IV ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1964

ОБ ОЦЕНКЕ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

А. БИКЯЛИС

Пусть

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_k,\ \ldots \tag{1}$$

последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием $M\xi_1=0$, функция распределения $F(x)$ которых принадлежит области притяжения нормального закона, т. е. существует последовательность положительных чисел B_n такая, что последовательность

$$F_n(x)=P\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k<x\right\}$$

сходится к функции распределения нормального закона

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$$

Если дисперсия $D\xi_1=1$, то $B_n=\sqrt{n}$.

Через G обозначим класс функции $g(x)$, определенных на вещественной прямой и обладающих свойствами:

1) $g(x)$ — неотрицательные, четные, неубывающие в интервале $[0,\ \infty)$ функции и

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty.$$

2) $\frac{x}{g(x)}$ — определенная для всех x и неубывающая в интервале $[0,\ \infty)$ функция.

$C_1,\ C_2,\ C_3,\ \ldots$ — абсолютные постоянные. Известно [1, 2], что если

$$\beta=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^3\,dF(x)<\infty,$$

тогда имеет место следующее неравенство с абсолютной постоянной C_1:

$$|F_n(x)-\Phi(x)|<\frac{C_1\beta}{(1+x^2)\sqrt{n}}.$$

Аналогичное неравенство получено П. Сурвилой [3], когда случайные величины последовательности (1) неодинаково распределены.

Недавно С. В. Нагаевым [4] получена в смысле зависимости от x наилучшая оценка для $|F_n(x)-\Phi(x)|$:

если $\beta < \infty$, то существует абсолютная постоянная C_2 такая, что

$$|F_n(x)-\Phi(x)| < \frac{C_2\beta}{(1+|x|^3)\sqrt{n}}. \tag{2}$$

В настоящей работе рассматривается случай, когда конечный момент $\lambda = M\xi_1^2 g(\xi_1)$, $g(x)\in G$, или когда лишь $F(x)$ принадлежит области притяжения нормального закона. Докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Если*

$$\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x)\, dF(x) < \infty, \qquad g(x)\in G,$$

тогда выполняется следующее неравенство с абсолютной постоянной C_3:

$$|F_n(x)-\Phi(x)| \leqslant \frac{C_3\lambda}{g(\sqrt{n})+x^2 g(x\sqrt{n})}.$$

Пусть, например, $g(x)=|x|^\delta$, $0<\delta\leqslant 1$, тогда

$$|F_n(x)-\Phi(x)| \leqslant \frac{C_3\beta_{2+\delta}}{(1+|x|^{2+\delta})\, n^{\frac{\delta}{2}}},$$

здесь

$$\beta_{2+\delta} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2+\delta}\, dF(x).$$

Теорема 2. *Если функция распределения* $F(x)$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{y\to\infty} \frac{y\int_{|z|>y} |z|\, dF(z)}{\int_{|z|\leqslant y} z^2\, dF(x)} = 0, \tag{3}$$

то существует абсолютная постоянная C_4 *такая, что для всех* $|x|\geqslant 1$

$$|F_n(x)-\Phi(x)| \leqslant \frac{\frac{C_5}{|x|B_n}\int_0^{|x|B_n} y \int_{|z|>y} |z|\, dF(z)\, dy}{\int_{|y|\leqslant |x|B_n} y^2\, dF(y)}.$$

Метод, применяемый при доказательстве теоремы 2, позволяет также получить универсальную оценку Ю. П. Студнева [5]:

если функция распределения $F(x)$ удовлетворяет условию (3), то

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)| \leqslant \frac{\frac{C_6}{B_n}\int_0^{B_n} y \int_{|z|>y} |z|\, dF(z)\, dy}{\int_{|y|\leqslant B_n} y^2\, dF(y)}. \tag{4}$$

Доказательство теоремы 2. Случайные величины последовательности (1) урезаем на уровне $|x|B_n$ (в дальнейшем всегда будем считать, что $|x|\geqslant 1$). Получаем новую последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин

$$\eta_1(x, n),\quad \eta_2(x, n),\ \ldots,\ \eta_k(x, n),\ \ldots \tag{5}$$

с

$$M\eta_k(x,\ n)=\mu_n(x),\quad D\eta_k(x,\ n)=\sigma_n^2(x)$$

и

$$\beta_{3n}(x)=M\,|\,\eta_k(x,\ n)-\mu_k(x,\ n)\,|^3,\qquad k=1,\ 2,\ \dots$$

Известно [6], что

$$|\,F_n(x)-\Phi(x)\,|\leqslant\left|P\left\{\frac{\eta_1(x,\ n)+\dots+\eta_n(x,\ n)-n\mu_n(x)}{\sigma_n(x)\sqrt{n}}<\frac{xB_n-n\mu_n(x)}{\sigma_n(x)\sqrt{n}}\right\}-\right.$$

$$\left.-\Phi\left(\frac{xB_n-n\mu_n(x)}{\sigma_n(x)\sqrt{n}}\right)\right|+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int\limits_x^{\frac{xB_n-n\mu_n(x)}{\sigma_n(x)\sqrt{n}}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right|+nP\{\,|\,\xi_1\,|\geqslant|\,x\,|\,B_n\}.$$

Как известно,

$$\frac{n}{B_n^2}\int\limits_{|y|\leqslant B_n}y^2\,dF(y)=1+o(1),$$

но для простоты предположим, что B_n выбраны так, что всегда

$$\frac{n}{B_n^2}\int\limits_{|y|\leqslant B_n}y^2\,dF(y)=1. \tag{6}$$

Утверждение теоремы 2 достаточно доказать только при $B_n>B_{n_0}$. В остальных случаях утверждения тривиальны. Пусть n_0 такое, что в силу условия (3) для $B_n>B_{n_0}$

$$\frac{n}{B_n}\int\limits_{|y|>B_n}|\,y\,|\,dF(y)\leqslant\frac{n}{4B_n^2}\int\limits_{|y|\leqslant B_n}y^2\,dF(y)=\frac{1}{4}, \tag{7}$$

и

$$\frac{n}{|\,x\,|\,B_n}\int\limits_{|y|>|x|B_n}|\,y\,|\,dF(y)\leqslant\frac{n}{4x^2B_n^2}\int\limits_{|y|\leqslant|x|B_n}y^2\,dF(y).$$

Теперь ввиду (2)

$$\Delta_n'(x)=\left|P\left\{\frac{\eta_1(x,n)+\dots+\eta_n(x,n)-n\mu_n(x)}{\sigma_n(x)\sqrt{n}}<\frac{xB_n-n\mu_n(x)}{\sigma_n(x)\sqrt{n}}\right\}-\right.$$

$$\left.-\Phi\left(\frac{xB_n-n\mu_n(x)}{\sigma_n(x)\sqrt{n}}\right)\right|\leqslant\frac{C_6\,\beta_{3n}(x)}{\sigma_n^3(x)\sqrt{n}}\left[1+\left|\frac{xB_n-n\mu_n(x)}{\sigma_n(x)\sqrt{n}}\right|^3\right]^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_7\,n\beta_{3n}(x)}{B_n^3}\left[|\,x\,|\left(1-\frac{n\,|\,\mu_n(x)\,|}{B_n}\right)\right]^{-3}.$$

Очевидно,

$$\beta_{3n}(x)\leqslant 8\int\limits_{|y|<|x|B_n}|\,y\,|^3\,dF(y)$$

и так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}y\,dF(y)=0,$$

то

$$|\,\mu_n(x)\,|=\left|\int\limits_{|y|\leqslant|x|B_n}y\,dF(y)\right|\leqslant\int\limits_{|y|>|x|B_n}|\,y\,|\,dF(y). \tag{8}$$

Следовательно,

$$\Delta_n(x)\leqslant\frac{C_8\,n}{|\,x\,|^3B_n^3}\int\limits_{|y|<|x|B_n}|\,y\,|^3\,dF(y).$$

Очевидно,

$$nP\{|\xi_1|>|x|B_n\}\leqslant\frac{n}{|x|B_n}\int\limits_{|y|>|x|B_n}|y|\,dF(y).$$

Для оценки интеграла

$$\Delta_n''(x)=\left|\int\limits_x^{\frac{xB_n-n\mu_n(x)}{\sigma_n(x)\sqrt{n}}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right|$$

нам понадобятся следующие соотношения. В силу (7)

$$\frac{n|\mu_n(x)|}{B_n}\leqslant\frac{n}{B_n}\int\limits_{|y|>|x|B_n}|y|\,dF(y)\leqslant\frac{1}{4}. \tag{9}$$

Из соотношений (6), (7) и (8) следует, что

$$\frac{n}{x^2B_n^2}\int\limits_{|y|\leqslant|x|B_n}y^2\,dF(y)=\frac{1}{x^2}+\frac{n}{x^2B_n^2}\int\limits_{B_n<|y|\leqslant|x|B_n}y^2\,dF(y)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{x^2}+\frac{n}{|x|B_n}\int\limits_{|y|>B_n}|y|\,dF(y)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4|x|}\leqslant\frac{5}{4|x|}\leqslant\frac{5}{4}, \tag{10}$$

$$\frac{n\sigma_n^2(x)}{B_n^2}=\frac{n}{B_n^2}\left[\int\limits_{|y|\leqslant|x|B_n}y^2\,dF(y)-\mu_n^2(x)\right]\leqslant\frac{n}{B_n^2}\int\limits_{|y|\leqslant|x|B_n}y^2\,dF(y)\leqslant\frac{5}{4}|x| \tag{11}$$

и

$$\frac{n\sigma_n^2(x)}{B_n^2}\geqslant\frac{n}{B_n^2}\int\limits_{|y|\leqslant|x|B_n}y^2\,dF(y)-\left(\frac{n\mu_n(x)}{B_n}\right)^2\geqslant\frac{3}{4}. \tag{12}$$

Из (9)–(12) и того, что $|x|\geqslant 1$, получаем

$$\Delta_n''(x)\leqslant C_9e^{-C_{10}|x|}\left|1-\frac{B_n-n\mu_n(x)}{\sigma_n(x)\sqrt{n}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant C_9e^{-C_{10}|x|}\left[\left|\frac{n\sigma_n^2(x)-B_n^2}{\sqrt{n}\,\sigma_n(x)\,[B_n+\sqrt{n}\,\sigma_n(x)]}\right|+\left|\frac{n\mu_n(x)}{\sigma_n(x)\sqrt{n}}\right|\right]\leqslant$$

$$\leqslant C_{11}e^{-C_{10}|x|}\left[\frac{n}{B_n}\int\limits_{B_n<|y|<|x|B_n}y^2\,dF(y)+\frac{n}{B_n}\int\limits_{|y|>|x|B_n}|y|\,dF(y)\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_{12}n}{|x|^3B_n^3}\int\limits_{|y|<|x|B_n}|y|^3\,dF(y)+\frac{C_{12}n}{|x|B_n}\int\limits_{|y|>|x|B_n}|y|\,dF(y).$$

Следовательно,

$$|F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{C_{13}n}{|x|^3B}\int\limits_{|y|<|x|B_n}|y|^3\,dF(y)+\frac{C_{13}n}{|x|B_n}\int\limits_{|y|>|x|B_n}|y|\,dF(y). \tag{13}$$

Так как

$$\int\limits_{|z|<y}|z|^3\,dF(z)=-y^3\int\limits_{|z|>y}dF(z)+3\int\limits_0^y z^2\int\limits_{|v|>z}dF(v)\,dz$$

и

$$\int\limits_{|z|>y}|z|\,dF(z)=y\int\limits_{|\ |>y}dF(z)+\int\limits_y^\infty\int\limits_{|v|>z}dF(v)\,dz,$$

то

$$\frac{n}{|x|^3 B_n^3} \int\limits_{|y|<|x|B_n} |y|^3 dF(y) + \frac{n}{|x| B_n} \int\limits_{|y|>|x|B_n} |y| \, dF(y) =$$

$$= \frac{n}{|x|^3 B_n^3} \int\limits_0^{|x|B_n} y \int\limits_{|z|>y} |z| \, dF(z) \, dy,$$

следовательно,

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{C_{14}\eta}{|x|^3 B_n^3} \int\limits_0^{|x|B_n} y \int\limits_{|z|>y} |z| \, dF(z) \, dy.$$

Доказательство теоремы завершается применением неравенства (10).

Доказательство теоремы 1. Если $g(x) \in G$, то из неравенства (13) имеем для $|x| \geqslant 1$

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant C_{13} \left[\frac{1}{|x|^3 \sqrt{n}} \int\limits_{|y| \leqslant |x|\sqrt{n}} \frac{y^2 g(y)}{\frac{g(y)}{|y|}} dF(y) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{x^2 g(x\sqrt{n})} \int\limits_{|y|>|x|B_n} y^2 g(y) \, dF(y) \right] \leqslant \frac{C_{15} \lambda}{x^2 g(x\sqrt{n})}.$$

Последнее неравенство и (4) доказывает утверждение теоремы 2.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
13. I. 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Мешалкин и Б. А. Рогозин. Оценка расстояния между функциями распределения по близости их характеристических функций и ее применение к центральной предельной теореме, Сб. Предельные теоремы, Ташкент, 1963, 49–56.
2. С. Х. Сираждинов и М. Маматов. О глобальных предельных теоремах для плотностей и функций распределения, Сб. Предельные теоремы, Ташкент, 1963, 91–106.
3. П. Сурвила. К вопросу об остаточном члене в центральной предельной теореме, Лит. матем. сб., II, 1, 1962, 179–194.
4. С. В. Нагаев. Некоторые предельные теоремы для больших уклонений, Теор. вер. и ее прим., 1964.
5. Ю. П. Студнев. Об одной универсальной оценке, Сб. Предельные теоремы, Ташкент, 1963, 131–135.
6. M. L. Katz. Note on the Berry-Esseen theorem, Ann. Math. Stat. Vol., 34, 3, 1963, 1107–1108.

LIEKAMOJO NARIO ĮVERTINIMO CENTRINĖJE RIBINĖJE TEOREMOJE KLAUSIMU

A. BIKELIS

(Reziumė)

Tegul duota vienodai pasiskirsčiusių nepriklausomų atsitiktinių dydžių seka $\{\xi_k, k = 1, 2, \dots\}$ su $M\xi_1 = 0$ ir pasiskirstymo funkcija $F(x)$.

Jeigu pasiskirstymo funkcija $F(x)$ patenkina sąlygą (3), tuomet visiems $|x|\geqslant 1$

$$|F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{\frac{C_0}{|x|B_n}\int\limits_0^{|x|B_n} y\int\limits_{|z|>y}|z|\,dF(z)\,dy}{\int\limits_{|y|\leqslant|x|B_n} y^2\,dF(y)},\quad C_0>0,$$

čia

$$F_n(x)=P\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k<x\right\},\qquad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy.$$

$B_n>0$ – apibrėžiama pagal (6).

ON THE ESTIMATION OF THE REMAINDER TERM IN THE CENTRAL LIMIT THEOREM

A. BIKELIS

(Summary)

Let $\{\xi_k,\ k=1,2,\ldots\}$ be a sequence of independent and identically distributed random variables with the same distribution function $F(x)$ and let the mean value $M\xi_1=0$.

If the distribution function $F(x)$ satisfies the condition (3), then for all $|x|\geqslant 1$ holds

$$|F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{\frac{C_0}{|x|B_n}\int\limits_0^{|x|B_n} y\int\limits_{|z|>y}|z|\,dF(z)\,dy}{\int\limits_{|y|\leqslant|x|B_n} y^2\,dF(y)},\quad C_0>0,$$

where

$$F_n(x)=P\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k<x\right\},\qquad \Phi(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy.$$

B_n are defined by (6).