IV ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1964

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ СХОДИМОСТИ К УСТОЙЧИВОМУ ПРЕДЕЛЬНОМУ ЗАКОНУ

А. МИТАЛАУСКАС

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots \tag{1}$$

с функциями распределения $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... и характеристическими функциями $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... Пусть

$$S_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k-A_n}{B_n},\qquad f_n(t)=\mathbf{M}\,e^{itS_n}.$$

Вопрос о том, когда $\mathbf{P}\{S_n<x\}$ при соответствующем подборе нормирующих коэффициентов A_n и $B_n>0$ сходится к функции распределения устойчивого закона, полностью решен только в случае одинаково распределенных случайных величин (см., напр., [1]). В случае же различно распределенных случайных величин известны лишь частные результаты. Упомянем работы Б. А. Рогозина [2], автора [3], В. М. Золотарева [4]. Однако результаты [2] и [3] не допускают уточнений в смысле асимптотических разложений, а в [4] имеются ошибочные утверждения, приводящие к неверному результату. Цель настоящей заметки – восполнить пробелы работы [4].

Обозначим через $G_\alpha(x,\lambda)$ функцию распределения устойчивого закона, заданную характеристической функцией

$$g_\alpha(t,\lambda)=\begin{cases}\exp\left\{-\lambda|t|^\alpha\exp\left[-i\frac{\pi}{2}\beta(1-|1-\alpha|)\operatorname{sgn}t\right]\right\}, & \alpha\neq1,\\ \exp\left\{-\lambda|t|\left[\frac{\pi}{2}+i\beta\ln t\operatorname{sgn}t\right]\right\}, & \alpha=1,\end{cases}$$

где

$$0<\alpha\leqslant2,\quad -1\leqslant\beta\leqslant1,\quad \lambda>0.$$

Обозначим далее

$$\Omega_k(x)=F_k(x)-G_\alpha(x,\lambda_k);$$
$$\omega_k(t)=\varphi_k(t)-g_\alpha(t,\lambda_k);$$
$$\mu_k(m)=\int_{-\infty}^{\infty}x^m\,d\Omega_k(x);$$
$$\nu_k(r)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^r\,|d\Omega_k(x)|;$$

где $r\geqslant0$, $m>0$ – целое и $\{\lambda_k\}$ – последовательность положительных чисел.

Отметим, что если абсолютные моменты $\nu_k(\alpha)$ конечны для всех k, то путем линейного преобразования $\mu_k([\alpha])$ можем сделать равными нулю.

Выберем постоянные A_n и B_n следующим образом:

$$B_n=\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad A_n=\begin{cases} 0, & \alpha\neq 1, \\ \beta B_n \ln B_n, & \alpha=1. \end{cases}$$

Теорема. *Пусть последовательность* (1) *удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Существует последовательность* $\{\lambda_k\}$, *для которой* $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k=\infty$ *и абсолютные моменты* $\nu_k(\alpha)$ *конечны для всех* k;

2. *Для любого* $\tau>0$

$$\frac{1}{B_n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\tau B_n}|x|^\alpha|d\Omega_k(x)|\to 0 \quad \textit{при} \quad n\to\infty;$$

3. *С ростом* n

$$\sum_{k=1}^{n}\nu_k(\alpha)=O(B_n^\alpha).$$

Тогда при $n\to\infty$ *равномерно относительно* x

$$\mathbf{P}\{S_n<x\}\to G_\alpha(x,\ 1).$$

Доказательство. Для доказательства нам достаточно показать, что в произвольном конечном интервале $|t|\leqslant T$

$$\lim_{n\to\infty}f_n(t)=g_\alpha(t,\ 1).$$

Преобразуем характеристическую функцию $f_n(t)$ следующим образом:

$$f_n(t)=e^{-it\frac{A_n}{B_n}}\prod_{k=1}^{n}\left[g_\alpha\left(\frac{t}{B_n},\ \lambda_k\right)+\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right]=$$

$$=e^{-it\frac{A_n}{B_n}}\prod_{k=1}^{n}g_\alpha\left(\frac{t}{B_n},\ \lambda_k\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_\alpha\left(\frac{t}{B_n},\ \lambda_k\right)}\right)=$$

$$=g_\alpha(t,\ 1)\exp\left\{\prod_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_\alpha\left(\frac{t}{B_n},\ \lambda_k\right)}\right)\right\}.$$

При $\alpha<1$ для $\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)$ имеем

$$\left|\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{i\frac{t}{B_n}x}-1\right||d\Omega_k(x)|\leqslant\int_{\left|\frac{t}{B_n}x\right|\leqslant\delta}\left|\frac{t}{B_n}x\right||d\Omega_k(x)|+$$

$$+\int_{\left|\frac{t}{B_n}x\right|>\delta}|d\Omega_k(x)|\leqslant\delta^{1-\alpha}\frac{|t|^\alpha}{B_n^\alpha}\nu_k(\alpha)+\frac{1}{\delta^\alpha}\frac{|t|^\alpha}{B_n^\alpha}\int_{|x|>\frac{\delta B_n}{|t|}}|x|^\alpha|d\Omega_k(x)|.$$

При $\alpha \geqslant 1$ $\left(\text{считая, что } \mu_k(1)=0\right)$:

$$\left|\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{i\frac{t}{B_n}x} - 1 - i\frac{t}{B_n}x\right| |d\Omega_k(x)| \leqslant \frac{1}{2} \int_{\left|\frac{t}{B_n}x\right| \leqslant \delta} \left|\frac{t}{B_n}x\right|^2 |d\Omega_k(x)| +$$

$$+ \int_{\left|\frac{t}{B_n}x\right| > \delta} \left|\frac{t}{B_n}x\right| |d\Omega_k(x)| \leqslant \frac{1}{2}\delta^{2-\alpha}\frac{|t|^\alpha}{B_n^\alpha}\nu_k(\alpha) + \frac{1}{\delta^{\alpha-1}}\frac{|t|^\alpha}{B_n^\alpha} \int_{|x| > \frac{\delta B_n}{|t|}} |x|^\alpha |d\Omega_k(x)|.$$

Объединяя случаи $\alpha < 1$ и $\alpha \geqslant 1$ можем писать для $|t| \leqslant T$

$$\left|\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| \leqslant \left[\delta_1 \frac{\nu_k(\alpha)}{B_n^\alpha} + \frac{1}{\delta_2}\frac{1}{B_n^\alpha} \int_{|x| > \tau B_n} |x|^\alpha |d\Omega_k(x)|\right] |t|^\alpha.$$

Очевидно, здесь приняли

$$\tau = \frac{\delta}{T}, \quad \delta_1 = \begin{cases} \delta^{1-\alpha}, & \alpha < 1, \\ \frac{1}{2}\delta^{2-\alpha}, & \alpha \geqslant 1, \end{cases} \qquad \delta_2 = \begin{cases} \delta^{\alpha}, & \alpha < 1, \\ \delta^{\alpha-1}, & \alpha \geqslant 1. \end{cases}$$

Но при $|t| \leqslant T$

$$\left|g_\alpha\left(\frac{t}{B_n}, \lambda_k\right)\right|^{-1} \leqslant C,$$

где C не зависит от k, поэтому

$$\left|\frac{\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_\alpha\left(\frac{t}{B_n}, \lambda_k\right)}\right| \leqslant \left[\delta_1 C \frac{\nu_k(\alpha)}{B_n^\alpha} + \frac{C}{\delta_2}\frac{1}{B_n^\alpha} \int_{|x| > \tau B_n} |x|^\alpha |d\Omega_k(x)|\right] |t|^\alpha.$$

Ввиду условий теоремы коэффициент при $|t|^\alpha$ можно сделать сколь угодно малым, скажем, меньше чем $\frac{1}{2}T^{-\alpha}$, поэтому при $|t| \leqslant T$

$$\left|\frac{\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_\alpha\left(\frac{t}{B_n}, \lambda_k\right)}\right| < \frac{1}{2},$$

и мы можем брать разложение логарифма

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_\alpha\left(\frac{t}{B_n}, \lambda_k\right)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_\alpha\left(\frac{t}{B_n}, \lambda_k\right)} + R_n,$$

где

$$R_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=2}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s}\left(\frac{\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_\alpha\left(\frac{t}{B_n}, \lambda_k\right)}\right)^s.$$

Но

$$|R_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left|\frac{\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_\alpha\left(\frac{t}{B_n}, \lambda_k\right)}\right|^s = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\left|\frac{\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_\alpha\left(\frac{t}{B_n}, \lambda_k\right)}\right|^2}{1 - \left|\frac{\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_\alpha\left(\frac{t}{B_n}, \lambda_k\right)}\right|} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_\alpha\left(\frac{t}{B_n}, \lambda_k\right)}\right|^2 < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_\alpha\left(\frac{t}{B_n}, \lambda_k\right)}\right|.$$

Так как ввиду условий 2 и 3

$$\delta_1 C \frac{\sum_{k=1}^{n} \nu_k(\alpha)}{B_n^\alpha} + \frac{C}{\delta_2} \frac{1}{B_n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\tau B_n} |x|^\alpha |d\Omega_k(x)| < \varepsilon,$$

то в любом конечном интервале $|t| \leqslant T$ при $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\omega_k\left(\frac{t}{B_n}\right)}{g_\alpha\left(\frac{t}{B_n}, \lambda_k\right)}\right) = o(|t|^\alpha) = o(1).$$

Поэтому

$$f_n(t) = g_\alpha(t, 1) \exp\{o(1)\}$$

или

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = g_\alpha(t, 1)$$

в интервале $|t| \leqslant T$. Это равносильно утверждению теоремы.

Следует отметить, что в условиях теоремы случайные величины $\frac{\xi_k}{B_n}$, $k = 1, 2, \ldots$, являются бесконечно малыми в смысле, несколько отличном от общепринятого, а именно, они удовлетворяют условию:

$$\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \int_{|x|>\varepsilon} |d\Omega_k(B_n x)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

При дополнительном требовании

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \lambda_k = o\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right),$$

из него следует обычное условие бесконечной малости:

$$\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \int_{|x|>\varepsilon} dF_k(B_n x) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отметим несколько частных случаев. В случае, когда величины ξ_k, $k = 1, 2, \ldots$, одинаково распределены, из существования момента $\nu(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^\alpha |d\Omega(x)|$ следуют все условия теоремы, а $B_n = \lambda^{\frac{1}{\alpha}} n^{\frac{1}{\alpha}}$. Отсюда получаем известный факт, что если $\nu(\alpha)$ существует, то $F(x)$ принадлежит области нормального притяжения закона $G_\alpha(x, \lambda)$. Поэтому требование в нашей теореме существования $\nu_k(\alpha)$ можем рассматривать, как требование, чтобы каждая функция распределения $F_k(x)$ принадлежала области нормального притяжения „своего" устойчивого закона $G_\alpha(x, \lambda_k)$.

Далее, если существуют моменты $\nu_k(\alpha+\delta)$, $k = 1, 2, \ldots$, $\delta > 0$, то условие

4. $$L_{\alpha+\delta, n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \nu_k(\alpha+\delta)}{B_n^{\alpha+\delta}} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

влечет за собой 1 и 2, поэтому условия 3 и 4 также достаточны для справедливости нашей теоремы.

Наконец, отметим, что в случае $\alpha=2$ параметру λ_k соответствует дисперсия $\sigma_k^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_k(x)$ и требования теоремы сводятся к требованию выполнения условия Линдеберга.

В заключение автор выражает сердечную благодарность В. А. Статулявичюсу, сделавшему ряд ценных замечаний.

Институт физики и математики
Академии Наук Литовской ССР

Поступила в редакцию
18.XI.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, ГИТТЛ, М.–Л., 1949.
2. Б. А. Рогозин. Некоторые задачи из области предельных теорем, Теор. вероят. и ее прим., 3, 2 (1958), 186–196.
3. А. А. Миталаускас. О локальной предельной теореме в случае устойчивого предельного распределения, Лит. мат. сб., 1, 1–2 (1961), 131–139.
4. В. М. Золотарев. О выборе нормирующих констант в нарастающих суммах независимых случайных величин, Тр. Московского физико-техн. ин-та, 7 (1961), 158–161.

INTEGRALINĖ RIBINĖ TEOREMA KONVERGAVIMUI Į STABILŲ RIBINĮ DĖSNĮ

A. MITALAUSKAS

(Reziumė)

Nagrinėjama nepriklausomų atsitiktinių dydžių seka (1) su pasiskirstymo funkcijomis $F_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$. Sakysime, $G_\alpha(x, \lambda)$ yra stabilaus dėsnio pasiskirstymo funkcija $(0<\alpha\leqslant 2)$ Sakysime toliau, $\Omega_k(x)=F_k(x)-G_\alpha(x, \lambda_k)$; $\nu_k(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^\alpha |d\Omega_k(x)|$; $S_n=\frac{1}{B_n}\times$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k-A_n\right); \quad B_n=\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right)^{\frac{1}{\alpha}};$$

$A_n=\beta B_n \ln B_n$, jei $\alpha=1$, ir $A_n=0$, jei $\alpha\neq 1$. Straipsnyje įrodoma ši teorema. Sakysime, λ_k, $k=1, 2, \ldots$, yra diverguojanti teigiamų skaičių seka, tokia, kad $\nu_k(\alpha)$ egzistuoja visiems k. Jei kiekvienam $\tau>0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|>\tau B_n}|x|^\alpha |d\Omega_k(x)|=0$$

ir

$$\sum_{k=1}^{n}\nu_k(\alpha)=O(B_n^\alpha),$$

tai tolygiai x atžvilgiu $(n\to\infty)$

$$\mathbf{P}\{S_n<x\}\to G_\alpha(x, 1)$$

ÜBER DEN INTEGRALEN GRENZWERTSATZ FÜR DIE KONVERGENZ GEGEN DAS STABILE GRENZGESETZ

A. MITALAUSKAS

(Zusammenfassung)

Wir betrachten eine Folge (1) unabhängiger Zufallsgrössen mit Verteilungsfunktionen $F_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$. Es sei $G_\alpha(x, \lambda)$ eine stabile Verteilungsfunktion $(0<\alpha\leqslant 2)$. Es sei weiter

$$\Omega_k(x)=F_k(x)-G_\alpha(x, \lambda_k); \quad \nu_k(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} |x|^\alpha \, |d\Omega_k(x)|;$$

$$S_n=\frac{1}{B_n}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k - A_n\right); \quad B_n=\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)^{\frac{1}{\alpha}}; \quad A_n=\beta B_n \ln B_n,$$

wenn $\alpha=1$, und $A_n=0$ sonst. Im Artikel ist ein folgender Satz bewiesen. Es sei λ_k, $k=1$, $2, \ldots$, eine divergierende Folge der positiven Zahlen, und $\nu_k(\alpha)$ seien für alle k endlich. Es sei für beliebige $\tau>0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\tau B_n} |x|^\alpha \, |d\Omega_k(x)|=0$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} \nu_k(\alpha)=O(B_n^\alpha).$$

Dann gleichmässig in x $(n\to\infty)$

$$\mathrm{P}\{S_n<x\} \to G_\alpha(x, 1).$$