IV ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1964

О ПРИБЛИЖЕННОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ Z-ФУНКЦИЙ ГЕККЕ

К. БУЛОТА

В статье [1] было получено приближенное функциональное уравнение Z-функций Гекке мнимого квадратичного поля, которое в [2] применялось для получения „плотностных" теорем, оценивающих количество нулей Z-функций Гекке в критической полосе

$$0 < \operatorname{Re} s = \sigma \leqslant 1$$

особенно вблизи прямой $\sigma = 1$.

Приближенное функциональное уравнение в [1] было доказано при ограничении

$$|m| \ll |\operatorname{Im} s|, \tag{1}$$

где m — показатель характера Гекке второго рода. Кроме того, при оценке остаточного члена приближенного функционального уравнения использовались формулы (3.48) — (3.50), приведенные без доказательства из-за аналогии с другими известными оценками. Однако эти формулы требуют обоснования, хотя, возможно, они верны.

В данной статье дается детальное доказательство оценок остаточных членов, при этом снимается ограничение (1).

Приведем основное тождество, исходное для получения приближенного функционального уравнения, а также ряд вспомогательных лемм.

Теорема 1. *Пусть $Z(s, \Xi, \mathfrak{R})$ — дзета-функция Гекке для фиксированного класса идеалов мнимого квадратичного поля K, d — дискриминант поля, $J_{mg}(x)$ — функция Бесселя первого рода, $\Xi(\mathfrak{a})$ — характер Гекке второго рода по* $\operatorname{mod} \mathfrak{m}$ *с показателем целым рациональным m, $s = \sigma + it$, $X \geqslant c_1 > 0$, $Y \geqslant c_2 > 0$, где c_1, c_2 — достаточно большие постоянные, $\mathfrak{m} \neq 0$ — целый идеал поля, g — число единиц поля, удовлетворяющих условию:* $\varepsilon \equiv 1 \ (\operatorname{mod} \mathfrak{m})$.

Тогда в области

$$\frac{5}{4} - \frac{1}{2} E(m) < \operatorname{Re} s = \sigma < \frac{(m)g}{2} + 1 \tag{2}$$

имеет место тождество

$$F(X, Y, s-1) - XF(X, Y, s) = \Phi_0(s) + \Psi_2(s) - \Psi_1(s), \tag{3}$$

где обозначено:

$$\Phi_0(s) = \frac{2\pi\varphi(\mathfrak{m})\, E(\Xi)\, X^{2-s}}{\sqrt{DN\mathfrak{m}}\,(s-2)(s-1)},$$

$$F(X, Y, s) = Z(s, \Xi, \mathfrak{R}) - \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R} \\ N\mathfrak{a} < X}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s} - \psi(s) \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}^* \\ N\mathfrak{b} < Y}} \frac{\overline{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{1-s}}, \tag{4}$$

$$\Psi_1(s)=\begin{cases}\Theta(s)\sum\limits_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*\\ N\mathfrak{b}<Y}}\dfrac{\overline{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}}\int\limits_0^L x^{1-2s}(x^2-L^2)\,J_{mg}(x)\,dx, & m\neq 0,\\ 2\,\Theta(s)\sum\limits_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*\\ N\mathfrak{b}<Y}}\dfrac{\overline{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}}\int\limits_0^L x^{-2s}\Big((s-1)\,x^2-sL^2\Big)J_1(x)\,dx, & m=0,\end{cases}\tag{5}$$

$$\Psi_2(s)=\begin{cases}\Theta(s)\sum\limits_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*\\ N\mathfrak{b}\geqslant Y}}\dfrac{\overline{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}}\int\limits_L^\infty x^{1-2s}(x^2-L^2)\,J_{mg}(x)\,dx, & m\neq 0,\\ 2\,\Theta(s)\sum\limits_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*\\ N\mathfrak{b}\geqslant Y}}\dfrac{\overline{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}}\int\limits_L^\infty x^{-2s}\Big((s-1)\,x^2-sL^2\Big)\,J_1(x)\,dx, & m=0,\end{cases}\tag{6}$$

$$\Theta(s)=\left(\frac{A}{2}\right)^{3-2s}\varkappa(\Xi),\tag{7}$$

$$|\varkappa(\Xi)|=1,$$

$$A=\frac{\sqrt{D}}{2\pi},\qquad D=|d|\,N\mathfrak{m},\tag{8}$$

$$L=4\pi\sqrt{\frac{XN\mathfrak{b}}{D}},\tag{9}$$

$$E(m)=\begin{cases}1, & m=0,\\ 0, & m\neq 0,\end{cases}\qquad E(\Xi)=\begin{cases}1, & \Xi=\Xi_0,\\ 0, & \Xi\neq\Xi_0.\end{cases}$$

Функция $\psi(s)$ и класс идеалов $\mathfrak{R}^*$ удовлетворяют уравнению

$$Z(s,\ \Xi,\ \mathfrak{R})=\psi(s)\,Z(1-s,\ \overline{\Xi},\ \mathfrak{R}^*).\tag{10}$$

Доказательство теоремы в [1].

Замечание. В указанной статье для функций $\Psi_1(s)$ и $\Psi_2(s)$ даны только первые их выражения (для случая $m\neq 0$). Однако простым интегрированием по частям с применением формул дифференцирования бесселевых функций тем же путем получаются и вторые выражения обоих функций (для $m=0$).

Лемма 1. *Пусть* $1\leqslant x_1<x_2$, $X\geqslant 1$, $P\geqslant 1$; $a>0$ — *натуральное число*, $V=\sqrt{m^2g^2+4t^2}\geqslant 2$, $\delta>0$, $s=\sigma+it$, $|m|g+a\geqslant 2$,

$$L=L(N\mathfrak{b})=4\pi\sqrt{\frac{XN\mathfrak{b}}{D}},$$

$$L_1=L\sqrt{1+X^{\alpha-1}},$$

$$0<\alpha<1.$$

Тогда в области

$$\sigma<1+a-\delta\tag{11}$$

равномерно по X, V, s справедлива оценка

$$S_1=\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}\\ x_1\leqslant N\mathfrak{b}\leqslant x_2}}\frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}}\int\limits_L^{L_1} z\int\limits_0^z x^{1-2s+a}\,J_{|m|g+a}(x)\,dx\,dz\ll$$

$$\ll X^{\alpha+1-\sigma}PV^{-1}L_1^a(x_2)\ln V,\tag{12}$$

где P равно нижней грани всех таких P_1, которые удовлетворяют условию

$$\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R} \\ x_1\leqslant N\mathfrak{b}\leqslant x_2}} 1\leqslant P_1. \tag{13}$$

Числа m, g, Ξ определены в теореме 1.

Доказательство. Известно следующее интегральное представление бесселевой функции первого рода:

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{2^{\tau-\nu-1}\Gamma\left(\frac{\tau}{2}\right)x^{\nu-\tau}\,d\tau}{\Gamma\left(\nu+1-\frac{\tau}{2}\right)}, \tag{14}$$

где $\nu>0$, $\tau=c+it_1$, $0<c\leqslant\nu+1$ (Чандрасекгаран и Нарасиман [4] (21)).

Заменяя в S_1 бесселевую функцию интегралом типа (14), и полагая $c=|m|g+a-1$, имеем:

$$S_1=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R} \\ x_1\leqslant N\mathfrak{b}\leqslant x_2}}\frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}}\int_L^{L_1} z\int_0^z\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\times$$

$$\times\frac{2^{\tau-|m|g-a-1}\Gamma\left(\frac{\tau}{2}\right)x^{1-2s+2a+|m|g-\tau}\,d\tau\,dx\,dz}{\Gamma\left(|m|g+a+1-\frac{\tau}{2}\right)}. \tag{15}$$

Так как при таком выборе c

$$\frac{\left|\Gamma\left(\frac{\tau}{2}\right)\right|}{\left|\Gamma\left(|m|g+a+1-\frac{\tau}{2}\right)\right|}=\frac{4}{\left|\left(|m|g+a+1-it_1\right)\left(|m|g+a-1-it_1\right)\right|},$$

то интеграл по τ в (15) сходится абсолютно. В силу (11) регулярен и интеграл по x. Следовательно, можем переменить порядок интегрирования и сначала проинтегрировать по x, потом по τ.

Получаем

$$S_1=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R} \\ x_1\leqslant N\mathfrak{b}\leqslant x_2}}\frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}}\int_L^{L_1} z\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\times$$

$$\times\frac{2^{\tau-|m|g-a-1}\Gamma\left(\frac{\tau}{2}\right)z^{2-2s+2a+|m|g-\tau}\,d\tau\,dz}{\Gamma\left(|m|g+a+1-\frac{\tau}{2}\right)(2-2s+2a+|m|g-\tau)}. \tag{16}$$

В области

$$|m|g+a-1\leqslant\operatorname{Re}\tau\leqslant|m|g+a \tag{17}$$

подинтегральная функция не имеет особенностей, поэтому контур интегрирования можем передвинуть на прямую

$$\operatorname{Re}\tau=|m|g+a.$$

Пусть $t\geqslant 0$. Если $|m|g\leqslant t$, то, разбивая интервал интегрирования на части

$$(-\infty,\ -3t],\quad \left(-3t,\ -\frac{t}{2}\right],\quad \left(-\frac{t}{2},\ t\right],\quad (t,\ \infty),$$

легко получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt_1}{\left|\left(|m|g+a-it_1\right)\left(2-2\sigma+a-i\,(2t+t_1)\right)\right|} \ll \frac{\ln (t+2)}{t+1} \ll \frac{\ln V}{V}. \tag{18}$$

Если $|m|g<t$, оценка (18) тем более верна. Аналогично получаем и при $t<0$. Поэтому

$$S_1 \ll X^{\alpha} V^{-1} L_1^{a}(x_2) \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R} \\ x_1\leqslant N\mathfrak{b}\leqslant x_2}} N\mathfrak{b}^{\sigma-1} L_1^{2-2\sigma}(x_2) \ln V \ll$$

$$\ll X^{\alpha+1-\sigma} V^{-1} L_1^{a}(x_2) \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R} \\ x_1\leqslant N\mathfrak{b}\leqslant x_2}} \ln V.$$

Отсюда следует лемма.

Лемма 2. *Пусть b — целое рациональное число. Тогда, при обозначениях леммы* 1 *и при условии*

$$L=O(V),\quad b\ll V, \tag{19}$$

справедлива оценка

$$S_2 = \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R} \\ x_1\leqslant N\mathfrak{b}\leqslant x_2}} \frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}} \int_{L}^{L_1} z^{3-2s+b} J_{|m|g+|b|}(z)\,dz \ll$$

$$\ll X^{2-\sigma} V^{-1} P \left[L_1^{b}(x_2)+L^{b}(x_1)\right] \ln V. \tag{20}$$

Доказательство. Лемма доказывается аналогично как и лемма 1. Формально будут различаться два случая: когда $|m_0|<2$ и когда $|m_0|\geqslant 2$, где $m_0=|m|g+|b|$.

Пусть сначала $|m_0|\geqslant 2$.

Известно следующее свойство бесселевых функций

$$J_{-\nu}(x)=(-1)^{\nu} J_{\nu}(x) \tag{21}$$

(Ватсон [3], § 2.11). Поэтому можем считать, что $m_0>0$. Применяя формулу (14) имеем:

$$S_2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R} \\ x_1\leqslant N\mathfrak{b}\leqslant x_2}} N\mathfrak{b}^{\sigma-2} \left| \int_{L}^{L_1}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{2^{\tau-m_0-1}\Gamma\left(\frac{\tau}{2}\right) z^{3-2s+b+m_0-\tau}\,d\tau\,dz}{\Gamma\left(m_0+1-\frac{\tau}{2}\right)} \right|, \tag{22}$$

где $c=m_0-1$.

Так как для этого значения c интеграл по τ в (22), как это было показано в лемме 1, сходится абсолютно, можем переменить порядок интегрирования, проинтегрировать по z, если только в области

$$m_0-1\leqslant \operatorname{Re}\tau\leqslant m_0 \tag{23}$$

выполняется

$$|4-2s+b+m_0-\tau|\geqslant \frac{1}{2}.$$

Имеем:

$$S_2 \ll \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R} \\ x_1\leqslant N\mathfrak{b}\leqslant x_2}} N\mathfrak{b}^{\sigma-2} \left| \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{2^{\tau-m_0-1}\,\Gamma\left(\frac{\tau}{2}\right)\left(L_1^{4-2s+b+m_0-\tau}-L^{4-2s+b+m_0-\tau}\right)d\tau}{\Gamma\left(m_0+1-\frac{\tau}{2}\right)(4-2s+b+m_0-\tau)} \right|. \tag{24}$$

Так как подинтегральная функция в области (23) регулярна, можем передвинуть контур интегрирования на прямую

$$\operatorname{Re}\tau=m_0.$$

Таким образом получаем

$$S_2 \ll X^{2-\sigma}V^{-1}P\left[L_1^b(x_2)+L^b(x_1)\right]\ln V.$$

Пусть, теперь, для (23)

$$|4-2s+b+m_0-\tau|<\frac{1}{2}.$$

Тогда в (22) выберем для интегрирования по τ другой контур C', состоящий из отрезков прямых:

$$\begin{array}{lll}
c_1: & \operatorname{Re}\tau=m_0, & -\infty<\operatorname{Im}\tau\leqslant -t-1,\\
c_2: & \operatorname{Im}\tau=-t-1, & m_0-1\leqslant \operatorname{Re}\tau\leqslant m_0,\\
c_3: & \operatorname{Re}\tau=m_0-1, & -t-1\leqslant \operatorname{Im}\tau\leqslant -t+1,\\
c_4: & \operatorname{Im}\tau=-t+1, & m_0-1\leqslant \operatorname{Re}\tau\leqslant m_0,\\
c_5: & \operatorname{Re}\tau=m_0, & -t+1\leqslant \operatorname{Im}\tau<\infty.
\end{array}$$

На частях контура c_1 и c_5, которые совпадают со старым контуром, проходившим по прямой $\operatorname{Re}\tau=m_0$, имеет место оценка (20). На остальных частях этого контура имеем:

$$S_2'=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}\\ x_1\leqslant N\mathfrak{b}\leqslant x_2}}\frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}}\int_L^{L_1}\left(\int_{c_2}+\int_{c_3}+\int_{c_4}\right)\frac{2^{\tau-m_0-1}\,\Gamma\left(\frac{\tau}{2}\right)z^{3-2s+b+m_0-\tau}\,d\tau\,dz}{\Gamma\left(m_0+1-\frac{\tau}{2}\right)}\ll$$

$$\ll\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}\\ x_1\leqslant N\mathfrak{b}\leqslant x_2}}N\mathfrak{b}^{\sigma-2}\int_L^{L_1}z^{4-2\sigma+b}\int_{-t-1}^{-t+1}\frac{\left|\Gamma\left(\frac{m_0-1}{2}+\frac{it_1}{2}\right)\right|}{\left|(m_0-1-it_1)^2\,\Gamma\left(\frac{m_0-1}{2}-\frac{it_1}{2}\right)\right|}\,dt_1+$$

$$+\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}\\ x_1\leqslant N\mathfrak{b}\leqslant x_2}}N\mathfrak{b}^{\sigma-2}\int_L^{L_1}z^{3-2\sigma+b}\int_0^1\frac{\left|\Gamma\left(\frac{m_0-1}{2}+\frac{it_1}{2}+\frac{\rho}{2}\right)\right|z^{1-\rho}\,d\rho}{\left|\Gamma\left(\frac{m_0-1}{2}+\frac{it_1}{2}+2-\frac{\rho}{2}\right)\right|}\ll$$

$$\ll X^{\alpha+1-\sigma}V^{-2}\left[L_1^{b+1}(x_2)+L^{b+1}(x_1)\right]P+X^{\alpha+1-\sigma}\left[L_1^b(x_2)+L^b(x_1)\right]\times$$

$$\times\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}\\ x_1\leqslant N\mathfrak{b}\leqslant x_2}}\int_0^1\frac{\left|\frac{m_0-1}{2}+\frac{\rho}{2}+\frac{it_1}{2}\right|^{\frac{m_0}{2}+\frac{\rho}{2}-1}e^{-\left(\frac{m_0-1}{2}+\frac{\rho}{2}\right)}e^{\frac{it_1}{2}\left(i\operatorname{arctg}\frac{t_1}{m_0-1+\rho}\right)}L^{1-\rho}(x_2)\,d\rho}{\left|\frac{m_0-1}{2}+2-\frac{\rho}{2}-\frac{it_1}{2}\right|^{\frac{m_0}{2}-\frac{\rho}{2}-1}e^{-\left(\frac{m_0-1}{2}+2-\frac{\rho}{2}\right)}e^{-\frac{it_1}{2}\left(-i\operatorname{arctg}\frac{t_1}{m_0+3-\rho}\right)}}\ll$$

$$\ll\left[L_1^b(x_2)+L^b(x_1)\right]X^{\alpha+1-\sigma}P\left\{V^{-1}+\int_0^1\left|(m_0-1+\rho+it_1)(m_0+3-\rho-it_1)\right|^{\frac{\rho}{2}-1}\times\right.$$

$$\left.\times e^{-\frac{|t_1|}{2}\left\{\operatorname{arctg}\frac{|t_1|}{m_0-1+\rho}-\operatorname{arctg}\frac{|t_1|}{m_0+3-\rho}\right\}}L^{1-\rho}(x_2)\,d\rho\right\}\ll$$

$$\ll\left[L_1^b(x_2)+L^b(x_1)\right]X^{\alpha+1-\sigma}P\left\{V^{-1}+\int_0^1 V^{\rho-2}L^{1-\rho}(x_2)\,d\rho\right\}\ll$$

$$\ll X^{\alpha+1-\sigma}V^{-1}P\left[L_1^b(x_2)+L^b(x_1)\right].$$

Таким образом лемма доказана для случая $|m_0| \geqslant 2$. Если же $|m_0| < 2$, то в силу соотношения

$$dx\, J_1(x) = x J_0(x),$$

(Ватсон [3], § 2.12) имеем для $m_0 = 0$:

$$\int_L^{L_1} z^{3-2s+b} J_0(z)\, dz = O\Big\{ L^{4-2\sigma} V^{-1} (L_1^b + L^b) \,|\, J_0(L) \,| +$$

$$+ L^{5-2\sigma} V^{-2} (L_1^b + L^b) \,|\, J_1(L) \,| \Big\} + \frac{1}{(4-2s+b)(6-2s+b)} \int_L^{L_1} z^{5-2s+b} J_2(z)\, dz. \quad (25)$$

Аналогично имеем и для $|m_0| = 1$.

Известно следующее ассимптотическое представление бесселевой функции $J_\nu(x)$, верное при $\nu \ll x$:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right) \right\}$$

(Ватсон [3], § 7.21). Поэтому первый член в (25) оценивается как

$$\ll L^{\frac{7}{2} - 2\sigma} V^{-1} (L_1^b + L^b).$$

Для второго члена в (25), который имеет бесселевую функцию порядка $m_0 = 2$, справедливо, согласно выше доказанному, оценка (20). Лемма доказана.

Лемма 3. *При тех же самых обозначениях, как и в лемме* 1, *имеем в области*

$$\sigma > 2 - \frac{1}{2} a,$$

где $a > 0$ — *целое рациональное*, $|m| g + a \geqslant 2$, *следующую оценку равномерно по* s *и* X, V:

$$S_3 = \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{R} \\ x_1 \leqslant N\mathfrak{b} \leqslant x_2}} \frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}} \int_L^{L_1} z \int_z^{\infty} x^{1-2s-a} J_{|m| g+a}(x)\, dx\, dz \ll X^{\alpha+1-\sigma} V^{-1} P L^{-a}(x_1) \ln V.$$

Доказательство аналогично, как и в случае леммы 1.

Лемма 4. *Пусть* $\Psi_1(s, X) = \Psi_1(s)$ — *функция, определенная в теореме* 1 *уравнением* (5), $X \geqslant c_1 > 0$, $Y \geqslant c_2 > 0$, $V \geqslant 2$, $s = \sigma + it$,

$$\mathfrak{M}_1(s) = \Psi_1(s, X + X^\alpha) - \Psi_1(s, X), \quad (26)$$

где

$$1 < X^\alpha \leqslant X V^{-\frac{1}{2}}, \quad (27)$$

$$V = 4\pi \sqrt{\frac{XY}{D}} = \sqrt{m^2 g^2 + 4t^2}.$$

Тогда в области

$$-H < \sigma < H, \quad (28)$$

где $H > 0$ — *достаточно большая постоянная, равнотерно по* s *и* V, X, Y *справедлива оценка:*

$$\mathfrak{M}_1(s) \ll X^{1-\sigma} F \ln^2 V, \quad (29)$$

где

$$F = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad X \leqslant V^{\frac{5}{4}}, \\ V^\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, & \quad ,, \quad X > V^{\frac{5}{4}}. \end{cases} \quad (30)$$

Доказательство. Пусть сначала $m \neq 0$. Как показано в [1], функция $\mathfrak{M}_1(s)$ выражается

$$\mathfrak{M}_1(s) = -2\Theta(s) \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ N\mathfrak{b} < Y}} \frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}} \int_L^{L_1} z \int_0^z x^{1-2s} J_{mg}(x)\, dx\, dz, \tag{31}$$

где

$$\Theta(s) \leqslant 1.$$

Интегрированием по частям, применяя формулы

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) = x^n J_{n-1}(x), \\ &\frac{d}{dx}\left(x^{-n} J_n(x)\right) = -x^{-n} J_{n+1}(x), \end{aligned} \tag{32}$$

получаем

$$\mathfrak{M}_1(s) = -2\Theta(s)\varepsilon(m)\left(W_1^{(1)}(s) + W_1^{(2)}(s)\right), \tag{33}$$

где

$$W_1^{(1)}(s) = \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ N\mathfrak{b} < Y}} \frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k\left(1+\frac{|m|g}{2}-s\right)_k} \int_L^{L_1} z^{2-2s+k} J_{|m|g+k-1}(z)\, dz, \tag{34}$$

$$W_1^{(2)}(s) = \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ N\mathfrak{b} < Y}} \frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}} \frac{1}{2^K\left(1+\frac{|m|g}{2}-s\right)_K} \int_L^{L_1} z \int_0^z x^{1-2s+K} J_{|m|g+K}(x)\, dx\, dz, \tag{35}$$

$$\varepsilon(m) = \begin{cases} (-1)^{mg}, & \text{если } m < 0, \\ 1, & \text{,, } m \geqslant 0, \end{cases} \tag{36}$$

$$(\tau)_r = \tau(\tau+1)\ldots(\tau+r-1), \quad r \geqslant 1,$$

$$(\tau)_0 = 1.$$

Для оценки функции $W_1^{(n)}(s)$, $(n=1, 2)$, интервал суммирования $1 \leqslant N\mathfrak{b} < Y$ разобъем на части Q_1, Q_2, где

$$L = 4\pi\sqrt{\frac{XN\mathfrak{b}}{D}},$$

$$L \in Q_1, \quad \text{если} \quad 4\pi\sqrt{\frac{X}{D}} = L_0 \leqslant L \leqslant V - V^{\frac{1}{2}},$$

$$L \in Q_2, \quad \text{,,} \quad V - V^{\frac{1}{2}} < L < V,$$

$$Q_1 = \sum_{j=1}^{N} Q_{1j}, \quad N = \left[\frac{V - V^{\frac{1}{2}} - B_0}{V^{\frac{1}{2}}}\right], \quad B_0 = 4\pi\sqrt{\frac{X}{D}},$$

$$L \in Q_{1j}, \quad \text{если} \quad B_{j-1} \leqslant L < B_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, N),$$

$$B_j = B_0 + jV^{\frac{1}{2}}, \quad (j = 0, 1, \ldots, N-1), \quad B_N = V - V^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим

$$W_{1p}^{(1)} = \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ L\in Q_p}} \frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}} \sum_{k=1}^{K_p} \frac{1}{2^k\left(1+\frac{|m|g}{2}-s\right)_k} \int_L^{L_1} z^{2-2s+k} J_{|m|g+k-1}(z)\, dz, \tag{37}$$

$$W_{1p}^{(2)} = \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ L\in Q_p}} \frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}} \frac{1}{2^{K_p}\left(1+\frac{|m|g}{2}-s\right)_{K_p}} \int_L^{L_1} z \int_0^z x^{1-2s+K_p} J_{|m|g+K_p}(x)\, dx\, dz, \tag{38}$$

$$(p = 1, 2).$$

Полагаем

$$K_1=[10\,V^{\frac{1}{2}}\ln VX]+1. \qquad (39)$$

Следовательно, по лемме 2 получаем:

$$W_{11}^{(1)}(s)\ll\sum_{k=1}^{K_1}\frac{1}{2^k\left|\left(1+\frac{|m|g}{2}-s\right)_k\right|}\sum_{j=1}^{N}\left|\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*\\ L\in Q_{1j}}}\frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}}\int_L^{L_1}z^{2-2s+k}J'_{|m|g+k-1}(z)\,dz\right|\ll$$

$$\ll X^{2-\sigma}V^{-1}\sum_{j=1}^{N}\Big(\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*\\ L\in Q_{1j}}}1\Big)\sum_{k=1}^{K_1}\frac{(B_j\sqrt{1+X^{\alpha-1}})^{k-1}}{\left[(mg+2k)^2+T^2\right]^{\frac{k}{2}}}\ln V\ll$$

$$\ll X^{1-\sigma}V^{-\frac{1}{2}}F\sum_{j=1}^{N}\frac{V\ln V}{V-B_j\sqrt{1+X^{\alpha-1}}}\ll X^{1-\sigma}F\ln^2 V, \qquad (40)$$

где F определено в (30), $T=2|t|$. В силу выбора K_1 в (39) имеем

$$\left(\frac{L_1}{V}\right)^{K_1}\leqslant\left(\frac{(V-V^{\frac{1}{2}})\sqrt{1+X^{\alpha-1}}}{V}\right)^{K_1}\leqslant\left[(1-V^{-\frac{1}{2}})\left(1+\frac{2}{3}X^{\alpha-1}\right)\right]^{K_1}\leqslant$$

$$\leqslant\left(1-\frac{1}{3}V^{-\frac{1}{2}}\right)^{K_1}\leqslant V^{-2}.$$

Поэтому

$$W_{11}^{(2)}(s)\ll X^{2-\sigma}\left(\frac{L_1}{V}\right)^{K_{11}}\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*\\ L\in Q_1}}1\ll X^{1-\sigma}. \qquad (41)$$

Полагая $K_2=[H_1]$, где $H_1>0$ — достаточно большая постоянная, имеем в силу лемм 1 и 2:

$$W_{12}^{(1)}(s)\ll X^{2-\sigma}V^{-1}\sum_{k=1}^{K_2}L_1^{k-1}V^{-k}\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*\\ L\in Q_2}}1\cdot\ln V\ll X^{1-\sigma}V^{-\frac{1}{2}}F\ln V. \qquad (42)$$

$$W_{12}^{(2)}(s)\ll X^{\alpha+1-\sigma}V^{-1}\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*\\ L\in Q_2}}\left(\frac{L_1}{V}\right)^{K_2}\ln V\ll X^{\alpha-\sigma}V^{\frac{1}{2}}F\ln V\ll X^{1-\sigma}F\ln V. \qquad (43)$$

Из (40), (41), (42), (43) следует утверждение леммы для $m\neq0$.

В случае $m=0$ образуем функцию

$$Q_1^*(s,\ z)=\int_0^z x^{-2s}[(s-1)x^2-sz^2]\,J_1(x)\,dx,$$

из которой аналогично, как и в случае $m\neq0$ ([1]), следует

$$\mathfrak{M}_1(s)=-2s\,\Theta(s)\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*\\ N\mathfrak{b}<Y}}\frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}}\int_L^{L_1}z\int_0^z x^{-2s}J_1(x)\,dx\,dz.$$

Интегрированием по частям получаем

$$\mathfrak{M}_1(s) = -\frac{s\,\Theta(s)}{1-s} \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ N\mathfrak{b}<Y}} \frac{\bar{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{s-s}} \int_L^{L_1} z^{2-2s} J_1(z)\,dz -$$

$$-\frac{s\Theta(s)}{1-s} \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ N\mathfrak{b}<Y}} \frac{\bar{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{s-s}} \int_L^{L_1} z \int_0^z x^{1-2s} J_2(x)\,dx\,dz.$$

Второй член в полученном равенстве имеет бесселевую функцию порядка 2 и является функцией такого вида, которая оценена в выше рассмотренном случае. Следовательно, этому члену применима оценка (29).

Первый же член этого равенства еще одним таким же интегрированием по частям с применением формул (32) разбивается на два слагаемые:

$$\frac{s\Theta(s)}{1-s} \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ N\mathfrak{b}<Y}} \frac{\bar{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{s-s}} \int_L^{L_1} z^{2-2s} J_1(z)\,dz =$$

$$= \frac{s\Theta(s)}{2(1-s)(2-s)} \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ N\mathfrak{b}<Y}} \frac{\bar{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{s-s}} \left[\left(L_1^{3-2s} J_1(L_1) - L^{3-2s} J_1(L)\right) + \int_L^{L_1} z^{3-2s} J_2(z)\,dz\right].$$

Очевидно, что первое слагаемое по абсолютной величине не превышает оценки (29), второе же только множителем, оцениваемым константой, отличается от первого члена суммы по k в (34). Так как сумма (34), как легко проверить, оценивается по абсолютной величине всех своих слагаемых, то отсюда следует справедливость леммы и для $m=0$.

Лемма 5. *Пусть* $\Psi_2(s)=\Psi_2(s,\ X)$ — *функция, определенная в теореме* 1 *уравнением* (6), $X\geqslant c_1>0$, $Y\geqslant c_2>0$, $V\geqslant 2$, $s=\sigma+it$,

$$\mathfrak{M}_2(s)=\Psi_2(s,\ X+X^{\alpha})-\Psi_2(s,\ X), \tag{44}$$

где

$$1<X^{\alpha}\leqslant XV^{-\frac{1}{2}}, \tag{44}$$

$$V=4\pi\sqrt{\frac{XY}{D}}.$$

Тогда в области

$$-H<\sigma<H, \tag{46}$$

где $H>0$ — *достаточно большая постоянная, равномерно по* s *и* V, X, Y *справедлива оценка:*

$$\mathfrak{M}_2(s)\ll X^{1-\sigma} F \ln^2 V, \tag{47}$$

где

$$F=\begin{cases} 1, & \textit{если} \quad X\leqslant V^{\frac{5}{4}}, \\ V^{\varepsilon},\quad \varepsilon>0, & \quad ,, \quad\ \ X>V^{\frac{5}{4}}. \end{cases} \tag{48}$$

Доказательство. Пусть $m\neq 0$. Как было показано в [1], имеет место равенство

$$\mathfrak{M}_2(s)=-2\Theta(s)\,\varepsilon(m)\left(W_2^{(1)}(s)+W_2^{(2)}(s)\right), \tag{49}$$

где

$$W_2^{(1)}(s)=-\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*\\ N\mathfrak{b}\geqslant Y}}\frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}}\sum_{k=1}^{K}2^{k-1}\left(\frac{|m|g}{2}+s\right)_{k-1}\int_L^{L_1}z^{3-2s-k}J_{|m|g+k}(z)\,dz, \quad (50)$$

$$W_2^{(2)}(s)=\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*\\ N\mathfrak{b}\geqslant Y}}\frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}}2^K\left(\frac{|m|g}{2}+s\right)_K\int_L^{L_1}z\int_z^{\infty}x^{1-2s-K}J_{|m|g+K}(x)\,dx\,dz; \quad (51)$$

$\varepsilon(m)$ и $(\tau)_r$ определены в (36), $\Theta(s)\ll 1$.

Разобъем интервал суммирования на части Q_1, Q_2, Q_3:

$$\begin{aligned}
&L\in Q_1, && \text{если} && V\leqslant L\leqslant V_1=V+10V^{\frac{1}{2}}\ln^{\frac{1}{2}}V,\\
&L\in Q_2, && ,, && V_1<L\leqslant 2V,\\
&L\in Q_3, && ,, && 2V<L.
\end{aligned}$$

Обозначим:

$$Q_2=\sum_{j=1}^{N}Q_{2j}, \qquad N=\left[\frac{2V-V_1}{V^{\frac{1}{2}}}\right],$$

$$L\in Q_{2j}, \quad \text{если} \quad D_{j-1}\leqslant L<D_j, \qquad (j=1,\,2,\,\ldots,\,N),$$

$$D_0=V_1, \quad D_N=2V, \quad D_j=D_{j-1}+V^{\frac{1}{2}}, \quad (j=1,\,2,\,\ldots,\,N-1).$$

Интервалам Q_p, $(p=1,\,2,\,3)$, соответствующие части сумм $W_2^n(s)$, $(n=1,\,2)$, обозначим через $W_{2p}^{(n)}(s)$.

Полагая

$$K_1=[H_1],$$

где $H_1>0$ достаточно большая постоянная, также, как и в случае леммы 4, получим, используя леммы 2 и 3:

$$W_{21}^{(1)}(s)+W_{22}^{(2)}(s)\ll X^{1-\sigma}F\ln^2 V. \quad (52)$$

Полагая, далее,

$$K_2=[3V^{\frac{1}{2}}\ln^{\frac{1}{2}}V]+1,$$

имеем, применяя лемму 2,

$$W_{22}^{(1)}(s)=-\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*\\ L\in Q_{2j}}}\frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{2-s}}\sum_{k=1}^{K_2}2^{k-1}\left(\frac{|m|g}{2}+s\right)_{k-1}\int_L^{L_1}z^{3-2s-k}J_{|m|g+k}(z)\,dz\ll$$

$$\ll\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K_2}X^{2-\sigma}V^{-2}\sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^*\\ L\in Q_{2j}}}\frac{\left((|m|g+2K_2)^2+T^2\right)^{\frac{k}{2}}}{L^k}\ll$$

$$\ll X^{1-\sigma}V^{-\frac{1}{2}}F\sum_{j=1}^{N}\frac{V\ln V}{V_1+(j-1)V^{\frac{1}{2}}-\sqrt{(|m|g+2K_2)^2+T^2}}\ll X^{1-\sigma}F\ln^2 V. \quad (53)$$

В силу выбора K_2:

$$\frac{2^{K_2}\left(\frac{|m|g}{2}+s\right)_{K_2}}{V_1^{K_2}}\ll\left[\frac{(|m|g+2K_2)^2+4t^2}{(V+10V^{\frac{1}{2}}\ln^{\frac{1}{2}}V)^2}\right]^{\frac{K_2}{2}}\ll\left(1-\frac{7V^{\frac{1}{2}}\ln^{\frac{1}{2}}V}{V^2}\right]^{\frac{K_2}{2}}\ll V^{-2}.$$

Следовательно,

$$W_{22}^{(2)}(s) \ll X^{1-\sigma} F. \tag{54}$$

Для оценки $W_{23}^{(1)}(s)$, проинтегрируем интеграл по z в (50) еще K_3 раз по частям, применяя формулы (32). Имеем

$$W_{23}^{(1)}(s) = \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ L\in Q_3}} \frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{s-s}} \left\{ \sum_{k=1}^{K_3} 2^{k-1} \left(\frac{|m|g}{2} + s \right)_{k-1} \sum_{k_1=1}^{K_3} 2^{k_1-1} \left(\frac{|m|g}{2} + s + k \right)_{k_1-1} \times \right.$$

$$\left. \times \left(L_1^{4-2s-k-k_1} J_{|m|g+k+k_1}(L_1) - L^{4-2s-k-k_1} J_{|m|g+k+k_1}(L) \right) + O\left(K_3 L^{4-2\sigma} \left(\frac{V}{L} \right)^{K_3} \right) \right\} \ll$$

$$\ll X^{1-\sigma} \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ L\geqslant 2V}} N\mathfrak{b}^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{K_3} \left(\frac{V+k}{L} \right)^k \sum_{k_1=1}^{K_3} \left(\frac{V+k+k_1}{L} \right)^{k_1} |J_{|m|g+k+k_1}(L)| + \right.$$

$$\left. + K_3 L^2 \left(\frac{V}{L} \right)^{K_3} \right\}.$$

Полагая

$$K_3 = [10 \ln V] + 1,$$

а также имея в виду асимптотическое представление бесселевой функции

$$J_\nu(x) = M_\nu \cos\left(A_\nu - \frac{\pi}{4} \right),$$

где

$$M_\nu \sim \left(\frac{2}{\pi \sqrt{x^2 - \nu^2}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$A_\nu \sim \sqrt{x^2 - \nu^2} - \frac{\pi\nu}{2} + \nu \arcsin \frac{\nu}{x},$$

(Ватсон [3], § 8.12), получаем

$$J_{|m|g+k+k_1}(L) \ll L^{-\frac{1}{2}},$$

и

$$\begin{aligned} W_{23}^{(1)}(s) &\ll X^{1-\sigma} V^{-\frac{1}{2}}, \\ W_{23}^{(2)}(s) &\ll X^{1-\sigma} V^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{55}$$

Собирая полученные оценки (52), (53), (54), (55), получаем утверждение леммы при $m \neq 0$.

При $m = 0$ оценка получается та же самая таким же образом как и в лемме 4 для соответствующего случая.

Теорема 2. *Пусть $Z(s, \Xi, R)$ — дзета-функция Гекке для любого фиксированного класса идеалов мнимого квадратичного поля $K(\sqrt{-d})$, Ξ — характер Гекке второго рода* $\operatorname{mod} \mathfrak{m}$ *с показателем целым рациональным m, $s = \sigma + it$, $H > 0$ — достаточно большое число, $X \geqslant c_1 > 0$, $Y \geqslant c_2 > 0$ — достаточно большие числа, g — число единиц поля,* $\equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$.

Тогда в области

$$\begin{aligned} -H < \operatorname{Re} s < H, \\ |t| \geqslant E(\Xi) \end{aligned} \tag{56}$$

имеет место равномерно по s, X, V приближенное функциональное уравнение

$$Z(s,\ \Xi,\ \mathfrak{R}) = \sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\mathfrak{R} \\ N\mathfrak{a}<X}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s} + \psi(s) \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ N\mathfrak{b}<Y}} \frac{\overline{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{1-s}} + O(R), \tag{57}$$

где

$$R = (V^{\frac{1}{2}} X^{-\sigma} + X^{\frac{1}{2}-\sigma}) F \ln^2 V, \tag{58}$$

$$V = 4\pi \sqrt{\frac{XY}{D}} = \sqrt{m^2 g^2 + 4t^2}, \tag{59}$$

$$D = |d|\, N\mathfrak{m},$$

$$F = \begin{cases} 1, & X \leqslant V^{\frac{5}{4}}, \\ V^{\varepsilon},\quad \varepsilon>0, & X > V^{\frac{5}{4}}. \end{cases} \tag{60}$$

Функция $\psi(s)$ и класс идеалов $\mathfrak{R}^*$ определяются из уравнения

$$Z(s,\ \Xi,\ \mathfrak{R}) = \psi(s) Z(1-s,\ \overline{\Xi},\ \mathfrak{R}^*). \tag{61}$$

Доказательство. Теорема доказывается таким же образом, как и теорема 2 в [1]. Для оценки соответствующих функций $\mathfrak{M}_1(s)$ и $\mathfrak{M}_2(s)$ применяются леммы 4, 5 и полагается

$$X^{\alpha} = \begin{cases} XV^{-\frac{1}{2}}, & X<V, \\ X^{\frac{1}{2}}, & X \geqslant V. \end{cases} \tag{62}$$

Замечание 1. Приближенное функциональное уравнение доказано при соотношении (59):

$$4\pi \sqrt{\frac{XY}{D}} = \sqrt{m^2 g^2 + 4t^2}.$$

При этом условии получается при данном методе вывода приближенного функционального уравнения наилучшая оценка остаточного члена. При $|V - 4\pi\sqrt{XYD^{-1}}| \gg V^{\frac{1}{2}}$, как нетрудно показать, второй член в (57) приобретает вид

$$\psi(s) \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{R}^* \\ N\mathfrak{b}\leqslant \frac{V^2}{X}}} \frac{\overline{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{1-s}} \tag{63}$$

и для большинства практических применений только ухудшает расчеты. Таким образом условие (59) вытекает натуральным образом из всей данной методики получения приближенного функционального уравнения.

Отметим, между прочим, что и в приближенном функциональном уравнении дзета-функции Дедекинда, которое получено Фишером [5] в случае вещественного квадратичного поля, количество членов в обоих суммах приближенного уравнения является таким же как и здесь, а именно:

$$XY = O(T^2). \tag{64}$$

Вероятно, что специфика квадратных полей в некоторой степени влияет на это обстоятельство.

Замечание 2. Пусть $m \ll |t|$, $Y \ll X$. Тогда, как легко проверить, остаточный член приближенного функционального уравнения совпадает с остаточным членом (7.4) и [1].

Замечание 3. В [1] замечены некоторые опечатки: на стр. 63 формулу (5.6) следует читать

$$\sigma > \frac{5}{4},$$

на стр. 77 в формуле (7.13) множитель перед фигурными скобками должен быть

$$X^{-\alpha}.$$

Кроме того, в силу в начале статьи изложенных объяснений, теоремы 2 и 3 в [1] следует объединить в одну, которая должна читаться так, как в настоящей статье теорема 2.

Институт физики и математики
Академии Наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
10.XI.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Булота К. Приближенное функциональное уравнение Z-функций Гекке мнимого квадратичного поля, Лит. мат. сб., **II**, № 2 (1962), 39–82.
2. Булота К. Некоторые теоремы о густоте нулей Z-функций Гекке. Лит. мат. сб., **III**, № 1 (1963), 29–50.
3. Ватсон Н. Г. Теория Бесселевых функций. Ч. I, Москва, 1949.
4. K. Chandrasekharan, R. Narasiman. Hecke's functional equation and arithmetical identities, Annals of Math., **74**, № 1 (1961), 1—2.
5. Fischer W. Über die Zeta-funktion des reelquadratischen Zahlkörpers, Math. Zeitschrift, **57** (1952), Heft 1, 94—115.

APIE HEKĖS Z-FUNKCIJŲ ARTUTINĘ FUNKCIONALINĘ LYGTĮ

K. BULOTA

(Reziumė)

Straipsnyje [1] buvo parodyta, kad kvadratinio menamo skaičių kūno atveju Hekės dzeta-funkcijoms galioja artutinė funkcionalinė lygtis

$$Z(s, \Xi, \mathfrak{R}) = \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{R} \\ N\mathfrak{b} < X}} \frac{\Xi(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^s} + \psi(s) \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}^* \\ N\mathfrak{b} < Y}} \frac{\overline{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{1-s}} + O(R);$$

čia Ξ — Hekės antros rūšies charakteris su rodikliu m, $\mathfrak{R}$ ir $\mathfrak{R}^*$ — kūno idealų klasės, $X \geqslant c_1 > 0$, $Y \geqslant c_2 > 0$.

Liekamasis narys R buvo įvertintas, kai:

$$-H < \operatorname{Re} s < H,$$

$$|\operatorname{Im} s| = 2\pi \sqrt{\frac{XY}{D}},$$

$$m \ll |\operatorname{Im} s|.$$

Įvertinant jį, buvo naudotasi, be kita ko, formulėmis (3.48)—(3.50), kurios, iš analogijos su kitais tokio tipo žinomais įvertinimais, buvo paliktos be įrodymo.

Tačiau minėtos formulės, nors galimas dalykas, jos teisingos, reikalingos atskiro įrodymo.

Šiame straipsnyje duodamas pilnas liekamojo nario įrodymas, panaudojant Beselio funkcijų apvertimo integralą.

Taip pat šiame įrodyme atkrinta sąlyga

$$m \ll |\operatorname{Im} s|.$$

Esant pareinamybei

$$\sqrt{m^2 g^2 + 4t^2} = 4\pi \sqrt{\frac{XY}{D}};$$

čia $t = |\operatorname{Im} s|$, g, D — nuo kūno pareinantieji definuoti dydžiai, liekamasis narys R yra formos

$$R = \left(X^{\frac{1}{4}-\sigma} Y^{\frac{1}{4}} + X^{\frac{1}{2}-\sigma}\right) \ln^2 X,$$

ir iš esmės sutampa su duotuoju minėtajame straipsnyje [1], kai

$$X \geqslant Y \ln^2 Y.$$

ON THE APPROXIMATE FUNCTIONAL EQUATION OF HECKE'S Z-FUNCTIONS

K. BULOTA

(Summary)

In the article [1] was developed the following approximate functional equation for the Hecke's Z-functions in the case of algebraic quadratic immaginary number field

$$Z(s, \Xi, \mathfrak{R}) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{R} \\ N\mathfrak{a} < X}} \frac{\Xi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s} + \psi(s) \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}^* \\ N\mathfrak{b} < Y}} \frac{\overline{\Xi}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^{1-s}} + O(R),$$

where X, Y, H — enough large positive numbers, the function $\psi(s)$ and the classes of ideals $\mathfrak{R}$ and $\mathfrak{R}^*$ satisfy the equation

$$Z(s, \Xi, \mathfrak{R}) = \psi(s) Z(1-s, \overline{\Xi}, \mathfrak{R}^*).$$

The rest-term R was obtained under the conditions:

$$-H < \operatorname{Re} s < H,$$

$$|\operatorname{Im} s| = 2\pi \sqrt{\frac{XY}{D}},$$

$$m \ll |\operatorname{Im} s|,$$

where g, D — definite numbers, depending of the field K, using by the way the formulas (3.48)—(3.50), which were leaved without a proof as being correctly by analogy with the others well-known estimations. However those formulas must be proved although they maybe right.

In this paper is given a complete proof of the rest-term's estimation applying the inversion integral of the Bessel's function, besides the condition $m \ll |\operatorname{Im} s|$ is taken off.

Here is obtained the following rest-term

$$R = \left(X^{\frac{1}{4}-\sigma} Y^{\frac{1}{4}} + X^{\frac{1}{2}-\sigma}\right) \ln^2 X,$$

where

$$\sqrt{m^2 g^2 + 4|\operatorname{Im} s|^2} = 4\pi \sqrt{\frac{XY}{D}},$$

$$|m| + |\operatorname{Im} s| \geqslant 1.$$