IV ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1964

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

В. КАБАЙЛА

1. В настоящей статье рассматриваются мероморфные решения такой системы уравнений:

$$\begin{cases} f(\varepsilon z)=\lambda f(z), \\ f\left(\frac{1}{z}\right)=\mu f(z), \end{cases} \tag{1}$$

где λ и μ — некоторые константы, $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{n}}$, n — любое натуральное число. Так как в системе (1) есть два уравнения и одна неизвестная функция, то, очевидно, для существования тождественно неравного нулю решения должны быть выполнены некоторые условия совместности. В настоящей статье указываются необходимые и достаточные условия совместности, а так же общий вид любого мероморфного решения.

В частном случае $\lambda=\mu=1$ мероморфными решениями системы (1) являются автоморфные функции с конечной группой преобразований, получаемой из основных преобразований $w=\varepsilon z$ и $w=\frac{1}{z}$. Этот факт и поясняет выбор рассматриваемых уравнений.

Близкие к рассматриваемой задаче вопросы исследуются в [1]. Автору на аналогичные и более общего вида задачи указал доц. А. Г. Нафталевич.

2. Определим операторы A и B тождествами:

$$Af(z)=f(\varepsilon z), \qquad (\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{n}},\ n \text{ — натуральное число})$$
$$Bf(z)=f\left(\frac{1}{z}\right).$$

Очевидно, систему (1) в новых обозначениях можно записать так:

$$\begin{cases} Af(z)=\lambda f(z), \\ Bf(z)=\mu f(z). \end{cases} \tag{1a}$$

Как видно из определения, операторы A и B удовлетворяют равенствам:

$$\begin{cases} A^n=E, \\ B^2=E, \\ ABA=B, \end{cases} \tag{2}$$

где E — единичный оператор.

Если система (1) имеет нетривиальное решение $f(z)$, $f(z)\not\equiv 0$, то λ и μ удовлетворяют равенствам, которые получаются из (2), формально подставляя в них λ, μ и 1 вместо A, B и E:

$$\begin{cases} \lambda^n = 1, \\ \mu^2 = 1, \\ \lambda^2 = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Из равенства $B^2 = E$ и (1а), например, получается:

$$f(z) = B^2 f(z) = \mu^2 f(z)$$

и, так как $f(z)\not\equiv 0$, $\mu^2 = 1$. Аналогично из $A^n = E$ и $ABA = B$ получаются соответственно $\lambda^n = 1$ и $\lambda^2 = 1$.

Таким образом, для существования нетривиального решения системы (1) необходимо выполнение условий (3). Докажем, что эти условия являются и достаточными.

Пусть выполняются (3). Заметим, что из (3) следует, что $\lambda = 1$ или $\lambda = -1$ и $\mu = 1$ или $\mu = -1$. При этом, если $\lambda = -1$, то из равенства $\lambda^n = 1$ следует, что число n должно быть четным. Следовательно, система (1) совместима лишь в четырех случаях:

1) $\lambda = 1$, $\mu = 1$;
2) $\lambda = 1$, $\mu = -1$;
3) $\lambda = -1$, $\mu = 1$, $n = 2m$;
4) $\lambda = -1$, $\lambda = -1$, $n = 2m$.

Для каждого из этих случаев укажем по одному нетривиальному мероморфному решению системы (1).

Любое частное нетривиальное мероморфное решение системы (1) с заданными λ и μ обозначим $f_{\lambda,\mu}(z)$.

1 *случай:* $\lambda = 1$, $\mu = 1$. Нетривиальным решением $f_{1,1}(z)$ является любая автоморфная функция с группой преобразований, получаемой из основных преобразований $w = \varepsilon z$ и $w = \frac{1}{z}$.

2 *случай:* $\lambda = 1$, $\mu = -1$. Одним из нетривиальных решений будет $f_{1,-1}(z) = z^n - z^{-n}$. Проверяется утверждение подстановкой функции $f_{1,-1}(z)$ в систему (1).

3 *случай:* $\lambda = -1$, $\mu = 1$, $n = 2m$. Частным решением системы (1) будет $f_{-1,1}(z) = z^m + z^{-m}$.

4 *случай:* $\lambda = -1$, $\mu = -1$, $n = 2m$. Частное решение $f_{-1,-1}(z) = z^m - z^{-m}$.

Покажем, что если $f_{\lambda,\mu}(z)$ — нетривиальное мероморфное решение системы (1), то общее решение $f(z)$ этой системы в классе мероморфных функций будет

$$f(z) = f_{\lambda,\mu}(z)\,\omega(z), \tag{4}$$

где $\omega(z)$ — любая автоморфная функция, определенная в случае 1.

Действительно, пусть $f_{\lambda,\mu}(z)$ и $f(z)$ — два тождественно неравные нетривиальные решения системы (1). Обозначим

$$\frac{f(z)}{f_{\lambda,\mu}(z)} = \omega(z).$$

Очевидно, $\omega(z)$ — мероморфная функция. Кроме того,

$$\omega(\varepsilon z)=\frac{f(\varepsilon z)}{f_{\lambda,\mu}(\varepsilon z)}=\frac{\lambda f(z)}{\lambda f_{\lambda,\mu}(z)}=\omega(z),$$

$$\omega\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{f_{\lambda,\mu}\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{\mu f(z)}{\mu f_{\lambda,\mu}(z)}=\omega(z).$$

т. е. $\omega(z)$ — автоморфная функция с основными преобразованиями $w=\varepsilon z$ и $w=\frac{1}{z}$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Для существования нетривиального решения системы* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\begin{cases}\lambda^2=\mu^2=1,\\ \lambda^n=1.\end{cases}$$

В случае выполнения этих условий общее мероморфное решение системы (1) *будет такое:*

$$f(z)=f_{\lambda,\mu}(z)\,\omega(z), \tag{5}$$

где $\omega(z)$ — *произвольная автоморфная функция с основными преобразованиями* $w=\varepsilon z$ *и* $w=\frac{1}{z}$, *а* $f_{\lambda,\mu}(z)$ *определяется для всех возможных значений* λ *и* μ *так:*

$$\begin{aligned}
&1) && f_{1,1}(x)=1, &&\\
&2) && f_{1,-1}(z)=z^n-\frac{1}{z^n}, &&\\
&3) && f_{-1,1}(z)=z^m+\frac{1}{z^m} && (n=2m),\\
&4) && f_{-1,-1}(z)=z^m-\frac{1}{z^m} && (n=2m).
\end{aligned} \tag{6}$$

Вильнюсский Государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
28. XII. 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. P. J. Myrberg. Sur les fonctions automorphes à multiplicateurs exponentiels, Journ. de math. pures et appl., 1956, t. 35, f. 3.

VIENOS LYGČIŲ SISTEMOS SPRENDINIO EGZISTAVIMO SĄLYGOS

V. KABAILA

(Reziumė)

Straipsnyje nagrinėjama lygčių sistema

$$\begin{cases} f(\varepsilon z)=\lambda f(z),\\ f\left(\frac{1}{z}\right)=\mu f(z),\end{cases} \tag{1}$$

kur $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, n — bet koks natūrinis skaičius, o λ ir μ — konstantos. Randamos būtinos ir pakankamos meramorfinio sprendinio egzistavimo sąlygos ir bendras sprendinys meromorfinių funkcijų klasėje. Atskiuu $\lambda = \mu = 1$ atveju sistemos (1) sprendiniai yra automorfinės funkcijos su pagrindinėmis transformacijomis $w = \varepsilon z$ ir $w = \frac{1}{z}$.

DIE EXISTENZBEDINGUNGEN DER LÖSUNG EINES GLEICHUNGSSYSTEMS

V. KABAILA

(Zusammenfassung)

In der Arbeit untersucht man das Gleichungssystem

$$\begin{cases} f(\varepsilon z) = \lambda f(z) \\ f\left(\frac{1}{z}\right) = \pi f(z) \end{cases} \tag{1}$$

wo λ und μ gegebene Konstanten sind und $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ (n — beliebige natürliche Zahl). In der Arbeit sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer meromorphen Lösung des Systems (1) erhalten und ist die allgemeine Lösung in der Klasse der meromorphen Funktionen angegeben. In Sonderfalle $\lambda = \mu = 1$ sind die Lösungen von (1) automorphe Funktionen mit Haupttransformationen $w = \varepsilon z$ und $w = \frac{1}{z}$.