ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
IV LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 3
1964

УТОЧНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПИКАРА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

М. Б. БАЛК

1. Под целой бианалитической функцией (ЦБФ) понимаем функцию вида

$$B(z)=\varphi(z)+\bar{z}\cdot\psi(z), \tag{1}$$

где $z=x+i\cdot y$, $\bar{z}=x-iy$, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — целые функции.

В статье [4] с помощью аппарата нормальных семейств аналитических функций была установлена теорема Пикара для целых бианалитических функций. Приведенную в [4] теорему можно так перефразировать:

Если ЦБФ (1) *не является относительно пары аргументов z и $\bar{z}$ полиномом второй* (или меньшей) *степени* (то есть, не имеет вида $a_0+a_1\cdot z+a_2\cdot z^2+\bar{z}(a_3+a_4\cdot z)$, где a_k — константы), *то она принимает хотя бы один раз каждое комплексное значение — за исключением, возможно, одного.*

При некоторых дополнительных предположениях относительно функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ возможно получить более сильные утверждения. Эти теоремы, в отличие от результатов статьи [4], мы установим, не привлекая аппарата нормальных семейств.

Теорема 1. *Если функция* $\psi(z)\not\equiv 0$ (т. е. отлична от тождественного нуля) *и имеет бесконечно много нулей, то ЦБФ* (1) *принимают каждое (без исключений!) комплексное значение a* в бесконечном *множестве точек.*

Доказательство. Функцию $B(z)-a$ можно представить в виде

$$f(z)\equiv B(z)-a=\Phi(z)+|z-z_0|^2\cdot\Psi(z), \tag{2}$$

где z_0 — какой-либо нуль функции $\psi(z)$,

$$\Psi(z)=\psi(z)/(z-z_0),\quad \Phi(z)=\varphi(z)+\bar{z}_0\cdot\psi(z)-a. \tag{3}$$

Существует, очевидно, такая последовательность окружностей

$$\Gamma_n\left\{|z-z_0|=\rho_n\right\},\ \text{что}$$

1) $\rho_n\to\infty$ при $n\to\infty$ и 2) Γ_n (при любом n) свободна от нулей функции $\psi(z)$.

Рассмотрим последовательность целых функций

$$f_n(z)=\Phi(z)/\rho_n^2+\Psi(z). \tag{4}$$

Обозначим через $N[f_n;\ R]$ число нулей функции $f_n(z)$ внутри окружности

$$\Gamma\left\{|z-z_0|=R\right\}.$$

Пусть R выбирается так, что $\Psi(z)\neq 0$ на Γ.

Применим теорему Гурвица (см. [1], стр. 317) к последовательности (4). Так как внутри и на окружности Г последовательность (4) сходится к $\Psi(z)$, то почти для всех n (то есть, для всех n, начиная с некоторого номера)

$$N[f_n;\ R] = N[\Psi;\ R]. \tag{5}$$

Так как $\rho_n \to \infty$, то $\rho_n > R$ почти для всех n, и поэтому (почти для всех n)

$$N[f_n;\ \rho_n[\geqslant N[f_n;\ R], \quad \text{то есть} \quad N[f_n;\ \rho_n] \geqslant N[\Psi;\ R]. \tag{6}$$

Но по условию теоремы

$$N[\Psi;\ R] \to \infty \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Поэтому и

$$N[f_n;\ \rho_r] \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{7}$$

Допустим теперь, что ЦБФ (1) обращается в нуль лишь в конечном числе точек. Тогда все они лежат внутри некоторой окружности

$$\gamma\{\,|z-z_0|=d\,\}.$$

Так как почти для всех n между γ и Γ_n нет нулей непрерывной функции (2), то (ср. [2]) почти для всех n,

$$\frac{1}{2\pi}\ \Delta_{\Gamma_n} \arg f(z) = \frac{1}{2\pi}\ \Delta_\gamma \arg f(z) = \mathrm{const}. \tag{8}$$

Но, с другой стороны, на Γ_n $f(z) \equiv f_n(z)$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\ \Delta_{\Gamma_n} \arg f(z) = \frac{1}{2\pi}\ \Delta_{\Gamma_n} \arg f_n(z) = N[f_n;\ \rho_n] \to \infty \tag{9}$$

при $n \to \infty$ (см. (7)).

Противоречие между (8) и (9) показывает, что допущение о конечности числа нулей функции (1) ложно. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если* $\varphi(z)$ *— целая трансцендентная аналитическая функция, то ЦБФ*

$$f(z) = \varphi(z) + |z|^2 \tag{10}$$

принимает каждое (без исключений) комплексное значение a в бесконечном *множестве точек.*

Доказательство. Воспользуемся следующим обобщением известной теоремы Э. Ландау, полученным Л. Бибербахом [3]: „Пусть: 1) функция

$$F(z) \equiv b_0 + b_1 z + \cdots + b_n \cdot z^n + \cdots,$$

аналитическая в круге $|z| < R$, принимает там не более n раз значение 0 и не более m раз значение 1, причем $n \leqslant m$; 2) существуют константы $\lambda_\nu (\nu = 0, 1, \ldots, n)$ такие, что $|b_\nu| \leqslant \lambda_\nu$; 3) $b_{n+1} \neq 0$.

Тогда существует такое положительное число L, зависящее только от

$$\lambda_0, \ \ldots, \ \lambda_n, \ b_{n+1}, \ \text{что} \ R \leqslant L''. \tag{11}$$

Допустим — вопреки тому, что утверждает теорема 2 — что $f(z) - a$ имеет лишь конечное число нулей. Тогда существует такая окружность $\gamma\{\,|z|=b\,\}$, внутри которой лежат все нули функции $f(z) - a$. Не теряя общности, можно, очевидно, полагать $a = 0$, $b = 1$.

При любом выборе окружности $\Gamma\{\,|z| = c > 1\,\}$

$$\frac{1}{2\pi}\ \Delta_\Gamma \arg f(z) = \frac{1}{2\pi}\ \Delta_\gamma \arg f(z) = q = \mathrm{const}. \tag{12}$$

Пусть

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu. \tag{13}$$

Так как $\varphi(z)$ — не полином, то найдётся такой номер n, что

$$1)\ n \geqslant q, \qquad 2)\ n > 1, \qquad 3)\ a_{n+1} \neq 0. \tag{14}$$

На Γ функция $f(z)$ совпадает с целой аналитической функцией

$$\Phi(z;\ c) \equiv \varphi(z) + c^2.$$

Поэтому при любом $c \geqslant 1$

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg \Phi(z;\ c) = q \leqslant n. \tag{15}$$

Отсюда видно, что при любом c, большем единицы, $\Phi(z;\ c)$ принимает внутри окружности Γ значение 0 не более, чем n раз (с учётом кратности принимаемых значений).

Но можно подметить, что $\Phi(z;\ c)$ принимает внутри Γ и каждое отрицательное значение d не более n раз. Действительно, в противном случае внутри окружности $\Gamma_1\{|z| = c_1\}$, где $c_1 = \sqrt{c^2 + |d|} > c$, функция $\Phi(z;\ c_1) \equiv \varphi(z) + c_1^2$ имела бы более, чем n нулей, что противоречит неравенству (15), верному при любом $c \geqslant 1$.

Пусть σ — произвольное положительное число и

$$R = c / \sigma. \tag{16}$$

Функция

$$1 + \varphi(z) / c^2 \tag{17}$$

принимает каждое из значений 0 и -1 не более n раз в круге $|z| < c$ а функция

$$1 + \varphi(\sigma z) / c^2 \tag{18}$$

обладает тем же свойством в круге радиуса R.

Положим $c = k^{n+1}$, $\sigma = k^2$, где k — натуральное число, и рассмотрим функцию

$$F_k(z) = 1 + \varphi(k^2 \cdot z) / k^{2n+2}. \tag{19}$$

$$F_k(z) = \left(1 + \frac{a_0}{k^{2n+2}}\right) + \frac{a_1}{k^{2n}} z + \frac{a_2}{k^{2n-2}} \cdot z^2 + \cdots + \frac{a_n}{k^2} z^n + a_{n+1} \cdot z^{n+1} + \cdots.$$

Таким образом,

$$F_k(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \cdot z^\nu, \tag{20}$$

где

$$b_0 = 1 + a_0 / k^{2n+2},\ b_\nu = a_\nu / k^{2n-2\nu+2}\ (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),\ b_{n+1} = a_{n+1} \neq 0. \tag{21}$$

Возьмём какие-либо положительные константы λ_ν, например, $\lambda_\nu = 2$ ($\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$).

Легко убедиться, что при всех натуральных k, начиная с какого-то k_0, функция $F_k(z)$ удовлетворяет всем условиям цитированной выше теоремы Ландау—Бибербаха. Поэтому должна существовать такая константа L, одна и та же для всех $k > k_0$, что радиус R круга, в котором $F_k(z)$ регулярна и принимает не более чем по n раз значения 0 и -1, удовлетворяет условию:

$$R \leqslant L. \tag{22}$$

Но $R=c/\sigma=k^{n-1}$, так что при *любом* $k>k_0$

$$k^{n-1}<L. \tag{23}$$

Но $n>1$ (см. (14)), и поэтому неравенство (23) при достаточно больших k невозможно. Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы.

Из теоремы 2 вытекает такое следствие:

Теорема 3. *Если* $\Phi(z)$ – *целая трансцендентная аналитическая функция, то ЦБФ*

$$B(z)=\Phi(z)+\bar{z} \tag{24}$$

принимает каждое (без исключений!) комплексное значение a *в бесконечном множестве точек.*

Доказательство. Действительно, если бы функция $B(z)-a$ имела конечное число нулей, то и функция

$$f(z)\equiv z\Big[B(z)-a\Big]\equiv z\Big[\Phi(z)-a\Big]+|z|^2 \tag{25}$$

принимала бы значение 0 в конечном множестве точек, что невозможно в силу теоремы 2.

Примечание. Может случиться, что некоторая целая бианалитическая функция вида (1) имеет бесконечно много нулей, но это множество ограничено. Таково, например, множество нулей функции $(|z|^2-|a|^2)\cdot\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – целая аналитическая функция, $a\neq 0$.

Приведенные выше рассуждения, как нетрудно проверить, показывают, что для каждой из функций, о которых говорится в теоремах $1\div 3$, множество a-точек *не только бесконечно*, но и *неограничено* (то есть имеет предельную точку в бесконечности).

Смоленский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
15. I. 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций, М.–Л., ГИТТЛ, 1950, стр. 317.
2. K. Szilard. Über die Analoga der ganzen rationalen Funktionen in veralgemeinerten Klassen von Funktionen einer komplexen Veränderlichen, I, „Magyar tud. Akad. Mat. kutato int. közl.", 1961, 6, N 3, 375–380.
3. L. Bieberbach. Über die Verteilung der Null–und Einsstellen analytischen Funktionen, „Math. Annalen", 85, 141–148, 1922.
4. М. Б. Балк. Теорема Пикара для целых бианалитических функций, „Доклады Академии наук СССР", том 152, № 6, стр. 9–13, 1963.

PIKARO TEOREMOS PATIKSLINIMAS KAI KURIOMS BIANALIZINIŲ FUNKCIJŲ KLASĖMS

M. B. BALKAS

(*Reziumė*)

Nagrinėjama funkcija $B(z)=\varphi(z)+\bar{z}\psi(z)$; čia $\varphi(z)$ ir $\psi(z)$ yra sveikos funkcijos, o $z=x+iy$ ir $\bar{z}=x-iy$. Įrodoma, kad funkcija $B(z)$ įgyja be galo daug kartų bet kurią reikšmę šiais atvejais:

1. Kada $\psi(z)$ turi be galo daug narių, bet $\psi(z)\not\equiv 0$;
2. Kada $\varphi(z)$ yra transcendentinė funkcija ir $\psi(z)\equiv z$, arba $\psi(z)\equiv 1$.

ERGÄNZUNG DES PICARD'SCHEN SATZES FÜR EINIGE KLASSEN BIANALYTISCHER FUNKTIONEN

M. B. BALK

(*Zusammenfassung*)

Es seien $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ ganze Funktionen und $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$. Wir beweisen, dass die bianalytische Funktion $B(z)=\varphi(z)+\bar{z}\psi(z)$ unendlich viele Male ein beliebiges Wert annimmt in jedem der folgenden Fälle:

1. $\psi(z)$ besitzt unendlich viele Nullstellen und $\psi(z)\not\equiv 0$.
2. $\varphi(z)$ ist eine transzendente Funktion und $\psi(z)\equiv z$, oder $\psi(z)\equiv 1$.