

$$\underset{\psi}{\Gamma_\alpha} = a_\alpha + \frac{n-1}{2}\psi_\alpha, \qquad \underset{\psi}{{}'\Gamma_\alpha} = b_\alpha + \frac{n-1}{2}\psi_\alpha, \tag{99}$$

$$\underset{\psi^*}{\Gamma_\alpha} = a_\alpha + \frac{n-1}{2}\psi^*_\alpha, \qquad \underset{\psi^*}{{}'\Gamma_\alpha} = b_\alpha + \frac{n-1}{2}\psi^*_\alpha, \tag{100}$$

$$\underset{\chi}{\Gamma_\alpha} = a_\alpha + \frac{n-1}{2}\chi_\alpha, \qquad \underset{\chi}{{}'\Gamma_\alpha} = b_\alpha + \frac{n-1}{2}\chi_\alpha, \tag{101}$$

$$\underset{\psi}{\Lambda_\alpha} = \underset{\psi}{\Lambda^\beta_{\alpha\beta}}, \qquad \underset{\psi^*}{\Lambda_\alpha} = \underset{\psi^*}{\Lambda^\beta_{\alpha\beta}}, \tag{102}$$

являются конформно-инвариантными копункторными полями, охваченными фундаментальным объектом третьего порядка гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$.

Индуцированные связности гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$ пространства аффинной связности без кручения, соответствующие копункторам $\underset{\varphi}{\Gamma_\alpha}$, $\underset{\varphi}{{}'\Gamma_\alpha}$, $\underset{\varphi^*}{\Gamma_\alpha}$ и $\underset{\varphi^*}{{}'\Gamma_\alpha}$ впервые построенны Ф. Ножичкой [10], а для случая пространства аффинной связности с кручением — В. Д. Измайловым [2].

10. *Конформно-инвариантные индуцированные связности гиперповерхности.* Если задан конформно-инвариантный копунктор Γ_α, то ему соответствующая аффинная связность имеет вид*

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \Lambda^i_{\alpha\beta}\Lambda^\gamma_i,$$
$$\Lambda^i_\alpha \Lambda^\beta_i = \delta^\beta_\alpha, \quad \Lambda^i_{\alpha\beta}\Lambda^\beta_i = \Gamma_\alpha. \tag{103}$$

Таким образом, индуцированные связности Ф. Ножичка – В. Д. Измайлова имеют вид

$$\underset{\varphi}{\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}} = \Lambda^i_{\alpha\beta}\underset{\varphi}{\Lambda^\gamma_i}, \qquad \underset{\varphi}{{}'\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}} = \Lambda^i_{\alpha\beta}\underset{\varphi}{{}'\Lambda^\gamma_i},$$
$$\underset{\varphi^*}{\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}} = \Lambda^i_{\alpha\beta}\underset{\varphi^*}{\Lambda^\gamma_i}, \qquad \underset{\varphi^*}{{}'\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}} = \Lambda^i_{\alpha\beta}\underset{\varphi^*}{{}'\Lambda^\gamma_i}. \tag{104}$$

Очевидно, что эти связности являются конформно-инвариантными. Такого же типа связностями являются и следующие аффинные связности

$$\underset{\psi}{\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}} = \Lambda^i_{\alpha\beta}\underset{\psi}{\Lambda^\gamma_i}, \qquad \underset{\psi}{{}'\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}} = \Lambda^i_{\alpha\beta}\underset{\psi}{{}'\Lambda^\gamma_i}, \tag{105}$$

$$\underset{\psi^*}{\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}} = \Lambda^i_{\alpha\beta}\underset{\psi^*}{\Lambda^\gamma_i}, \qquad \underset{\psi^*}{{}'\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}} = \Lambda^i_{\alpha\beta}\underset{\psi^*}{{}'\Lambda^\gamma_i}, \tag{106}$$

$$\underset{\chi}{\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}} = \Lambda^i_{\alpha\beta}\underset{\chi}{\Lambda^\gamma_i}, \qquad \underset{\chi}{{}'\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}} = \Lambda^i_{\alpha\beta}\underset{\chi}{{}'\Lambda^\gamma_i}, \tag{107}$$

$${}'\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \Lambda^i_{\alpha\beta}\,{}'\Lambda^\gamma_i, \qquad {}^*\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \Lambda^i_{\alpha\beta}\,{}^*\Lambda^\gamma_i, \tag{108}$$

* Система линейных уравнений, при помощи которой определен смешанный тензор Λ^α_i, имеет единственное решение [2].

которые соответствуют конформно-инвариантным копункторам (99)—(102). Аффинные связности, определенные формулами (93), (104)—(108), существенно зависят от тензора кручения пространства $\mathfrak{M}_n$.

11. *Аффинные нормали.* Система уравнений

$$\Lambda_i^\alpha n^i = 0, \quad m_i n^i = 1 \tag{109}$$

определяют единственным образом вектор n^i, который называется аффинной нормалью гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$. Конформно-инвариантным аффинным связностям (104)—(108), соответствуют различные аффинные нормали, каждая из которых определяется формулой

$$n^i = \frac{a^{\alpha\beta}}{n-1} (\Lambda^i_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}) \Lambda^i_\gamma, \tag{110}$$

где $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ — один из перечисленных объектов аффинной связности и $a^{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$. Аффинные нормали, соответствующие объектам $\underset{\psi}{\Lambda^\gamma_{\alpha\beta}}$ и $\underset{\psi^*}{\Lambda^\gamma_{\alpha\beta}}$, будем называть нормалями Эйнштейна, а пучок нормалей, соответствующий пучку аффинных связностей (107), — пучком Эйнштейна. Таким образом мы получили целый ряд пучков инвариантных оснащений гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$. Каждому оснащению однозначно соответствуют деривационные уравнения (55) и (56), в которых $a'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$, $a^\beta_\alpha = n^i_\alpha \Lambda^\beta_i$, $n_\alpha = n^i_\alpha m_i$, Λ^α_i — решение системы (103). Если выбрана какая нибудь конкретная нормализация гиперповерхности, то в каждом локальном пространстве $A_n(v)$ имеем вполне определенный вектор $n^i(v)$. При отображении всех локальных соседних пространств $A_n(v+dv)$ на исходное $A_n(v)$:

$$A(v+dv) \to A(v, dv) = \Theta^\alpha \Lambda_\alpha + \ldots,$$

$$\Lambda_\alpha(v+dv) \to \Lambda_\alpha(v, dv) = \Lambda_\alpha + \tilde{\Theta}^\beta_\alpha \Lambda_\beta + a_{\alpha\beta}\Theta^\beta n + \ldots,$$

$$n(v+dv) \to n(v, dv) = n + a^\beta_\alpha \Theta^\alpha \Lambda_\beta + n_\alpha \Theta^\alpha n + \ldots,$$

где

$$\tilde{\Theta}^\beta_\alpha = \Theta^\beta_\alpha + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\Theta^\gamma,$$

концы векторов $n^i(v, dv)$, отложенных из точки A, опишут в пространстве $A_n(v)$ некоторую гиперповерхность $\mathfrak{N}_{n-1}(n)$, которую будем называть локальной индикатрисой рассматриваемой гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$. В общем случае касательные гиперплоскости локальной индикатрисы $\mathfrak{N}_{n-1}(n)$ и гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$ не являются параллельными. Эти гиперплоскости параллельны тогда и только тогда, когда $n_\alpha = 0$. Это условие не является инвариантным относительно конформных преобразований асимптотического тензора, ибо $\tilde{n}_\alpha = n_\alpha - \tilde{\lambda}_\alpha$.

Решение системы (30) можно однозначно фиксировать следующим инвариантным образом [2], т. е. положить, что либо

$$\lambda = \operatorname{Sp} \| a^\beta_\alpha \|,$$

либо

$$\lambda = \sqrt[n-1]{\det \| a^\beta_\alpha \|}.$$

12. *Аффинные связности Мюллера.* Рассмотрим на гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$ векторное поле

$$m^i = n^i + t^\alpha \Lambda^i_\alpha.$$

Очевидно, что $m^i m_i = 1$. Деривационные уравнения в репере $\{A, \Lambda_\alpha, m\}$ примут вид:

$$\begin{gathered}\Lambda^i_{\alpha\beta} = (\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta} t^\gamma)\Lambda^i_\gamma + a_{\alpha\beta} m^i, \\ m^i_\alpha = (a^\beta_\alpha + \overset{\Gamma}{D}_\alpha t^\beta - a_{\alpha\gamma} t^\gamma - n_\alpha t^\beta)\Lambda^i_\beta + (n_\alpha - a_{\alpha\beta} t^\beta) m^i.\end{gathered} \tag{111}$$

Если вектор t^α пространства $A_{n-1}(v)$ выбран так, что

$$n_\alpha - a_{\alpha\beta} t^\beta = 0, \tag{112}$$

то каждой аффинной нормали n^i однозначно соответствует аффинная нормаль

$$m^i = n^i + a^{\alpha\beta} n_\beta \Lambda^i_\alpha \tag{113}$$

с выше упомянутым свойством локальной индикатрисы $\mathfrak{N}_{n-1}(n)$. Эту аффинную нормаль будем называть нормалью Мюллера, а ей соответствующую аффинную связность

$$M^\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta} a^{\gamma\sigma} n_\sigma \tag{114}$$

— связностью Мюллера.

Если на гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$ задано некоторое инвариантное мюллеровское оснащение, то основной ковектор m_i и вектор аффинной нормали связанны следующими соотношениями:

$$m^i m_i = 1, \quad m_{i\alpha} m^i = 0, \quad m^i_\alpha m_i = 0. \tag{115}$$

Если ввести поле поливекторов мюллеровского оснащения:

$$e_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}} = (m \Lambda_{\alpha_1} \ldots \Lambda_{\alpha_{n-1}}), \tag{116}$$

то оказывается, что при отображении соседнего локального пространства $A_n(v+dv)$ на исходное $A_n(v)$, объем, определяемый поливектором $e_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}}$, не меняется, т. е.

$$\overset{M}{D}_\alpha e_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}} = 0. \tag{117}$$

Отсюда вытекает, что на гиперповерхности пространства аффинной связности без кручения существуют внутренние эквиаффинные связности. Таким образом, любая связность Мюллера является аналогом эквиаффинной связности и совпадает с ней, если $R^i_{jk} = 0$.

Условия совместности деривационных уравнений (55) и (56) имеют вид:

$$\begin{gathered} R^i_{pq} \Lambda^p_\alpha \Lambda^q_\beta = R^\gamma_{\alpha\beta} \Lambda^i_\gamma + R^k_{pq} \Lambda^p_\alpha \Lambda^q_\beta m_k n^i, \\ R^i_{pqr} \Lambda^p_\alpha \Lambda^q_\beta \Lambda^r_\gamma = (R^\sigma_{\alpha\beta\gamma} - a_{\alpha[\beta} a^\sigma_{\gamma]}) \Lambda^i_\sigma + (\overset{\Gamma}{D}_{[\beta} a_{|\alpha|\gamma]} + a_{\alpha\sigma} R^\sigma_{\beta\gamma} - a_{\alpha[\beta} n_{\gamma]}) n^i, \\ R^i_{kpq} n^k \Lambda^p_\alpha \Lambda^q_\beta = (\overset{\Gamma}{D}_{[\alpha} a^\gamma_{\beta]} + a^\gamma_\sigma R^\sigma_{\alpha\beta} - n_{[\alpha} a^\gamma_{\beta]}) \Lambda^i_\gamma + (\overset{\Gamma}{D}_{[\alpha} n_{\beta]} + n_\sigma R^\sigma_{\alpha\beta} + a_{\sigma[\alpha} a^\sigma_{\beta]}) n^i, \end{gathered} \tag{118}$$

где $R^\gamma_{\alpha\beta}$ и $R^\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ — тензоры кручения и кривизны аффинной связности $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$, определенные формулами (21). Эти уравнения получаются таким же образом как и условия совместности различных деривационных уравнений гиперповерхности $\mathfrak{H}_{n-1}$ пространства $\mathfrak{B}_n$ [1]. Уравнения (118) эквивалентны следующим уравнениям (уравнениям Риччи—Гаусса—Кодацци):

$$\begin{gathered}
R^{\gamma}_{\alpha\beta} = R^{i}_{pq}\Lambda^{p}_{\alpha}\Lambda^{q}_{\beta}\Lambda^{r}_{\gamma}, \\
R^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma} - a_{\alpha[\beta}a^{\sigma}_{\gamma]} = R^{i}_{pqr}\Lambda^{p}_{\alpha}\Lambda^{q}_{\beta}\Lambda^{r}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}_{i}, \\
\overset{\Gamma}{D}_{[\beta}a_{|\alpha|\gamma]} + a_{\alpha\sigma}R^{\sigma}_{\beta\gamma} - a_{\alpha[\beta}n_{\gamma]} = R^{i}_{pqr}\Lambda^{p}_{\alpha}\Lambda^{q}_{\beta}\Lambda^{r}_{\gamma}m_{i}, \\
\overset{\Gamma}{D}_{[\alpha}a^{\gamma}_{\beta]} + a^{\gamma}_{\sigma}R^{\sigma}_{\alpha\beta} - n_{[\alpha}a^{\gamma}_{\beta]} = R^{i}_{kpq}n^{k}\Lambda^{p}_{\alpha}\Lambda^{q}_{\beta}\Lambda^{\sigma}_{i}, \\
\overset{\Gamma}{D}_{[\alpha}n_{\beta]} + n_{\sigma}R^{\sigma}_{\alpha\beta} + a_{\sigma[\alpha}a^{\sigma}_{\beta]} = R^{i}_{kpq}n^{k}\Lambda^{p}_{\alpha}\Lambda^{q}_{\beta}m_{i},
\end{gathered} \tag{119}$$

а в случае мюллеровской связности —

$$\begin{gathered}
R^{\gamma}_{\alpha\beta} = R^{i}_{pq}\Lambda^{p}_{\alpha}\Lambda^{q}_{\beta}\Lambda^{\gamma}_{i}, \\
R^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma} - a_{\alpha[\beta}a^{\sigma}_{\gamma]} = R^{i}_{pqr}\Lambda^{p}_{\alpha}\Lambda^{q}_{\beta}\Lambda^{r}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}_{i}, \\
\overset{M}{D}_{[\beta}a_{|\alpha|\gamma]} + a_{\alpha\sigma}R^{\sigma}_{\beta\gamma} = R^{i}_{pqr}\Lambda^{p}_{\alpha}\Lambda^{q}_{\beta}\Lambda^{r}_{\gamma}m_{i}, \\
\overset{M}{D}_{[\alpha}a^{\gamma}_{\beta]} + a^{\gamma}_{\sigma}R^{\sigma}_{\alpha\beta} = R^{i}_{kpq}n^{k}\Lambda^{p}_{\alpha}\Lambda^{q}_{\beta}\Lambda^{\sigma}_{i}, \\
a_{\sigma[\alpha}a^{\sigma}_{\beta]} = R^{i}_{kpq}n^{k}\Lambda^{p}_{\alpha}\Lambda^{p}_{\beta}m_{i}.
\end{gathered} \tag{120}$$

13. *Внутренние аффинные связности второго рода.* В каждой точке гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$ мы имеем n ковекторов m_i и $m_{i\alpha}$, которые, в силу (48), линейно независимы. Продолжение системы (33) дает

$$\begin{gathered}
\nabla m_{i\alpha} = m_{i\alpha\beta}\Theta^{\beta}, \\
\nabla m_{i\alpha\beta} + m_{i\gamma}\Theta^{\gamma}_{\alpha\beta} = m_{i\alpha\beta\gamma}\Theta^{\gamma},
\end{gathered} \tag{121}$$

где

$$\begin{gathered}
m_{i[\alpha\beta]} = m_k R^{k}_{ipq}\Lambda^{p}_{\alpha}\Lambda^{q}_{\beta}, \\
m_{i\alpha[\beta\gamma]} = m_{k\alpha}R^{k}_{ipq}\Lambda^{p}_{\beta}\Lambda^{q}_{\gamma}.
\end{gathered} \tag{122}$$

Назовем деривационными уравнениями второго рода для $\mathfrak{M}_{n-1}$ разложения ковекторов $m_{i\alpha\beta}$:

$$m_{i\alpha\beta} = \sigma^{\gamma}_{\alpha\beta}m_{i\gamma} + b^{*}_{\alpha\beta}m_i, \tag{123}$$

где $b^{*}_{\alpha\beta} = m_{i\alpha\beta}m^{i}$. Оказывается, что $\sigma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ — объект аффинной связности, а $b^{*}_{\alpha\beta}$ — тензор. Аффинную связность $\sigma^{\gamma}_{\alpha\beta}$, следуя А. П. Нордену, будем называть внутренней связностью второго рода гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$. Если ввести поливектор

$$\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}} = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \ldots m_n \\ m_{1\alpha_1} & m_{2\alpha_1}\ldots m_{n\alpha_1} \\ \ldots & \ldots \\ m_{1\alpha_{n-1}} & m_{2\alpha_{n-1}}\ldots m_{n\alpha_{n-1}} \end{vmatrix}, \tag{124}$$

существенная компонента которого $\varepsilon_{1\,2\ldots n-1} = \Delta$, то

$$\overset{\sigma}{D}_{\alpha}\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}} = 0. \tag{125}$$

Если гиперповерхность $\mathfrak{M}_{n-1}$ оснащена нормалью Мюллера, то $a = \Delta e$, где e — существенная компонента поливектора (116). Так как, в силу соотношения $\Lambda^{i}_{\alpha\beta}m_i + \Lambda^{i}_{\alpha}m_{i\beta} = 0$,

$$a_{\alpha\beta} = -\Lambda^{i}_{\alpha}m_{i\beta}, \quad a_{\alpha\beta,\gamma} = -\Lambda^{i}_{\alpha\gamma}m_{i\beta} - \Lambda^{i}_{\alpha}m_{i\beta\gamma}, \tag{126}$$

то связность Мюллера и внутренняя связность второго рода $\sigma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ слабо сопряженны относительно тензора $a_{\alpha\beta}$ [1], ибо равенство (126_2) можно представить в виде

$$a_{\alpha\beta,\,\gamma} - M^{\varepsilon}_{\alpha\gamma} a_{\varepsilon\beta} - \sigma^{\varepsilon}_{\beta\gamma} a_{\alpha\varepsilon} = 0. \tag{127}$$

Условия совместности уравнений (123) имеют вид

$$\begin{gathered} b^{*}_{\sigma\alpha} \mathfrak{R}^{\sigma}_{\beta\gamma} = R^{k}_{pqr} m_k m^{p}_{\alpha} \Lambda^{q}_{\beta} \Lambda^{r}_{\gamma}, \\ \overset{\sigma}{D}_{[\beta} b_{|\overset{*}{\alpha}|\gamma]} + b^{*}_{\alpha\sigma} \mathfrak{R}^{\sigma}_{\beta\gamma} = -R^{i}_{kpq} m_{i\alpha} m^{k} \Lambda^{p}_{\beta} \Lambda^{q}_{\gamma}, \\ (\mathfrak{R}^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma} - b^{*}_{\alpha[\beta} \delta^{\sigma}_{\gamma]}) b^{*}_{\sigma\varepsilon} = -R^{i}_{kpq} m_{i\alpha} m^{k}_{\sigma} \Lambda^{p}_{\beta} \Lambda^{q}_{\gamma}. \end{gathered} \tag{128}$$

Из формулы (128_1) следует, что в пространстве аффинной связности без кручения на гиперповерхности $\mathfrak{M}_{n-1}$ существуют аффинные связности второго рода с кручением. Если $\det \| b^{*}_{\alpha\beta} \| \neq 0$, то тензор Риччи внутренней связности второго рода имеет вид

$$\mathfrak{R}_{\alpha\beta} = (n-2)\, b^{*}_{\alpha\beta} - {}^{*}b^{\sigma\gamma} R^{i}_{kpq} m_{i\alpha} m^{k}_{\sigma} \Lambda^{p}_{\beta} \Lambda^{q}_{\gamma},$$

где

$$b^{*}_{\alpha\beta}\, {}^{*}b^{\beta\gamma} = \delta^{\gamma}_{\alpha}.$$

Вильнюсский государственный педагогический институт

Поступила в редакцию 25.XI.1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Близникас. Некоторые вопросы геометрии пространств обобщенной евклидовой связности, Лит. мат. сб., 1962, т. 2, № 2, 15—32.
2. В. Д. Измайлов. К теории гиперповерхности пространства аффинной связности, Успехи мат. наук, 1960, т. 15, вып. 5 (95), 171—178.
3. Г. Ф. Лаптев. О внутренних геометриях многообразий, вмещенных в многомерное аффинное пространство, Диссертация, Москва, 1941.
4. Г. Ф. Лаптев. Геометрия погруженных многообразий, Труды Моск. матем. об-ва, 1953, т. 2, 275—382.
5. А. Е. Либер. О геометрии m-поверхностей в аффинных и проективных пространствах, Труды 3-го Всесоюзн. мат. съезда, 1956, т. 1, 157—158.
6. А. П. Норден. Пространство аффинной связности, М.—Л., ГИТТЛ, 1950.
7. П. И. Швейкин. К аффинной геометрии многомерной поверхности, Диссертация, Москва, 1959.
8. V. Hlavaty. Zur Konformgeometrie I, II, III, Proc. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, 1935, 38; 281—286; 738—743; 1006—1011.
9. V. Hlavaty. Geometry of Einsteins unified field theory, Groningen, Nordhoff, 1958.
10. F. Nožička. Le vecteur affinonormal et la connexion de l'hypersurface dans l'espace affin, Časopis pro pěstováni matematiky a fysiky, 1950, 75, 179—209.

KAI KURIOS AFININIO SĄRYŠIO ERDVĖS HIPERPAVIRŠIŲ VIDINĖS GEOMETRIJOS

V. BLIZNIKAS

(Reziumė)

Kiekvienai afininio sąryšio erdvės hiperpaviršiaus normalizacijai vienareikšmiai atitinka afininio sąryšio erdvė, kurios bazė sutampa su nagrinėjamu hiperpaviršiumi. Tokiu būdu sudarytosios afininio sąryšio erdvės savybės ir apibrėžia hiperpaviršiaus vidaus geometriją. Afininio sąryšio erdvės hiperpaviršių normalizacijos klausimai yra nagrinėti V. Hlavačio, F. Nožičkos, V. Izmailovo ir kitų darbuose.

Šiame straipsnyje yra surasti afininio sąryšio erdvės hiperpaviršiaus objektai, kurių pagalba galima normalizuoti hiperpaviršių. Minėtų objektų komponentės yra sudarytos iš hiperpaviršiaus trečios eilės fundamentalinio objekto komponenčių. Be to, išnagrinėtos Miulerio afininio sąryšio objekto kai kurios savybės ir įrodyta, kad kiekvienam Miulerio tipo afininiam sąryšio objektui $M^{\gamma}_{\alpha\beta}$ vienareikšmiai atitinka antros rūšies afininio sąryšio objektas $\mathfrak{S}^{\gamma}_{\alpha\beta}$. Pasirodo, kad afininio sąryšio objektai $M^{\gamma}_{\alpha\beta}$ ir $\mathfrak{S}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ yra silpnai sujungtiniai atžvilgiu hiperpaviršiaus asimptotinio tenzoriaus.

Darbas atliktas G. Laptevo ir A. Vasiljevo metodu.

EINIGE INNEREN GEOMETRIEN DER HYPERFLÄCHE IM AFFINZUSAMMENHÄNGENDEN RAUM

V. BLIZNIKAS

(Zusammenfassung)

Für jede Normalisierung der Hyperfläche im affinzusammenhängenden Raum wird eindeutig ein affinzusammenhängender Raum zugeordnet, dessen Basis mit der betrachteten Hyperfläche identisch ist. Die Eigenschaften so eines konstruierten affinzusammenhängenden Raumes definieren die innere Geometrie einer Hyperfläche. Probleme der Normalisierung der Hyperfläche eines affinzusammenhängenden Raumes sind von V. Hlavaty, F. Nožička, V. Ismailow und anderen untersucht.

In diesem Artikel werden einige geometrischen Objekte untersucht, die aus Komponenten fundamentaler differentialgeometrischer Objekte dritter Ordnung der Hyperfläche gebildet sind. Mit Hilfe dieser Objekte wird die Normalisierung der Hyperfläche konstruiert. Im zweiten und dritten Teil des Artikels werden die Eigenschaften eines Affinzusammenhängsobjekt von Müller untersucht. Es wird bewiesen, dass jedem Affinzusammenhängsobjekte vom Müllerschen Typus $M^{\gamma}_{\alpha\beta}$ ein Affinzusammenhängsobjekte zweiter Gattung $\mathfrak{S}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ eindeutig zugeordnet wird. Es zeigt sich, dass die Affinzusammenhängsobjekte $M^{\gamma}_{\alpha\beta}$ und $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$ in bezug auf den assymptotischen Tensor der Hyperfläche nicht fest konjugiert sind.

Die Untersuchung wird mit Hilfe der Methode von G. Laptew und A. Wasiljew durchgeführt.