ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
VI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 3
1964

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ В ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В. М. ЗОЛОТАРЕВ

1. *Постановка задачи*

Обозначим $\mathfrak{B}$-множество невырожденных всех распределений имеющих конечный третий момент и рассмотрим последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ независимых, одинаково распределенных случайных величин с функциями распределения $F(x)$ из множества $\mathfrak{B}$.

Образуем последовательность сумм

$$\zeta_n = (\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n - nM\xi_1)\ (nD\xi_1)^{-1/2}$$

с функциями распределения $F_n(x)$.

Обозначим σ^2 — дисперсию, α_3 — центрированный третий момент и β_3 — центрированный третий абсолютный момент распределения $F(x)$.

В соответствии с устанавливающейся в нашей литературе традицией мы будем использовать далее для равномерной и „средней" метрик следующие обозначения

$$\rho_2(G, H) = \sup_x |G(x) - H(x)|,$$

$$\rho_3(G, H) = \left\{ \int |G(x) - H(x)|^\nu dx \right\}^{1/\nu}, \quad \nu > 1.$$

Расстояние функции G до класса $\mathfrak{H}$ относительно метрики ρ мы будем понимать, как и обычно:

$$\rho(G, \mathfrak{H}) = \inf_{H \in \mathfrak{H}} \rho(G, H).$$

Хорошо известно, что принадлежность $F(x)$ к множеству $\mathfrak{B}$ обеспечивает не только сходимость $F_n(x)$ к нормальному закону $\Phi(x)$, но и выделение в явном виде первого остаточного члена при апроксимации F_n функцией Φ.

К. Эссеен [1] показал, что

$$B_2 = \sup_{\mathfrak{B}} \frac{\sigma^3}{\beta_3} \lim_{n \to \infty} \sqrt{n}\ \rho_2(F_n, \Phi) = \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}}, \tag{1}$$

что было своего рода неожиданностью, поскольку все ожидали появление предсказанной А. Н. Колмогоровым [2] константы $1/\sqrt{2\pi}$.

Б. Рогозин [3] уточнил результат Эссеена, показав, что апроксимация $F_n(x)$ семейством $\mathfrak{Q}$ всех нормальных законов дает уменьшение константы Эссеена до ожидавшейся ранее величины:

$$\overline{B}_2 = \sup_{\mathfrak{B}} \frac{\sigma^3}{\beta_3} \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\ \rho_2(F_n, \mathfrak{Q}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \tag{2}$$

В последнее время, наряду с ρ_2, все большее употребление в построении предельных теорем находит метрика ρ_3 (и, в частности, среднеквадратичная ρ_3). Это объясняется тем, что ρ_3, в некотором смысле будучи слабее ρ_2, позволяет надеяться на устранение ряда трудностей при построении предельных теорем и их уточнений, возникающих в метрике ρ_2.

Предельными теоремами в метрике ρ_3 занимались уже многие авторы. Наиболее обстоятельным и оригинальным исследованием в этом направлении, по-видимому, следует признать работу К. Эссеена [4].

В этой работе Эссеену удалось установить в ряде случаев существование и явное выражение предела

$$A_3(F) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\ \rho_3(F_n, \Phi).$$

В частности для случая $\nu=2$ (среднеквадратическая метрика):

$$A_3^2(F) = \begin{cases} \dfrac{1}{96\sqrt{\pi}} \left(\dfrac{\alpha_3}{\sigma^3}\right)^2, & \text{если } F - \text{нерешетчатое} \\ \dfrac{1}{96\sqrt{\pi}} \left(\dfrac{\alpha_3}{\sigma^3}\right)^2 + \dfrac{1}{24\sqrt{\pi}} \left(\dfrac{h}{\sigma}\right)^2, & \text{если } F - \text{решетчатое с шагом } h. \end{cases} \tag{3}$$

Развивая эти результаты в плане упоминавшихся выше задач, решенных Эссееном и Рогозиным, естественно поставить вопрос о вычислении оптимальных констант

$$B_3 = \sup_{\mathfrak{B}} \frac{\sigma^3}{\beta_3} A_3(F), \tag{4}$$

$$\overline{B}_3 = \sup_{\mathfrak{B}} \frac{\sigma^3}{\beta_3} \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\ \rho_3(F_n, \mathfrak{Q}). \tag{5}$$

Некоторый интерес может представлять также величина

$$\overline{A}_3(F) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\ \rho_3(F_n, \mathfrak{Q}). \tag{6}$$

В настоящей заметке исследуется случай $\nu=2$. При этом доказывается, что $B_3 = \overline{B}_3$, находится величина B_3, $\overline{A}_3(F)$, дается новое доказательство равенств (1), (2), которое позволяет понять причину различия аналогичных констант в метрике ρ_2 и попутно находится величина $\overline{A}_2(F) = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\ \rho_2(Fn, \mathfrak{Q})$.

2. *Основные результаты*

Теорема 1. $B_3^2 = \dfrac{1}{6\sqrt{\pi}}$, причем экстремальное значение величины $\dfrac{\sigma^3}{\beta^3} A_3(F)$ достигается на симметричном распределении Бернулли.

Теорема 2. $\overline{B}_3 = B_3$.

Доказательство теоремы 1. Вычисление B_3^2, в силу представления (3), сводится к отысканию таких наименьших чисел k_1 и k_2, что

а) $\alpha_3^2 \leqslant k_1 \beta_3^2$, если F – нерешетчатое;

б) $\alpha_3^2 + 4h^2 \sigma^4 \leqslant k_2 \beta_3^2$, если F – решетчатое с шагом h.

Тогда

$$B_3^2 = \frac{1}{96\sqrt{\pi}} \max(k_1, k_2). \tag{7}$$

В случае а), очевидно, $k_1 = 1$. Займемся вычислением k_2, заметив, уто величине шага h можно, не уменьшая общности рассуждений, приписать любое фиксированное значение (например, $h=1$). При этом всевозможные изменения h в рамках класса $\mathfrak{B}$ будут учитываться моментами распределения. Кроме того, поскольку в неравенстве присутствуют только центрированные моменты, мы вправе среди всех распределений $\mathfrak{B}$ рассматривать только те, у которых среднее значение равно нулю (класс $\mathfrak{B}_0$).

Неравенству б) в классе $\mathfrak{B}_0$ можно придать вид

$$I(F, k_2) = \int\int g(x, y, k_2)\, dF(x)\, dF(y) \geqslant 0,$$

где

$$g(x, y, K) = K|xy|^3 - (xy)^3 - 4h^2 (xy)^2.$$

Для каждого значения $K > 1$, очевидно, существует в классе решетчатых распределений со средним значением 0 минимум функционала $I(F, K)$. Согласно теореме В. Хефдинга [6] этот минимум может быть реализован во множестве двухточечных распределений. После этого нам остается решить уравнение $\inf I(F, K) = 0$, решением которого и будет величина k_2.

Итак, рассмотрим класс $\mathfrak{B}_0^*$ двухточечных распределений со средним значением, равным нулю. Из всего сказанного выше следует, что

$$k_2 = \inf_{\mathfrak{B}_0} (\alpha_3^2 + 4h^2\sigma^4)\beta_3^{-2} = \inf_{\mathfrak{B}_0^*} (\alpha_3^2 + 4h^2\sigma^4)\beta_3^{-2}. \tag{8}$$

Пусть теперь $F \in \mathfrak{B}_0^*$. Обозначим $x_1 < x_2$ – точки роста функции F и $p = F(x_1)$. Мы можем записать следующую систему равенств

$$x_1 p + x_2(1-p) = 0,$$
$$x_1^2 p + x_2^2(1-p) = \sigma^2,$$
$$x_1^3 p + x_2^3(1-p) = \alpha_3,$$

из которой, используя обозначения $2p - 1 = \tau$ и $x_2 - x_1 = h$, нетрудно получить следующие представления

$$\alpha_3 = \tau h\sigma^2, \quad \beta_3 = -x_1^3 p + x_2^3(1-p) = \frac{1}{2}(1+\tau^2) h\sigma^2.$$

Подставляя эти выражения во второе равенство (8), получим

$$k_2 = 4 \min_{\tau} \frac{4+\tau^2}{(1+\tau^2)^2} = 16,$$

и для B_3^2, согласно (7), значение $1/6\sqrt{2\pi}$. Поскольку минимум мы получили при $\tau=0$, что соответствует $p=1/2$, то экстремальное значение B_3^2 должно достигаться на симметричном распределении Бернулли.

Доказательство теоремы 2. Прежде всего отметим, что распределение $\Phi_n=\Phi\ (b_n x+a_n)$ из $\mathfrak{Q}$ реализующее $\rho_3(F_n,\ \mathfrak{Q})$ должно иметь параметры $a_n\to 0$ и $b_n=1+\delta_n\to 1$, поскольку в противном случае вообще бы не было сходимости F_n и Φ с ростом n. Элементарные соображения показывают, что величины a_n, δ_n, асимптотикой которых мы будем интересоваться, имеют порядок $1/\sqrt{n}$ и потому могут быть представлены в виде

$$a_n = k'\frac{\alpha_3}{\sigma^3}\ n^{-1/2}\Big(1+o(1)\Big),\quad \delta_n=k''\frac{\alpha_3}{\sigma^3}\ n^{-1/2}\Big(1+o(1)\Big).$$

Тогда

$$\Delta_n^2=\rho_3^2(F_n,\ \Phi_n)\sim\rho_3^2\left(F_n,\ \Phi+(k''x+k')\frac{\alpha_3}{\sigma^3}\ \Phi'\,n^{-1/2}\right)\sim$$

$$\sim\rho_3^2(\sqrt{n}\ R_n,\ (k''x+k')\frac{\alpha_3}{\sigma^3}\ \Phi')\ \frac{1}{n}=I_n,$$

где $R_n(x)$ означает первый остаточный член разложения $F_n(x)$ в ряд Эджворта—Крамера. Дальнейший расчет, проводимый в интеграле I_n так же как это делается Эссеном ([4], стр. 13), приводит нас к представлению

$$\Delta_n^2=\rho_3^2(F_n,\ \Phi)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{\alpha_3}{\sigma^3}\right)^2\left[\frac{1}{2}\ (k'')^2+\left(k'-\frac{1}{12}\right)^2-\frac{1}{144}\right]\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поскольку k' и k'' реализуют минимум главного поправочного члена в правой части последнего равенства, мы получаем

$$k''=0,\quad k'=\frac{1}{12}$$

и, следовательно,

$$b_n=1+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\quad a_n=\frac{1}{12}\ \frac{\alpha_3}{\sigma^3}\ n^{-1/2}+o(n^{-1/2}),\tag{9}$$

$$\rho_3^2(F_n,\ \mathfrak{Q})=\rho_3^2(F_n,\ \Phi)-\frac{1}{288\sqrt{\pi}}\left(\frac{\alpha_3}{\sigma^3}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Откуда

$$\overline{A}_3^2(F)=A_3^2(F)-\frac{1}{288\sqrt{\pi}}\left(\frac{\alpha_3}{\sigma^3}\right)^2.\tag{10}$$

Мы должны теперь найти такую наименьшую постоянную $\overline{B}_3$, что для всех $F\in\mathfrak{B}$

$$\overline{A}_3(F)\leqslant\overline{B}_3\ \frac{\beta_3}{\sigma^3}.$$

Это представляет собой задачу вполне аналогичную той, которая уже решалась нами при доказательстве теоремы 1. Дословно те же рассуждения приведут нас к выводу, что максимум $\frac{\sigma^3}{\beta_3}\overline{A}_3(F)$ достигается на симметричном двухточечном распределении, и что

$$\overline{B}_3^2 = B_3^2 = \frac{1}{6\sqrt{\pi}}.$$

3. *Новые доказательства теорем Эссеена и Рогозина*

Теоремы Эссеена и Рогозина были сформулированы в пункте 1 в форме равенств (1) и (2).

Приводимые ниже доказательства, возможно, в большей степени, чем доказательства самих авторов помогут разобраться в сути явления. Эти доказательства имеют еще и то преимущество, что базируются на общих соображениях и используют один метод, тот самый, который применялся нами при доказательстве теорем 1 и 2.

Доказательство теоремы Эссеена. Мы, как и Эссеен, будем отправляться от известного разложения Эджворта—Крамера функции $F_n(x)$ и немедленно вытекающего из него равенства

$$A_2(F)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,\rho_2(F_n,\Phi)=\begin{cases}\dfrac{1}{6\sqrt{2\pi}}\dfrac{|\alpha_3|}{\sigma^3}, & \text{если } F\text{ — нерешетчатое}\\[2ex] \dfrac{1}{6\sqrt{2\pi}}\dfrac{|\alpha_3|}{\sigma^3}+\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\dfrac{h}{\sigma}, & \text{если } F\text{ — решетчатое с шагом } h.\end{cases}$$

Мы должны найти наименьшие константы k_1 и k_2, при которых:

а) $|\alpha_3|\leqslant k_1\beta_3$, в случае нерешетчатого F;

б) $|\alpha_3|+3h\sigma^2\leqslant k_2\beta_3$, в случае решетчатого F с шагом h.

Нетрудно заметить, что $k_1=1$. Случай б) содержит только центрированные моменты, поэтому мы можем считать $M\xi_1=0$. Кроме того, не уменьшая общности наших рассуждений, мы можем предполагать $\alpha_3\geqslant 0$. Учитывая эти замечания, мы можем теперь неравенству б) придать вид

$$I(F,\ k_2)=\int g(x,\ k_2)\,dx\geqslant 0,$$

где

$$g(x,\ K)=K|x|^3-x^3-3hx^2.$$

Для каждого значения $K>1$ в классе распределений $\mathfrak{B}_0$, очевидно, существует $\inf\limits_{\mathfrak{B}_0} I(F,\ K)$. По теореме В. Хефдинга [5] этот минимум может быть реализован на двухточечных распределениях, т. е.

$$\inf_{\mathfrak{B}_0} I(F,\ K)=\inf_{\mathfrak{B}_0^*} I(F,\ K)=I^*(K).$$

Следовательно, для отыскания значения k_2 нам достаточно решить уравнение $I^*(K)=0$, или, что то же, найти

$$k_2=\sup_{\mathfrak{B}_0^*}\frac{\alpha_3+3h\sigma^2}{\beta_3}.$$

Поскольку, как мы видели при доказательстве теоремы 1,

$\alpha_3 = \tau h \sigma^2$ и $\beta_3 = \frac{1}{2}(1+\tau^2) h\sigma^2$, то

$$k_2 = 2 \sup_{\tau \geq 0} \frac{(\tau+3)}{\tau^2+1} = 2\, \frac{\tau+3}{\tau^2+1}\Big|_{\tau=\sqrt{10}-3} = \sqrt{10}+3,$$

$$B_2 = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \max(k_1, k_2) = \frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}}.$$

Отсюда видно также, что экстремум B_2 достигается на несимметричном распределении Бернулли со скачками в точках $-h(4-\sqrt{10})/2$, $h(\sqrt{10}-2)/2$, со скачками соответственно $(\sqrt{10}-2)/2$ и $(4-\sqrt{10})/2$, т. е. то, что было указано Эссееном в [1].

Доказательство теоремы Рогозина. Приводимое ниже доказательство более громоздкое и сложное чем доказательство самого Рогозина. Однако прием им используемый, будучи очень изящным, вряд ли может составить основу для универсального метода в такого рода задачах. Кроме того, он ничего не позволяет сказать ни о точном выражении $\overline{A}_2(F)$, ни об асимптотике параметров минимизирующего распределения $\rho_2(F_n, \mathfrak{Q}) = \rho_2\left(F_n, \Phi(b_n x + a_n)\right)$, что, как мы увидим далее, является не очень простой задачей.

Элементарные соображения показывают, что a_n и $\delta_n = b_n - 1$ могут быть представлены в виде

$$a_n = k_1 \frac{\alpha_3}{\sigma^3} n^{-1/2}\left(1+o(1)\right), \quad \delta_n = k_2 \frac{\alpha_3}{\sigma^3} n^{-1/2}\left(1+o(1)\right).$$

Отсюда делается вывод, что

$$\rho_2(F_n, \mathfrak{Q}) \sim \rho_2\left(F_n, \Phi + (k_2 x + k_1)\frac{\alpha_3}{\sigma^3}\Phi' n^{-1/2}\right)$$

и

$$\overline{A}_2(F) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\,\sigma} \inf_{\lambda, \gamma} \sup_x Q(x, \lambda, \gamma) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\,\sigma} \sup_x Q(x, 6k_2, 6k_1 - 1),$$

где

$$Q(x, \lambda, \gamma) = (\omega\,|x^2 + \lambda x + \gamma| + h)\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \omega = \frac{|\alpha_3|}{3\sigma^3}$$

$h > 0$ — величина шага в случае решетчатого F и $h = 0$ в случае нерешетчатого F.

Заметим, что, не уменьшая общности, мы можем считать $\lambda \geq 0$, поскольку $\sup Q$ берется по всей оси x, а распределение F несимметричным, ибо для симметричных F задача отыскания $\overline{A}_2(F)$, k_1, k_2 решается почти тривиально. Именно $k_1 = k_2 = 0$ и

$$\overline{A}_2(F) = \frac{h}{2\sqrt{2\pi}\,\sigma}.$$

Случай несимметричных F (для них $\omega > 0$) значительно сложнее.

Обозначим

$$X^+=\left\{ x:\ x^2+\lambda x+\gamma \geqslant 0 \right\},\quad X^-=\left\{ x:\ x^2+\lambda x+\gamma < 0 \right\}.$$

Очевидно, если X^- не пусто, то оно разделяет X^+ на две части X_1^+ и X_2^+ (мы условимся отождествлять X_2^+ с X^+ если X^- — пусто). На каждом из множеств X^+ и X^- мы можем интересоваться существованием внутренних точек x_0, в которых достигается относительный максимум. Такие точки будут корнями уравнения $\frac{\partial Q}{\partial x}=0$, причем, как нетрудно заметить, число корней не превосходит трех. Пусть $x_0=x_0(\lambda,\ \gamma)$ один из корней. Тогда для функции $Q_0=Q(x_0,\ \lambda,\ \gamma)$ имеем

$$\frac{\partial Q_0}{\partial \lambda}=\begin{cases} \omega x_0 \exp\left(-\frac{x_0^2}{2}\right), & \text{если}\quad x_0\in X^+ \\ -\omega x_0 \exp\left(-\frac{x_0^2}{2}\right), & \text{если}\quad x_0\in X^-. \end{cases} \tag{11}$$

Мы начнем с того, что вычислим $\sup Q$ при фиксированном значении γ и $\lambda=0$. Простой подсчет показывает, что

$$e^{\frac{x^2}{2}}\frac{\partial}{\partial x}Q(x,\ 0,\ \gamma)=\begin{cases} -\omega x\left[x^2-2+\gamma+\frac{h}{\omega}\right], & \text{если}\quad x\in X^+,\quad \text{т. е.}\quad x^2\geqslant -\gamma \\ \omega x\left[x^2-2+\gamma-\frac{h}{\omega}\right], & \text{если}\quad x\in X^-,\quad \text{т. е.}\quad x^2< -\gamma. \end{cases}$$

Следовательно, уравнение $\frac{\partial Q}{\partial x}=0$ всегда имеет корнем $x_1=0$. Этот корень остается единственным, если $2-\frac{h}{\omega}<0$ или же $\gamma\geqslant 2-\frac{h}{\omega}$. В том случае, когда $2-\frac{h}{\omega}\geqslant 0$ и $\gamma<2-\frac{h}{\omega}$, к x_1 добавляются еще два корня

$$x_{2,3}=\pm\sqrt{2-\gamma-\frac{h}{\omega}}.$$

Таким образом в первом случае

$$\sup_x Q=\omega|\gamma|+h,$$

а во втором

$$\sup_x Q=\max\left\{ (\omega|\gamma|+h),\quad 2\omega\exp\left(-1+\frac{\gamma}{2}+\frac{h}{\omega}\right) \right\}.$$

Рассмотрим теперь случай $\lambda>0$ и установим предварительно некоторые свойства корней уравнения

$$P(x)=\frac{\partial Q}{\partial x}=0. \tag{12}$$

1°. Если множество X_2^+ содержит точку $x=0$, то в этом множестве находится по крайней мере один положительный корень уравнения (12).

2°. Если X^- не пустое, то множество $X^-\cup X_2^+$ содержит по крайней мере один корень, причем все корни из X^- отрицательны.

3°. Множество X_1^+ может содержать только отрицательные корни $P(x)$.

Первое свойство получается из соотношений $P(0)=\omega\lambda>0$, $P(x)\to-\infty$ и $x\to\infty$ и того очевидного факта, что P является непрерывной функцией на каждом интервале целиком входящего в X^+ или X^-.

Пусть X^- не пусто, тогда

$$y_1=-\frac{\lambda}{2}-\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}-\gamma} \quad \text{и} \quad y_2=-\frac{\lambda}{2}+\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}-\gamma}$$

являются его границами. Из отрицательности y_1 следует свойство 3. Поскольку

$$P(y_1+0)=(2\omega+h)\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}-\gamma}+\frac{\lambda}{2}h>0,$$

$$P(y_2-0)=-\omega\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}-\gamma}-y_2 h,$$

то в случае $y_2>0$ множество X^- содержит по крайней мере один корень, а в случае $y_2\leqslant 0$ множество X_2^+, согласно свойству 1°, содержит по крайней мере один положительный корень. Если x_0 корень P из множества X^-, то из представления положителной величины

$$Q(x_0,\ \lambda,\ \gamma)=-\omega\left(2+\frac{\lambda}{x_0}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}x_0^2\right).$$

следует, что этот корень должен быть отрицательным.

Приведенные свойства 1°—3° вместе с выражением (11) производной $\frac{\partial Q_0}{\partial\lambda}$ позволяют сделать вывод, что для корней из множества X^- и для положительных корней множества X_2^+ соответствующие значения относительных максимумов (мы их будем обозначать $M_k(x)$) монотонно убывают с убыванием λ, а значения относительных максимумов, соответствующие остальным корням (обозначим их $N_l(\lambda)$), монотонно возрастают с убыванием λ.

Поскольку, как мы видели выше при разборе случая $\lambda=0$,

$$\max_l N_l(0)\leqslant\max_k M_k(0),$$

то для $\lambda>0$

$$\max_l N_l(\lambda)\leqslant\max_k M_k(\lambda)$$

(при этом число корней, входящих в ту или другую группу, может меняться при изменении λ, но, как видно из свойств 1°, 2°, число корней образующих максимумы M_k не меньше одного).

Следовательно, при фиксированном значении γ

$$\inf_\lambda \sup_x Q=\sup_x Q(x,\ 0,\ \gamma).$$

Дальнейшая минимизация по γ уже не представляет труда и дает нам в итоге

$$\overline{A}_2(F)=\begin{cases}\dfrac{h}{2\sqrt{2\pi}\,\sigma}, & \text{если}\quad h\geqslant\dfrac{2|\alpha_3|}{3\sigma^2}\\[2ex] \dfrac{h}{2\sqrt{2\pi}\,\sigma}+\dfrac{\Theta}{3\sqrt{2\pi}}\,\dfrac{|\alpha_3|}{\sigma^3}, & \text{если}\quad h<\dfrac{2|\alpha_3|}{3\sigma^2},\end{cases}$$

где h мы понимаем как величину равную нулю в случае нерешетчатого F, как величину шага в случае решетчатого F и Θ — неотрицательный корень уравнения

$$\Theta + \frac{3h\sigma^2}{2|\alpha_3|} = \exp\left(\frac{3h\sigma^2}{2|\alpha_3|} - 1 - \Theta\right).$$

Для параметров k_1, k_2 соответственно получаем значения $k_2 = 0$ и

$$k_1 = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{если } h \geqslant \frac{2|\alpha_3|}{3\sigma^2}, \\ \frac{1}{6}(1-\Theta), & \text{если } h < \frac{2|\alpha_3|}{3\sigma^2}. \end{cases}$$

Из найденного выражения величины $\bar{A}_2(F)$ получаем оценки

$$\bar{A}_2(F) \leqslant \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \frac{|\alpha_3|}{\sigma^3} \leqslant \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \frac{\beta_3}{\sigma^3}, \quad \text{если} \quad h < \frac{2|\alpha_3|}{3\sigma^3}$$

$$\bar{A}_2(F) = \frac{h}{2\sqrt{2\pi}\,\sigma} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\beta_3}{\sigma^3}, \quad \text{если} \quad h \geqslant \frac{2|\alpha_3|}{3\sigma^3}.$$

Последняя оценка следует из неравенства Мизеса и достигается не симметричных распределениях Бернулли. Поэтому $\bar{B}_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Поступило в редакцию
15.I.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. C. G. Esseen. A moment inequality with an application to the central limit theorem Skand. Aktuar, 1956, 3–4, 160–170.
2. А. Н. Колмогоров. Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей, вестник МГУ, 10, 1953, 29–39.
3. Б. А. Рогозин. Одно замечание к работе Эссеена, „Моментное неравенство с применением к центральной предельной теореме", Теор. вер. и ее прим., 1960, V, 1, 125–128.
4. C. G. Esseen. On Mean Central Limit Theorems Kungl, Tekniska Hogskolans Handlingar, 1958, N 121, p. 1–30.
5. W. Hoeffding. The Extrema of the Expected Value of a Function of Independent Random Variables, Ann. of Math. Stat., v 26, N 2, 1955, 268–275.
6. W. Hoeffding, S. S. Shrikhande. Bounds for the Distribution Function of a Seem of Independent, Identically Distributed Random Variables, Ann. Math. Stat., v 26, N 3 (1955), 439–449.

APIE VIENĄ RIBINIŲ TEOREMŲ, NEPRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SUMOMS, EKSTREMALINĮ UŽDAVINĮ

V. M. ZOLOTARIOV

(*Reziumė*)

Tegu $\mathfrak{B}$ pasiskirstymo funkcijų $F(x)$ klasė su

$$\int x\,dF = m, \quad \sigma^2 = \int (x-m)^2\,dF, \quad \beta = \int |x-m|^3\,dF$$

$\Phi_{a,b}$ — normalinis pasiskirstymas su parametrais a, b ir $F_n(x) = F^{n*}(\sigma\sqrt{n})$. Kvadratinėje-vidurkinėje metrikoje ρ_3 nagrinėjamos asimptotiškai tikslios konstantos

$$A_3(F) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,\rho_3(F_n, \Phi_{0,1})$$

$$\bar{A}_3(F) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,\rho_3(F_n, \Phi_{a_n,b_n}),$$

kur a_n ir b_n realizuoja $\inf\limits_{a,b} \rho_3(F_n, \Phi_{a,b})$,

$$B_3 = \sup_{\mathfrak{B}} \frac{\beta}{\sigma^3} A_3(F), \quad \bar{B}_3 = \sup_{\mathfrak{B}} \frac{\beta}{\sigma^3} \bar{A}_3(F).$$

Darbe randamas konstantų A_3, $\bar{A}_3$, B_3, $\bar{B}_3$ išraiškos ir konstantų a_n, b_n asimptotika. Taip pat duodamos naujas Eseno [1] ir Ragozino [3] teoremų įrodymas.

ON AN EXTREMAL PROBLEM IN THE CENTRAL LIMIT THEOREMS FOR SUMS OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

V. M. ZOLOTAREV

(*Summary*)

Let $\mathfrak{B}$ be a class of distribution functions $F(x)$ with finite third moment and let

$$\int x\,dF = m, \quad \sigma^2 = \int (x-m)^2\,dF, \quad \beta = \int |x-m|^3\,dF$$

Let further $\Phi_{a,b}$ be (a, b) — normal distribution and $F_n(x) = F^{n*}(\sqrt{n})$. Defining $\rho_3(F, G)$ as

$$\left(\int (F(x) - G(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

we investigate

$$A_3(F) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,\rho_3(F_n, \Phi_{0,1})$$

$$\bar{A}_3(F) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,\rho_3(F_n, \Phi_{a_n,b_n})$$

where a_n and b_n minimize $\rho_3(F_n, \Phi_{a,b})$,

$$B_3 = \sup_{\mathfrak{B}} \frac{\beta}{\sigma^3} A_3(F), \quad \bar{B}_3 = \sup_{\mathfrak{B}} \frac{\beta}{\sigma^3} \bar{A}_3(F).$$

For A_3, $\bar{A}_3$, B_3, $\bar{B}_3$ explicit formulas are given and asymptotic behavior of a_n, b_n is established.

We also give hew proofs of well-known results due to Esseen [1] and Ragozin [3], based on the method used for ρ_3-metric.