IV ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2

1964

О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ СУММ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Б. ГРИГЕЛИОНИС

Пусть имеется последовательность

$$\xi_1, \ \xi_2, \ \ldots, \ \xi_n, \ \ldots$$

независимых неотрицательных одинаково распределенных случайных величин с общей функцией распределения $F(x)$. Чтоб исключить тривиальный случай, мы будем предполагать, что ξ_k не равны константе с вероятностью единица.

Обозначим

$$S_0=0, \quad S_m=\sum_{k=1}^{m} \xi_k \qquad (m=1, \ 2, \ \ldots).$$

Случайный процесс $X(t)$ $(t \in [0, \ \infty))$ называем процессом восстановления, если $X(t)$ равно максимальному значению m, для которого $S_m<t$. Если величины ξ_k интерпретировать как длительности существования последовательности заменяемых элементов, то $X(t)$ будет числом восстановлений элемента за отрезок времени $(0, \ t)$.

В. Феллером в работе [1] (см. также [2], [3]), исходя из соотношения

$$\mathbf{P}\left\{ S_n<t \right\}=\mathbf{P}\left\{ X(t) \geqslant n \right\},$$

в частности, была доказана следующая теорема об асимптотической нормальности $X(t)$ при больших t. Если $\alpha_2<\infty$, то

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{X(t)-\dfrac{t}{\alpha_1}}{c\sqrt{t}}<x \right\}=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du,$$

где

$$\alpha_k=\int_0^{\infty} x^k\,dF(x), \qquad c^2=\frac{\alpha_2-\alpha_1^2}{\alpha_1^3}.$$

Мы будем рассматривать последовательность

$$X_1(t), \quad X_2(t), \ \ldots, \ X_n(t), \ \ldots$$

независимых одинаково распределенных процессов восстановления. Сумму $\sum_{k=1}^{n} X_k(t)$ можем интерпретировать как число восстановлений за отрезок времени $(0, \ t)$ в системе, состоящей из n однородных элементов.

В настоящей работе исследуются условия асимптотической нормальности сумм $\sum_{k=1}^{n} X_k(t)$ при больших значениях n и t.

Обозначим

$$Y_n(t) = \frac{1}{c\sqrt{nt}} \sum_{k=1}^{n} \left(X_k(t) - \Lambda(t)\right),$$

где

$$\Lambda(t) = \mathbf{M}\, X_k(t); \quad F_{n,t}(x) = \mathbf{P}\left\{ Y_n(t) < x \right\}.$$

Используя метод характеристических функций и известные результаты В. Л. Смита [4] об асимптотическом поведении старших моментов процесса восстановления $X(t)$ при $t \to \infty$, докажем следующее утверждение.

Теорема. *Если* $\alpha_4 < \infty$ *и при некотором* ν $F^{*(\nu)}(x)$ *имеет абсолютно непрерывную компоненту, то*

$$\lim_{n,\, t \to \infty} F_{n,t}(x) = \Phi(x)$$

равномерно относительно x.

Доказательство. Пусть

$$f_t(z) = \mathbf{M}\, e^{iz\left(X_k(t) - \Lambda(t)\right)}.$$

В силу независимости процессов $X_k(t)$ имеем

$$f_{n,t}(z) = \mathbf{M}\, e^{iz Y_n(t)} = \left(\mathbf{M}\, e^{iz\frac{1}{c\sqrt{nt}}\left(X_k(t) - \Lambda(t)\right)}\right)^n = f_t^n\left(\frac{z}{c\sqrt{nt}}\right). \tag{1}$$

Но

$$f_t\left(\frac{z}{c\sqrt{nt}}\right) = 1 - \frac{z^2}{2c^2 nt}\, \mathbf{M}\left(X_k(t) - \Lambda(t)\right)^2 + \mathbf{M}\, R\left(\frac{z}{c\sqrt{nt}},\ X_k(t) - \Lambda(t)\right), \tag{2}$$

где

$$R(z,\ x) = -\frac{iz^3x^3}{6} + \frac{z^4 e^{izx}}{24} \int_0^x e^{-izu} u^3\, du.$$

Отсюда

$$\left| \mathbf{M}\, R\left(\frac{z}{c\sqrt{nt}},\ X_k(t) - \Lambda(t)\right) \right| \leqslant \frac{|z|^3}{6c^3 nt\sqrt{nt}} \left| \mathbf{M}\left(X_k(t) - \Lambda(t)\right)^3 \right| +$$

$$+ \frac{z^4}{24c^4 n^2 t^2}\, \mathbf{M}\left(X_k(t) - \Lambda(t)\right)^4. \tag{3}$$

Семиинвариант r-го порядка $X_k(t)$ обозначим через $\Gamma_r(t)$. Из результатов В. Л. Смита [4] следует, что если $\alpha_r < \infty$ и при некотором ν $F^{*(\nu)}(x)$ имеет абсолютно непрерывную компоненту, то

$$\Gamma_r(t) = \gamma_r t + o(t) \quad (t \to \infty). \tag{4}$$

Если, кроме того, $\alpha_{r+p+1} < \infty$ $(p \geqslant 0)$, то

$$\Gamma_r(t) = \gamma_r t + \sigma_r + o\left(\frac{1}{t^p}\right) \quad (t \to \infty). \tag{5}$$

Константы γ_r и σ_r являются конечными рациональными функциями от моментов α_k до r-го и $r+1$-го порядка соответственно.

В частности,

$$\gamma_1 = \frac{1}{\alpha_1}, \qquad \sigma_1 = \frac{\alpha_2}{2\alpha_1^2} - 1,$$

$$\gamma_2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1^2}{\alpha_1^3}, \qquad \sigma_2 = \frac{5\alpha_2^2}{4\alpha_1^4} - \frac{2\alpha_3}{3\alpha_1^3} - \frac{\alpha_2}{2\alpha_1^2},$$

$$\gamma_3 = \frac{3\alpha_2^2}{\alpha_1^5} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1^4} - \frac{3\alpha_2}{\alpha_1^3} + \frac{1}{\alpha_1}.$$

Из известных соотношений между центральными моментами и семиинвариантами получаем, что

$$\mathbf{M}\left(X_k(t) - \Lambda(t)\right)^2 = \Gamma_2(t).$$

$$\mathbf{M}\left(X_k(t) - \Lambda(t)\right)^3 = \Gamma_3(t) \tag{6}$$

и

$$\mathbf{M}\left(X_k(t) - \Lambda(t)\right)^4 = \Gamma_4(t) + 3\Gamma_2^2(t).$$

Отсюда в силу (3) и (4)

$$\left| \mathbf{M} R\left(\frac{z}{c\sqrt{nt}}, \quad X_k(t) - \Lambda(t)\right) \right| \leqslant c_1 \left(\frac{|z|^3}{n\sqrt{nt}} + \frac{z^4}{n^2}\right). \tag{7}$$

Через $c_1, c_2, \ldots$ мы обозначаем положительные константы, зависящие лишь от моментов α_k.

Поскольку

$$\left| \frac{1}{c^2 t} \mathbf{M}\left(X_k(t) - \Lambda(t)\right)^2 - 1 \right| \leqslant \frac{c_2}{t},$$

то из соотношений (2) и (7) находим, что

$$f_t\left(\frac{z}{c\sqrt{nt}}\right) = 1 - \frac{z^2}{2n} - R_{n,t}(z), \tag{8}$$

где

$$\left| R_{n,t}(z) \right| \leqslant c_3 \left(\frac{z^2}{nt} + \frac{|z|^3}{n\sqrt{nt}} + \frac{z^4}{n^2}\right).$$

Далее везде будем предполагать, что $|z| \leqslant c_4\sqrt{n}$, где c_4 — достаточно малая положительная константа. Из (8) тогда получим, что

$$\left| f_t\left(\frac{z}{c\sqrt{nt}}\right) \right| \geqslant 1 - \frac{c_4^2}{2} - c_3\left(\frac{c_4^2}{t} + \frac{c_4^3}{\sqrt{t}} + c_4^4\right) \geqslant c_5 > 0.$$

Значит, для таких z $f_t\left(\frac{z}{c\sqrt{nt}}\right)$ отлична от нуля и

$$f_{n,t}(z) = \exp\left\{ n \ln f_t\left(\frac{z}{c\sqrt{nt}}\right) \right\} = \exp\left\{ n \ln\left[1 - \left(\frac{z^2}{2n} + R_{n,t}(z)\right)\right] \right\} =$$

$$= \exp\left\{ -\frac{z^2}{2} - nR_{n,t}(z) - \bar{R}_{n,t}(z) \right\}, \tag{9}$$

где

$$\bar{R}_{n,t}(z) = \frac{n}{2}\left(\frac{z^2}{2n} + R_{n,t}(z)\right)^2 \left(1 - \Theta\left(\frac{z^2}{2n} + R_{n,t}(z)\right)\right)^{-2}, \qquad |\Theta| < 1.$$

Имеем

$$\left|\bar{R}_{n,t}(z)\right| \leqslant n\left(\frac{z^4}{4n^2} + \left|R_{n,t}(z)\right|^2\right) c_5^{-2} \leqslant \frac{z^4}{4c_5^2 n} + $$
$$+ 4n\left(\frac{c_3}{c_5}\right)^2\left(\frac{z^4}{n^2 t^2} + \frac{z^6}{n^3 t} + \frac{z^8}{n^4}\right) \leqslant \frac{c_6 z^4}{n}. \qquad (10)$$

Пользуясь неравенством

$$|e^w - 1| \leqslant |w|\, e^{|w|},$$

из соотношений (8) – (10) найдем, что

$$\left|f_{n,t}(z) - e^{-\frac{z^2}{2}}\right| = e^{-\frac{z^2}{2}}\left|\exp\left\{-n R_{n,t}(z) - \bar{R}_{n,t}(z)\right\} - 1\right| \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\frac{z^2}{2}}\left|n R_{n,t}(z) + \bar{R}_{n,t}(z)\right| e^{\left|n R_{n,t}(z) + \bar{R}_{n,t}(z)\right|} \leqslant$$
$$\leqslant c_7\left(\frac{z^2}{t} + \frac{|z|^3}{\sqrt{nt}} + \frac{z^4}{n}\right) e^{-z^2\left[\frac{1}{2} - c_7\left(\frac{1}{t} + \frac{c_4}{\sqrt{t}} + c_4^2\right)\right]} \leqslant$$
$$\leqslant c_7\left(\frac{z^2}{t} + \frac{|z|^3}{\sqrt{nt}} + \frac{z^4}{n}\right) e^{-c_8 z^2},$$

где $c_8 > 0$ при достаточно большом t и достаточно малом c_4.

Применяя известную теорему Эссеена (см., например, [6] стр. 211), выбрав $T = c_4\sqrt{n}$, получим, что

$$\sup_{-\infty < x < \infty}\left|F_{n,t}(x) - \Phi(x)\right| \leqslant c_9\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\sqrt{nt}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant c_{10}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Отсюда и следует утверждение теоремы.

Отметим, что поскольку $\Lambda(t) = \Gamma_1(t)$, то при предположениях нашей теоремы в силу (5)

$$\Lambda(t) = \frac{t}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{2\alpha_1^2} - 1 + o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Условия доказанной теоремы, по-видимому, могут быть ослаблены, а сам результат распространен на случай разнораспределенных слагаемых процессов восстановления $X_k(t)$.

Институт физики и математики
Академии Наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
25.X.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Feller. Fluctuation theory of recurrent events, Trans. Amer. Math. Soc., **67** (1949), 98—119.
2. L. Takács. On a probability theorem arising in the theory of counters, Proc. Camb. Phil. Soc., **52** (1956), 488—498.
3. W. L. Smith. Renewal theory and its ramifications, J. Roy. Stat. Soc., Ser. B, **20**, 2 (1958), 243—302.
4. W. L. Smith. On the cumulants of renewal processes, Biometrica, **46**, 1—2 (1959), 1—29.
5. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., Гостехиздат, 1949.

APIE CENTRINĘ RIBINĘ TEOREMĄ ATSTATYMO PROCESŲ SUMOMS

B. GRIGELIONIS

(R e z i u m ė)

Sakysime, turime seką $\{\xi_k\}$ nepriklausomų neneigiamų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių. Žymėsime

$$F(x) = \mathbf{P}\{\xi_k < x\}, \quad \alpha_k = \int_0^\infty x^k\, dF(x), \quad S_0 = 0, \quad S_m = \sum_{k=1}^m \xi_k\ (k \geqslant 1).$$

Atsitiktinį procesą $X(t)$ $(t\in[0, \infty))$ vadiname atstatymo procesu, jei $X(t) = \max(m : S_m < t)$.

Darbe nagrinėjama seka $\{X_k(t)\}$ nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atstatymo procesų. Įrodoma, kad jei $\alpha_4 < \infty$ ir egzistuoja ν, kuriam $F^{*(\nu)}(x)$ turi absoliučiai tolydinę komponentę, tai

$$\lim_{n,\, t\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{1}{c\sqrt{nt}} \sum_{k=1}^n \Big(X_k(t) - \Lambda(t)\Big) < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

tolygiai atžvilgiu x; čia

$$\Lambda(t) = \mathbf{M}\, X_k(t), \qquad c^2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1^2}{\alpha_1^3}.$$

ON THE CENTRAL LIMIT THEOREMS FOR SUMS OF THE RENEWAL PROCESSES

B. GRIGELIONIS

(S u m m a r y)

Let we have a sequence $\{\xi_k\}$ of the independent nonnegative equally distributed random variables. Let

$$F(x) = \mathbf{P}\{\xi_k < x\}, \quad \alpha_k = \int_0^\infty x^k\, dF(x), \quad S_0 = 0, \quad S_m = \sum_{k=1}^m \xi_k \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

A stochastic process $X(t)$ $(t\in[0, \infty))$ we call to be a renewal process, if $X(t) = \max(m : S_m < t)$.

In the paper it is examined a sequence $\{X_k(t)\}$ of the independent equally distributed renewal processes. We prove that if $\alpha_4 < \infty$ and for some ν $F^{*(\nu)}(x)$ has an absolutely continuous component, then

$$\lim_{n,\, t\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{1}{c\sqrt{nt}} \sum_{k=1}^n \Big(X_k(t) - \Lambda(t)\Big) < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

uniformly with respect to x, where

$$\Lambda(t) = \mathbf{M}\, X_k(t), \qquad c^2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1^2}{\alpha_1^3}.$$