IV ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1964

МЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ И КОВАРИАНТЫ ПАР ПЛОСКОСТЕЙ ВО ФЛАГОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД, Л. М. ЕЖОВА-ГУСЕВА и Т. А. СЕМЕНОВА

В работе [1] мы определили метрические инварианты и коварианты двух m-мерных плоскостей флагового пространства F_n и предложили эффективный метод нахождения метрических инвариантов. Настоящая работа посвящена изложению эффективного метода нахождения координат точек пересечения m-мерных плоскостей пространства F_n с их ковариантами; попутно дается новое обоснование метода нахождения метрических инвариантов, предложенного в [1]. Аналогичная задача для метрических инвариантов и ковариантов плоскостей эллиптического пространства S_n (стационарных расстояний и общих перпендикуляров) была решена Б. А. Розенфельдом и И. Н. Семеновой [2], а для метрических инвариантов и ковариантов плоскостей квазиэллиптического пространства R_n^m — Б. А. Розенфельдом, Л. М. Карповой и Л. П. Андреевой [3].

1. МЕТРИЧЕСКИЕ КОВАРИАНТЫ

Рассмотрим две непересекающиеся m-мерные плоскости A и B n-мерного флагового пространства F_n $(n \geqslant 2m+1)$. Мы ограничимся рассмотрением того основного случая, когда как сами плоскости A и B, так и $(2m+1)$-мерная плоскость $A+B$, порожденная плоскостями A и B, имеют минимальное пересечение со всеми плоскостями флага. Это означает, что сами плоскости A и B не пересекаются с плоскостями флага размерности $r \leqslant n-m-1$, а с плоскостями флага размерности $r > n-m-1$ пересекаются по $(r+m-n)$-мерным плоскостям; плоскость же $A+B$ не пересекается с плоскостями флага размерности $r \leqslant n-2m-2$, а с плоскостями флага размерности $r > n-2m-2$ пересекается по $(r+2m+1-n)$-мерной плоскости.

Метрические коварианты плоскостей A и B определяются следующим образом: плоскости A и B пересекаются с $(n-s)$-мерной плоскостью флага по $(m-s)$-мерным плоскостям $A^{(s)}$ и $B^{(s)}$, а $(2m-2s+1)$-мерная плоскость $A^{(s)}+B^{(s)}$, порожденная плоскостями $A^{(s)}$ и $B^{(s)}$, пересекается с $(n-2m+s-1)$-мерной плоскостью флага в точке и $(s+1)$-м метрическим ковариантом плоскостей A и B является единственная прямая, проходящая через эту точку и пересекающая плоскости $A^{(s)}$ и $B^{(s)}$; s принимает значения от 0 до m. При $s=0$ плоскости $A^{(0)}$ и $B^{(0)}$ совпадает с самими плоскостями A и B и 1-й ковариант — прямая, проходящая через точку пересечения $(2m+1)$-мерной плоскости $A+B$ с $(n-2m-1)$-мерной плоскостью флага и пересекающая плоскости A и B. При $s=m$ $A^{(m)}$ и $B^{(m)}$ представляют собой точки и $(m+1)$-й ковариант — прямая, соединяющая эти две точки.

Будем пользоваться такой системой проективных координат, в которой r-мерная плоскость флага определяется уравнениями $x^0 = x^1 = \ldots = x^{n-r-1} = 0$. Будем определять плоскости A и B такими базисными точками $a_0, a_1, \ldots, a_m$ и $b_0, b_1, \ldots, b_m$, что точки a_a и b_a ($a, b, \ldots = 0, 1, \ldots, m$) лежат в $(n-a)$-мерной плоскости флага, но вне $(n-a-1)$-мерной плоскости флага. Матрицы $A = (a^i_a)$ и $B = (b^i_b)$ являются проективными матричными координатами плоскостей A и B (см. [4], стр. 23). Координаты x^i ($i, j, \ldots = 0, 1, \ldots, n$) произвольной точки x плоскости $A+B$ можно записать в виде

$$x^i = \sum_a a^i_a \xi^a + \sum_a b^i_a \eta^a. \qquad (1)$$

Если мы обозначим векторы с координатами x^i, ξ^a и η^a соответственно через x, ξ и η, формулу (1) можно переписать в векторной форме

$$x = A\xi + B\eta. \qquad (1')$$

Точка x_0 пересечения плоскости $A+B$ с $(n-2m-1)$-мерной плоскостью флага удовлетворяет уравнениям $x^0 = \ldots = x^{2m} = 0$ этой плоскости, т. е., если считать координату x_0^{2m+1} этой точки равной 1, уравнениям

$$\left.\begin{aligned} x_0^b &= \sum_a a^b_a \xi^a_0 + \sum_a b^b_a \eta^a_0 = 0, \\ x_0^{m+b+1} &= \sum_a a^{m+b+1}_a \xi^a_0 + \sum_a b^{m+b+1}_a \eta^a_0 = \delta^b_m \\ &(\delta^i_j = 1 \text{ при } i=j \text{ и } =0 \text{ при } i \neq j). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Так как плоскости A и B не пересекаются с $(n-m-1)$-мерной плоскостью флага, точки a_a и b_a можно выбрать таким образом, что $a^b_a = b^b_a = \delta^b_a$; в этом случае верхние $m+1$ строк матриц A и B являются единичными матрицами, а нижние $n-m$ строк этих матриц являются аффинными матричными координатами плоскостей A и B (см. [4], стр. 33).

Из первого уравнения (2) при $a^b_a = b^b_a = \delta^b_a$ мы получаем, что $\xi^a_0 + \eta^a_0 = 0$. Поэтому второе уравнение (2) можно переписать в виде

$$\sum_a \left(a^{m+b+1}_a - b^{m+b+1}_a\right) \xi^a_0 = \delta^b_m. \qquad (3)$$

Если мы обозначим вектор с координатами δ^a_m через δ_m, а квадратные матрицы $(m+1)$-го порядка (a^{m+b+1}_a) и (b^{m+b+1}_a), состоящие из верхних $m+1$ строк аффинных матричных координат плоскостей A и B, — через A_0 и B_0, то уравнение (3) можно переписать в виде

$$(A_0 - B_0)\,\xi_0 = \delta_m. \qquad (3')$$

Вектор $\xi_0 = (\xi^a_0)$, являющийся решением уравнения (3'), может быть записан в виде

$$\xi_0 = (A_0 - B_0)^{-1}\,\delta_m, \qquad (4)$$

т. е., так как $\delta^a_m = 0$ при $a < m$ и $\delta^a_m = 1$ при $a = m$,

$$\xi^a_0 = [(A_0 - B_0)^{-1}]^a_m. \qquad (4')$$

Таким образом, числа ξ^a_0 представляют собой элементы последнего столбца матрицы $(A_0 - B_0)^{-1}$.

Так как векторы $A\xi_0$ и $B\eta_0$ определяют точки, соответственно, плоскостей A и B, а точки, определяемые векторами $A\xi_0$, $B\eta_0$ и $x_0=A\xi_0+B\eta_0$, лежат на одной прямой, то первые две из этих точек являются точками пересечения прямой, проходящей через точку x_0 и пересекающей плоскости A и B, с этими плоскостями. Таким образом, *координаты точек x_0 и y_0 пересечения плоскостей A и B с их 1-м метрическим ковариантом соответственно равны*

$$x_0^i=\sum_a a_a^i\xi_0^a \quad \text{и} \quad y_0^i=\sum_a b_a^i\eta_0^a=-\sum_a b_a^i\xi_0^a, \tag{5}$$

где координаты ξ_0^a имеют вид (4′).

Плоскости $A^{(s)}$ и $B^{(s)}$, являющиеся пересечениями плоскостей A и B с $(n-s)$-мерной плоскостью флага, определяемой уравнениями $x^0=x^1=\ldots=x^{s-1}=0$, определяются базисными точками $a_s, a_{s+1}, \ldots, a_m$ и $b_s, b_{s+1}, \ldots, b_m$. Поэтому проективные матричные координаты плоскостей $A^{(s)}$ и $B^{(s)}$ получаются из матриц A и B вычеркиванием s их первых строк и s их первых столбцов. При том же выборе точек a_a и b_a, что и раньше, верхние $m-s+1$ строк полученных матриц являются единичными матрицами, а нижние $n-m$ строк этих матриц являются аффинными матричными координатами плоскостей $A^{(s)}$ и $B^{(s)}$. Обозначим верхние $m-s+1$ строк аффинных матричных координат плоскостей $A^{(s)}$ и $B^{(s)}$ через A_s и B_s; матрицы A_s и B_s, очевидно, могут быть получены из матриц A_0 и B_0 вычеркиванием s их последних строк и s их первых столбцов, т. е. являются квадратными подматрицами $(m-s+1)$-го порядка в их верхнем правом углу. В точности так же, как для 1-го метрического ковариаита плоскостей A и B, показывается, что *координаты точек x_s и y_s пересечения плоскостей A и B с их $(s+1)$-м метрическим ковариантом соответственно равны*

$$x_s^i=\sum_a a_a^i\xi_s^a \quad \text{и} \quad y_s^i=\sum_a b_a^i\eta_s^a=-\sum_a b_a^i\xi_s^a, \tag{6}$$

где координаты ξ_s^a имеют вид

$$\xi_s^a=[(A_s-B_s)^{-1}]_{m-s}^{a-s}, \tag{7}$$

где $a=s, s+1, \ldots, m$. Таким образом, числа ξ^a являются элементами последнего столбца матрицы $(A_s-B_s)^{-1}$.

2. МЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Метрическими инвариантами плоскостей A и B являются расстояния ω_s между точками x_s и y_s пересечения этих плоскостей с их метрическими ковариантами. Расстояние ω_s между точками x_s и y_s, лежащими на $(n-s)$-мерной плоскости флага, равно

$$\omega_s=|x_s^i-y_s^i|, \tag{8}$$

где i — первое натуральное число, при котором разность $x_s^i-y_s^i\neq 0$, причем координаты точек x_s и y_s предполагаются нормированными условием $x_s^s=y_s^s=1$. Так как при $i<s$ $x_s^i=y_s^i=0$, i в формуле (8) обязательно больше s.

Вычисляя координаты x_s^s и y_s^s по формулам (5) и (6) мы находим, что

$$x_s^s=\sum_a a_a^s\xi_s^a=\xi_s^s=[(A_s-B_s)^{-1}]_{m-s}^0,\quad y_s^s=-\sum_a a_a^s\xi^a=-\xi_s^s=[(A_s-B_s)^{-1}]_{m-s}^0, \tag{9}$$

т. е. координаты точек x_s и y_s, определенные по формулам (5) и (6), не удовлетворяют условию нормирования и для получения координат, удовлетворяющих этому условию, следует разделить координаты x_s^i и y_s^i, соответственно, на x_s^s и y_s^s. В этом случае формула (8) примет вид

$$\omega_s=\left|\frac{x_s^i}{x_s^s}-\frac{y_s^i}{y_s^s}\right|=\left|\frac{x_s^i+y_s^i}{[(A_s-B_s)^{-1}]_{m-s}^0}\right|. \tag{10}$$

Но

$$\left.\begin{aligned}
&x_s^b+y_s^b=\sum_a a_a^b\xi_s^a-\sum_a b_a^b\xi_s^a=\xi_s^b-\xi_s^b=0,\\
&x_s^{m+b+1-s}+y_s^{m+b+1-s}=\sum_a a_a^{m+b+1-s}\xi_s^a-\sum_a b_a^{m+b+1-s}\xi_s^a=\\
&=\sum_a\left(a_a^{m+b+1-s}-b_a^{m+b+1-s}\right)\xi_s^a=\delta_{m-s}^{b-s}.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Поэтому выражение в правой части (10) отлично от нуля только при $i=2m+1$ и равно

$$\omega_s=\frac{1}{|[(A_s-B_s)^{-1}]_{m-s}^0|}. \tag{12}$$

Таким образом, *метрические инварианты ω_s плоскостей A и B равны обратным величинам абсолютных величин элементов матрицы $(A_s-B_s)^{-1}$, находящихся в их правом верхнем углу.*

Но обратная величина абсолютной величины элемента квадратной матрицы, стоящего в правом верхнем углу, равна абсолютной величине частного от деления определителя этой матрицы на его минор, полученный вычеркиванием первого столбца и последней строки. Поэтому, если мы обозначим определитель матрицы A_s-B_s через Δ_s, то определитель матрицы $(A_s-B_s)^{-1}$ равен $\frac{1}{\Delta_s}$. Поэтому $|[(A_s-B_s)^{-1}]_{m-s}^0|$ равен частному от деления $\frac{1}{|\Delta_s|}$ на $\frac{1}{|\Delta_{s+1}|}$, т. е. $\frac{|\Delta_{s+1}|}{|\Delta_s|}$ и

$$\omega_s=\frac{|\Delta_s|}{|\Delta_{s+1}|}. \tag{12'}$$

Формула (12′) совпадает с формулой, полученной нами другим способом в [1].

Коломенский педагогический институт

Поступила в редакцию 27.XI.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Розенфельд, Л. М. Ежова-Гусева и Т. А. Назарова (Семенова). Метрические инварианты плоскостей во флаговых пространствах, Ученые записки Московского гос. педагогического института им. Ленина (кафедра геометрии), 1963, стр. 278–287.
2. Б. А. Розенфельд и И. Н. Семенова. Проектирование и отражение в проективном пространстве, Ученые записки Московского гос. заочного педагогического института, вып. 8 (серия матем.), 1962, стр. 78–83.
3. Б. А. Розенфельд, Л. М. Карпова и Л. П. Андреева. Метрические инварианты и коварианты пар плоскостей в квазиэллиптическом пространстве, Лит. мат. сб., IV, 2, 1964, стр. 241–253.
4. Б. А. Розенфельд. Прямоугольные матрицы и неевклидовы геометрии, Успехи матем. наук, т. **13**, вып. 6 (84), 1958, стр. 21—48.

FLAGINĖS ERDVĖS PLOKŠTUMŲ DVEJETŲ METRINIAI KOVARIANTAI IR INVARIANTAI

B. A. ROZENFELDAS, L. M. EŽOVA-GUSEVA, T. A. SEMIONOVA

(Reziumė)

Darbe yra surastas efektyvus būdas flaginės erdvės plokštumų dvejetų metrinių kovariantų suradimui. Flaginė erdvė yra atskiras atvejis projektyviškai-metrinės erdvės, flaginės erdvės absoliutas susideda iš hiperplokštumos ir visų galimų tos hiperplokštumos plokštumų, gulinčių aukštesnio matavimo plokštumoje. Flaginės erdvės plokštumų dvejetų metriniai kovariantai yra neeuklidinės erdvės plokštumų dvejetų bendrų statmenų analogai, o metriniai invariantai — tų bendrų statmenų ilgių analogai.

METRICAL INVARIANTS AND COVARIANTS OF COUPLES OF PLANES IN THE FLAG SPACE

B. A. ROZENFELD, L. M. EZHOVA-GUSEVA, T. A. SEMENOVA

(Summary)

In this article is found an effective method of determination of metrical covariants ci couples of planes in a space with projective metric—the Flag space, that is the space with ar Absolute consisting of the planes of all dimensions (from hyperplane to point) enclosed one into another. Also is given a new ground of a method of determination of metrical invariants of couples of planes in the Flag space proposed by the same authors. The metrical covariants of couples of planes are analogous to the common perpendiculars of planes in the non-Euclidean spaces. The metric invariants are analogous to the lengths of these common perpendiculars. The coordinates of the points of intersection of metrical covariants of two planes with these planes are determined by means of matrix coordinates of the planes, the metrical invariants of these planes coincide with some elements of these matrices.