IV ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 3

1964

ПОВЕДЕНИЕ ЦЕЛОЙ ТРАНСЦЕНДЕНТНОЙ ФУНКЦИИ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ЕЕ МОДУЛЯ

Ш. И. СТРЕЛИЦ

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Проблема изучения целых решений обыкновенных дифференциальных уравнений включает, естественно, важную задачу установления их порядка роста. Уже здесь возникает необходимость уметь выразить значения производных через значения самой функции в точках максимума модуля последней. Это достигается в методе Вимана—Валирона, который дает соответствующие соотношения. Указанный метод был затем с успехом применен к решению различных других задач (Валирон, Макинтайр, Островский и др. [3], [8], [10]).

Для изучения поведения целых функций при больших значениях модуля Виман и Валирон, затем Заксер (см., например, [3], [4]) использовали степенные разложения этих функций. Характерным для этих авторов является применение центральных индексов этих рядов в качестве функций сравнения. Макинтайр внес некоторые видоизменения в этот метод [8]. В настоящей работе мы ставим себе целью развить соответствующую теорию для целых трансцендентных функций многих комплексных переменных при различных исчерпаниях пространства. Ранее нами была предпринята попытка распространить метод Вимана—Валирона на функции многих переменных. На этом пути были достигнуты определенные успехи (см., например, [12], [13]). В этой статье мы исходим из другой идеи, отличной от известных в теории одного переменного. В качестве функции сравнения мы вводим иную функцию, не связанную непосредственно с центральным индексом. Случай многих переменных более сложен в сравнении со случаем одного переменного: здесь влияют как многообразные возможности исчерпать пространство, так и наличие многих частных производных одного и того же порядка вместо одной производной данного порядка в случае функций одного переменного.

А. А. Гольдберг и И. Ф. Битлян нашли аналог для теоремы Вимана — Валирона, рассматривая вместо отдельных частных производных выражения (см. [5])

$$\left(\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial}{\partial z_j}\right)^{(m)} f \tag{0.1}$$

при исчерпании пространства *семейством подобных круговых областей* $V(R)$, *обладающих следующими двумя свойствами:* 1) *области* $V(R)$ *вместе с точкой* $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *принадлежит и любая точка* $(z_1 e^{i\vartheta_1}, z_2 e^{i\vartheta_2}, \ldots, z_n e^{i\vartheta_n})$ *со всякими действительными* $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ *и* 2) *точка* $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in V(R)$ *тогда и только тогда, когда точка* $\left(\frac{z_1}{R}, \frac{z_2}{R}, \ldots, \frac{z_n}{R}\right) \in V(1)$. В предлагаемой вниманию читателя работе мы получаем соотношения, как для отдельных частных производных, так и для комбинаций вида (0.1) при исчерпаниях пространства семействами параболически подобных круговых областей, обладающими свойством 1) семейств подобных круговых областей и следующим видоизмененным свойством 2): точка $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in V(R)$ тогда и только тогда, когда $\left(\frac{z_1}{R^{a_1}}, \frac{z_2}{R^{a_2}}, \ldots, \frac{z_n}{R^{a_n}}\right) \in V(1)$; $a_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, Соотношения для отдельных производных мы получаем при наличии определенного запаса гладкости у гиперповерхностей $S(R) = S(R, a_1, \ldots, a_n)$-ограничивающих области $V(R)$; соотношения для комбинаций вида (0.1) — при исчерпании пространства семействами параболически подобных произвольных круговых областей, не накладывая никаких условий на гиперповерхности, ограничивающие области семейства, кроме того условия, конечно. что гиперповерхности круговые.

Работа состоит из трех глав. В первой рассматриваются свойства максимума модуля $M(R) = M(R, a_1, \ldots, a_n)$ целой функции $f(z_1, \ldots, z_n)$, где

$$M(R) = \max_{S(R)} |f(z_1, \ldots, z_n)|, \tag{0.2}$$

при исчерпании пространства указанным нами выше способом. Во второй главе приводятся основные определения, вспомогательные предложения и неравенства. В третьей мы изучаем поведение целой трансцендентной функции при больших значениях модуля, как самой функции, так и ее частных производных. Следует добавить, что применяемый нами метод с успехом приложим также к исследованию функций одного переменного. Соответствующие результаты мы изложим в отдельной работе.

Условимся здесь о некоторых обозначениях. Точку $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ (как в действительном пространстве, так и в комплексном) мы часто будем обозначать одной буквой η. У нас будут встречаться обе записи.

Другое замечание относится к функциям, зависящим от параметров, где мы часто, если это не приводит к недоразумениям, опускаем подразумевающиеся параметры:

$$\Psi(R)=\Psi(R, t_1, t_2, \ldots, t_p).$$

Заметим еще и следующее. Часто у нас координаты точки $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ в действительном пространстве переменных $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ будут зависеть от некоторого переменного R. Сложную функцию $\Psi\left[r_1(R), r_2(R), \ldots, r_n(R)\right]$ мы будем иногда писать как $\Psi(R)$, а иногда как $\Psi(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, опуская обозначение зависимости r_j от R, так что иногда

$$\Psi(R)=\Psi(r_1, r_2, \ldots, r_n)=\Psi\left[r_1(R), r_2(R), \ldots. r_n(R)\right].$$

Конечно, и эта запись будет применяться только, если недоразумения исключены по тексту. Наше замечание следует иметь в виду, так как у нас будут также встречаться функции $\Psi(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, где переменные $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — независимые.

В заключение укажем, что в другой статье мы используем результаты настоящей работы для исследования целых решений уравнений в частных производных.

Глава 1

§ 1. Выпуклость максимума модуля

1.1. Для простоты изложения все приводимые в этой главе результаты формулируются и доказываются для случая целой функции двух комплексных переменных. Случай большего числа переменных рассматривается буквально так же.

Пусть $V(R)$ — *семейство подобных круговых областей* (см. введение), исчерпывающее пространство C^2 при $R\to\infty$, а $S(R)$ — соответствующее семейство круговых гиперповерхностей, ограничивающих области $V(R)$. По-прежнему $\left(\text{см. } (0.2)\right)$ мы обозначаем

$$M(R)=\max_{S(R)}|f(z_1, z_2)|, \tag{1.1.1}$$

где $f(z_1, z_2)$ — целая функция.

Лемма 1.1.1. *Функция* $\ln M(R)$ *есть выпуклая функция от* $\ln R$ (ср. с [7]).

Для доказательства запишем функцию $f(z_1, z_2)$ в диагональный ряд

$$f(z_1, z_2)=\sum_{j=0}^{\infty} A_j(z_1, z_2),$$

где $A_j(z_1, z_2)$ — однородные полиномы степени j. Образуем функцию

$$f(z, z_1, z_2)=f(z_1 z, z_2 z)=\sum_{j=0}^{\infty} A_j(z_1, z_2)z^j, \quad z=\mathrm{Re}^{i\vartheta}. \quad z_j=z_j e^{i\varphi_j}, \quad j=1,\ 2.$$

Обозначим через $m(R, z_1, z_2)$ максимум модуля функции $f(z, z_1, z_2)$ при постоянных z_1, z_2, $(z_1, z_2)\in S(1)$ на окружности $|z|=R$. Как известно,

$\ln m(R, z_1, z_2)$ есть выпуклая функция от $\ln R$ и поэтому при $R_1 < R < R_2$

$$\ln m(R, z_1, z_2) \leqslant \frac{(\ln R_2 - \ln R)\ln m(R_1, z_1, z_2) + (\ln R - \ln R_1)\ln m(R_2, z_1, z_2)}{\ln R_2 - \ln R_1}. \qquad (2.1.1)$$

Нетрудно видеть, что

$$\max_{(z_1, z_2)\in S(1)} m(R, z_1, z_2) = M(R). \qquad (3.1.1)$$

В самом деле, $M(R)$ достигается у функции $|f(z_1, z_2)|$ при определенных значениях $\zeta_1, \zeta_2, (\zeta_1, \zeta_2)\in S(R)$. Имеем:

$$\max_{(z_1, z_2)\in S(1)} m(R, z_1, z_2) = \max_{\substack{|z|=R;\\ (z_1, z_2)\in S(1)}} |f(z_1 z, z_2 z)| = \max_{(z_1, z_2)\in S(1)} |f(Rz_1, Rz_2)| =$$

$$= \max_{(z_1, z_2)\in S(R)} |f(z_1, z_2)| = M(R) = |f(\zeta_1, \zeta_2)| = \left|f\left(R, \frac{\zeta_1}{R}, \frac{\zeta_2}{R}\right)\right|. \qquad (4.1.1)$$

Равенство (4.1.1) доказывает наши замечание. При этом

$$\left|f\left(R, \frac{\zeta_1}{R}, \frac{\zeta_2}{R}\right)\right| = M(R).$$

Из соотношения (2.1.1) тогда вытекает неравенство

$$\max_{S(1)} \ln m(R, z_1, z_2) \leqslant \frac{(\ln R_2 - \ln R)\max\limits_{S(1)} \ln m(R_1, z_1, z_2) + (\ln R - \ln R_1)\max\limits_{S(1)} \ln m(R_2, z_1, z_2)}{\ln R_2 - \ln R_1},$$

что вместе с (3.1.1) доказывает лемму.

В силу доказанного предложения существуют почти всюду производные и всегда односторонние конечные производные от $\ln M(R)$ по $\ln R$. Положим

$$K(R) = \frac{RM'(R)}{M(R)},$$

где в точках отсутствия производной мы считаем $K(R)$ равным значению производной справа от $\ln M(R)$ по $\ln R$. Построенная функция в силу леммы 1.1.1 — возрастающая функция от R и по той же лемме

$$K(R) \leqslant \frac{\ln M(Re^{\tau}) - \ln M(R)}{\tau} \leqslant K(Re^{\tau}). \qquad (5.1.1)$$

2.1. Лемму 1.1.1 можно обобщить.

Пусть $V(R, a_1, a_2)$ — исчерпывающее пространство C^2 семейство параболически подобных круговых областей (см. введение). Через $S(R) = S(R, a_1, a_2)$ мы обозначаем гиперповерхность, ограничивающую область $V(R) = V(R, a_1, a_2)$. Пусть, далее,

$$M(R) = M(R, a_1, a_2) = \max_{S(R)} |f(z_1, z_2)|; \quad K(R) = K(R, a_1, a_2) = \frac{RM'(R, a_1, a_2)}{M(R, a_1, a_2)}.$$

Покажем сейчас, что имеет место аналогичное лемме 1.1.1 предложение [7].

Лемма 1.2.1. $\ln M(R, a_1, a_2)$ *есть выпуклая функция от* $\ln R$.

Доказательство. Пусть

$$f(z_1, z_2) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} z_1^i z_2^j - \qquad (1.2.1)$$

целая функция и $a_1 = m$, $a_2 = n$ — целые положительные числа. Образуем функцию

$$f(z, z_1, z_2) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} z_1^i z_2^j z^{im+jn} = f(z_1 z^m, z_2 z^n)$$

и обозначаем

$$m(R,\ z_1,\ z_2)=\max_{|z|=R}|f(z,\ z_1,\ z_2)|.$$

Справедливо соотношение

$$\max_{(z_1,\ z_2)\in S(1,\ m,\ n)} m(R,\ z_1,\ z_2)=M(R).$$

Это следует из равенств

$$\max_{(z_1,\ z_2)\in S(1,\ m,\ n)} m(R,\ z_1,\ z_2)=\max_{\substack{|z|=R\\(z_1,\ z_2)\in S(1,\ m,\ n)}}|f(z_1 z^m,\ z_2 z^n)|=$$

$$=\max_{(z_1,\ z_2)\in S(1,\ m,\ n)}|f(R^m z_1,\ R^n z_2)|=M(R).$$

Заметим, что, если $(\zeta_1,\ \zeta_2)\in S(1,\ m,\ n)$ есть точка, в которой достигается $\max|f(z_1,\ z_2)|$ на гиперповерхности $S(R,\ m,\ n)$, то

$$\left|f\left(R,\ \frac{\zeta_1}{R^m},\ \frac{\zeta_2}{R^n}\right)\right|=M(R)=M(R,\ m,\ n). \tag{2.2.1}$$

Доказательство выпуклости $\ln M(R,\ m,\ n)$ от $\ln R$ следует отсюда так же, как доказательство леммы 1.2.1 из аналогичного соотношения (2.1.1).

Если a_1 и a_2 рациональные числа $a_1=\frac{m}{p}$ и $a_2=\frac{n}{p}$, то, полагая $\tilde R=R^{\frac{1}{p}}$, $S(\tilde R,\ m,\ n)=S\left(R,\ \frac{m}{p},\ \frac{n}{p}\right)$ и рассматривая максимум модуля на гиперповерхности $S(\tilde R,\ m,\ n)$, придем к тому же заключению о выпуклости $\ln M(R,\ a_1,\ a_2)$ по $\ln R$. Отметим очевидное равенство:

$$K(\tilde R,\ m,\ n)=\frac{\tilde R M'(\tilde R,\ m,\ n)}{M(\tilde R,\ m,\ n)}=p\frac{RM'\left(R,\ \frac{m}{p},\ \frac{n}{p}\right)}{M\left(R,\ \frac{m}{p},\ \frac{n}{p}\right)}=pK\left(R,\ \frac{m}{p},\ \frac{n}{p}\right). \tag{3.2.1}$$

Предположим наконец, что числа a_1 и a_2 — иррациональные. Приблизим числа a_1 и a_2 рациональными числами p_n и q_n так, чтобы $p_n\uparrow a_1$, $q_n\uparrow a_2$. Пусть, далее,

$$V(1,\ p_n,\ q_n)=V(1,\ a_1,\ a_2);\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Так как $\ln M(R,\ p_n,\ q_n)$, в согласии с доказанным выше, выпукла по $\ln R$, то этим же свойством обладает и предел

$$\lim_{n\to\infty}\ln M(R,\ p_n,\ q_n)=\ln M(R,\ a_1,\ a_2).$$

Существование последнего предела при любом постоянном R следует из следующих соображений. Последовательность гиперповерхностей $S(R,\ p_n,\ q_n)$ сходится к гиперповерхности $S(R,\ a_1,\ a_2)$ и последовательность точек максимума $(\zeta_1^{(n)},\ \zeta_2^{(n)})$ на гиперповерхностях $S(R,\ p_n,\ q_n)$ функции $|f(z_1,\ z_2)|$ имеет, по меньшей мере, одну предельную точку $(\zeta_1,\ \zeta_2)$ на гиперповерхности $S(R,\ a_1,\ a_2)$. В силу непрерывности функции $|f(z_1,\ z_2)|$ из $(\zeta_1^{(j)},\ \zeta_2^{(j)})\to(\zeta_1,\ \zeta_2)$ следует $|f(\zeta_1^{(j)},\ \zeta_2^{(j)})|\to|f(\zeta_1,\ \zeta_2)|$.

Лемма доказана.

Из доказанной леммы вытекает неравенство:

$$K(R,\ a_1,\ a_2)\tau\leqslant\ln M(Re^{\tau},\ a_1,\ a_2)-\ln M(R,\ a_1,\ a_2)\leqslant K(Re^{\tau},\ a_1,\ a_2)\tau. \tag{4.2.1}$$

§ 2. Основное соотношение

1.2. Функция $|f(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})|$ при постоянных r_1 и r_2 является дифференцируемой и периодической с периодом 2π функцией от φ_1 и φ_2. На гиперповерхности $S(R, a_1, a_2)$ максимум функции $|f(z_1, z_2)|$ достигается в некоторой точке $(\zeta_1, \zeta_2)=(\bar{r}_1 e^{i\bar{\varphi}_1}, \bar{r}_2 e^{i\bar{\varphi}_2})$. Для определения координат $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2$ при данных $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ на основании элементарных правил анализа находим систему уравнений:

$$\frac{\partial |f|^2}{\partial \varphi_j}=0; \qquad j=1,\ 2. \tag{1.1.2}$$

Легко видеть, что

$$\frac{z_j \dfrac{\partial f}{\partial z_j}}{f}=\frac{r_j\left(u\dfrac{\partial u}{\partial r_j}+v\dfrac{\partial v}{\partial r_j}\right)-i\left(u\dfrac{\partial u}{\partial \varphi_j}+v\dfrac{\partial v}{\partial \varphi_j}\right)}{u^2+v^2}; \qquad f=u+iv.$$

Из равенств (1.1.2) мы заключаем, что в точке максимума (ζ_1, ζ_2)

$$\frac{\zeta_j \dfrac{\partial f(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial z_j}}{f(\zeta_1, \zeta_2)}=\frac{r_j\left(u\dfrac{\partial u}{\partial r_j}+v\dfrac{\partial v}{\partial r_j}\right)}{u^2+v^2}=K_j; \qquad j=1,\ 2.$$

Заметим, что величины K_j; $j=1,\ 2$ — действительны.

Зафиксируем теперь значение ζ_2. Рассмотрим функцию $h(z_1)=f(z_1, \zeta_2)$ на окружности $|z_1|=|\zeta_1|=\bar{r}_1$, как функцию одного z_1. Очевидно, $\max\limits_{|z_1|=\bar{r}_1}|h(z_1)|$ достигается в точке $z_1=\zeta_1$. Положив $m(r_1)=\max\limits_{|z_1|=r_1}|h(z_1)|$, найдем в точке ζ_2 (см. [11])

$$\frac{\zeta_1 h'(\zeta_1)}{h(\zeta_1)}=\frac{r_1 m'(r_1)}{m(r_1)}=K_1 \geqslant 0. \tag{2.1.2}$$

Аналогично докажем, что и $K_2 \geqslant 0$ (K_j может равняться нулю только при $\zeta_j=0$).

Пусть $V(R)$ — семейство подобных круговых областей, исчерпывающее пространство C^2 при $R \to \infty$, а $S(R)$ — соответствующее семейство ограничивающих их гиперповерхностей. Сохраним обозначения, введенные при доказательстве леммы 1.1.1 и, попрежнему, положим

$$m(R, z_1, z_2)=\max_{|z|=R}|f(z_1 z, z_2 z)| \tag{3.1.2}$$

и

$$k(R, z_1, z_2)=\frac{Rm'(R, z_1, z_2)}{m(R, z_1, z_2)}. \tag{4.1.2}$$

В силу выпуклости $\ln m(R, z_1, z_2)$ по $\ln R$

$$k(R, z_1, z_2) \leqslant \frac{\ln m(\bar{R}, z_1, z_2)-\ln m(R, z_1, z_2)}{\ln \bar{R}-\ln R} \leqslant k(\bar{R}, z_1, z_2). \tag{5.1.2}$$

Мы видели выше (§ 1.), что в точке максимума (ζ_1, ζ_2) функции $|f(z_1, z_2)|$ на гиперповерхности $S(R)$

$$m\left(R, \frac{\zeta_1}{R}, \frac{\zeta_2}{R}\right)=M(R). \tag{6.1.2}$$

Пусть сейчас значение R постоянно. Рассмотрим точки максимума $\left(\zeta_1(\bar{R}), \zeta_2(\bar{R})\right) \in S(\bar{R})$ функции $|f(z_1, z_2)|$ при $\bar{R}>R$. Это множество точек имеет, по меньшей мере, одну предельную точку $(\zeta_1, \zeta_2) \in S(R)$ на гиперповерхности $S(R)$. Легко видеть, что точка $(\zeta_1, \zeta_2) \in S(R)$ также является точкой максимума на гиперповерхности $S(R)$ функции $|f(z_1, z_2)|$. Выберем сейчас последовательность чисел $\{R_n\}$, $R_n\downarrow R$ такую, что последовательность точек $\big(\zeta_1(R_n), \zeta_2(R_n)\big)$ сходится к точке $(\zeta_1, \zeta_2)\in S(R)$. Обозначим для удобства $\zeta_1(R_n)=\zeta_1^{(n)}$, $\zeta_2(R_n)=\zeta_2^{(n)}$ и отметим тождество:

$$\frac{Rf'_z\left(R, \frac{z_1}{R}, \frac{z_2}{R}\right)}{f\left(R, \frac{z_1}{R}, \frac{z_2}{R}\right)}=\frac{\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}+z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)f(z_1, z_2)}{f(z_1, z_2)}. \tag{7.1.2}$$

Положим теперь в неравенстве (5.1.2) $\tilde{R}=R_n$, $z_j=\frac{\zeta_j^{(n)}}{R_n}$. Имеет место равенство (6.1.2), т. е.

$$m\left(R_n, \frac{\zeta_1^{(n)}}{R_n}, \frac{\zeta_2^{(n)}}{R_n}\right)=M(R_n),$$

и тогда по (4.1.2) и (7.1.2)

$$k\left(R_n, \frac{\zeta_1^{(n)}}{R_n}, \frac{\zeta_2^{(n)}}{R_n}\right)=\frac{R_nf'_z\left(R_n, \frac{\zeta_1^{(n)}}{R_n}, \frac{\zeta_2^{(n)}}{R_n}\right)}{f\left(R_n, \frac{\zeta_1^{(n)}}{R_n}, \frac{\zeta_2^{(n)}}{R_n}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\zeta_1^{(n)}\frac{\partial}{\partial z_1}+\zeta_2^{(n)}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)f\left(\zeta_1^{(n)}, \zeta_2^{(n)}\right)}{f\left(\zeta_1^{(n)}, \zeta_2^{(n)}\right)}. \tag{8.1.2}$$

Следовательно,

$$\frac{\left(\zeta_1^{(n)}\frac{\partial}{\partial z_1}+\zeta_2^{(n)}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)f\left(\zeta_1^{(n)}, \zeta_2^{(n)}\right)}{f\left(\zeta_1^{(n)}, \zeta_2^{(n)}\right)}\geqslant\frac{\ln M(R_n)-\ln M(R)}{\ln R_n-\ln R}\geqslant K(R), \tag{9.1.2}$$

так как

$$m\left(R, \frac{\zeta_1^{(n)}}{R_n}, \frac{\zeta_2^{(n)}}{R_n}\right)\leqslant M(R); \qquad \left(\frac{\zeta_1^{(n)}}{R_n}, \frac{\zeta_2^{(n)}}{R_n}\right)\in S(1).$$

Переход в неравенстве (9.1.2) к пределу при $n\to\infty$ дает тогда:

$$K(R)\leqslant\frac{\left(\zeta_1\frac{\partial}{\partial z_1}+\zeta_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)f(\zeta_1, \zeta_2)}{f(\zeta_1, \zeta_2)}. \tag{10.1.2}$$

Положим, далее, в неравенстве (5.1.2) $z_j=\frac{\zeta_j}{R}$. Аналогично предыдущему придем к неравенству

$$k\left(R, \frac{\zeta_1}{R}, \frac{\zeta_2}{R}\right)=\frac{\left(\zeta_1\frac{\partial}{\partial z_1}+\zeta_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)f(\zeta_1, \zeta_2)}{f(\zeta_1, \zeta_2)}\leqslant\frac{\ln M(R_n)-\ln M(R)}{\ln R_n-\ln R}\leqslant K(R_n),$$

так как

$$m\left(R_n, \frac{\zeta_1}{R}, \frac{\zeta_2}{R}\right)\leqslant M(R_n) \quad\text{и}\quad m\left(R, \frac{\zeta_1}{R}, \frac{\zeta_2}{R}\right)=M(R); \quad \left(\frac{\zeta_1}{R}, \frac{\zeta_2}{R}\right)\in S(1).$$

При $n\to\infty$ отсюда найдем неравенство, обратное (10.1.2), что вместе с неравенством (10.1.2) приводит к соотношению:

$$\frac{\left(\zeta_1\frac{\partial}{\partial z_1}+\zeta_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)f(\zeta_1, \zeta_2)}{f(\zeta_1, \zeta_2)}=K(R). \tag{11.1.2}$$

Если приведенные выкладки провести для последовательности $\acute{R}_n \uparrow R$, то будет верно аналогичное соотношение

$$\frac{\left(\tilde{\zeta}_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \tilde{\zeta}_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right) f(\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2)}{f(\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2)} = K(R-0) \qquad (12.1.2)$$

$\Big($точка $(\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2) \in S(R)$ не обязательно совпадает с точкой $(\zeta_1, \zeta_2)\Big)$. Функция $K(R)$ возрастающая, и поэтому неравенство $K(R-0) < K(R)$ имеет место не более, чем в счетном числе точек. Значение функции $K(R)$ в точке разрыва можно выбрать равным либо $K(R-0)$, либо $K(R+0)$, в зависимости от того, какую точку выбрать на гиперповерхности $S(R)$ в качестве точки максимума: (ζ_1, ζ_2) или $(\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2)$. Для определенности мы полагали $K(R) = K(R+0)$ (см. п. 1.1). Для удобства условимся в соотношениях (11.1.2) и (12.1.2) вместо односторонних пределов $K(R)$ и $K(R-0)$ писать всегда $K(R)$ $\Big($в самих формулах различие пределов сказывается в различии точек (ζ_1, ζ_2) и $(\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2)\Big)$. С этой предосторожностью мы всегда можем писать:

$$\frac{\left(\zeta_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right) f(\zeta_1, \zeta_2)}{f(\zeta_1, \zeta_2)} = K(R). \qquad (13.1.2)$$

Замечание. Равенство (13.1.2) имеет место в любой предельной точке множества F точек максимума $\left(\zeta_1(\bar{R}),\ \zeta_2(\bar{R})\right) \in S(\bar{R})$; $\bar{R} \neq R$ на гиперповерхности $S(R)$. Точки максимума (ζ_1, ζ_2), не являющиеся предельными для множества F, не представляют для нас интереса, и мы их из дальнейшего рассмотрения исключаем, не оговаривая этого особо.

2.2. Рассмотрим семейство параболически подобных круговых областей $V(R, a_1, a_2)$, исчерпывающее пространство C^2, с ограничивающими гиперповерхностями $S(R, a_1, a_2)$. Мы сохраняем здесь обозначения § 1.

Пусть сейчас $a_1 = m$ и $a_2 = n$, где m и n — целые положительные числа, а (ζ_1, ζ_2) — точка максимума функции $|f(z_1, z_2)|$ на гиперповерхности $S(R, m, n)$. В этом случае имеет место формула, аналогичная (13.1.2). Буквально так же, как в п. 1.2 этого параграфа, выводится соответствующее равенство, если заметить, что

$$\frac{Rf'_z(R, z_1, z_2)}{f(R, z_1, z_2)} = \frac{\left(mz_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + nz_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right) f(z_1, z_2)}{f(z_1, z_2)}$$

и тогда

$$K(R, m, n) = \frac{RM'(R, m, n)}{M(R, m, n)} = \frac{\left(m\zeta_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + n\zeta_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right) f(\zeta_1, \zeta_2)}{f(\zeta_1, \zeta_2)}. \qquad (1.2.2)$$

Если числа $a_1 = \frac{m}{p}$ и $a_2 = \frac{n}{p}$ — рациональны, то заменой $\tilde{R} = R^{\frac{1}{p}}$ на основании (3.2.1) мы придем к той же формуле (1.2.2), если в ней заменить m, n на $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{p}$ соответственно.

Случай иррациональных положительных чисел a_1, a_2 мы получаем предельным переходом следующим образом. Числа a_1 и a_2 приближаем монотонно возрастающими последовательностями рациональных чисел p_n и q_n.

Для каждой пары чисел имеет место выведенное выше соотношение в точках максимума. Затем мы рассматриваем гиперповерхность $S(R, a_1, a_2)$, как предельную для последовательности гиперповерхностей $S(R, p_n, q_n)$ при постоянном R, считая $S(1, a_1, a_2) = S(1, p_n, q_n)$.

Этим приемом мы уже пользовались и раньше (§ 1). Таким образом мы пришли к следующему результату.

Лемма 1.2.2. *Пусть $V(R) = V(R, a_1, a_2)$ — семейство параболически подобных круговых областей, исчерпывающее пространство C^2 при $R \to \infty$, $S(R) = S(R, a_1, a_2)$ — семейство ограничивающих их гиперповерхностей, $|f(z_1, z_2)|$ — целая функция, (ζ_1, ζ_2) — точка максимума функции $|f(z_1, z_2)|$ на гиперповерхности $S(R)$; $\max\limits_{S(R)} |f(z_1, z_2)| = |f(\zeta_1, \zeta_2)| = M(R)$* и

$$K(R) = \frac{RM'(R)}{M(R)} \left(M(R) = M(R, a_1, a_2); \quad K(R) = \dot{K}(R, a_1, a_2)\right).$$

В этих условиях

$$\frac{\left(a_1 \zeta_1 \dfrac{\partial}{\partial z_1} + a_2 \zeta_2 \dfrac{\partial}{\partial z_2}\right) f(\zeta_1, \zeta_2)}{f(\zeta_1, \zeta_2)} = K(R). \tag{2.2.2}$$

3.2. Рассмотрим функцию

$$M(r_1, r_2) = \max_{\substack{|z_1| = r_1 \\ |z_2| = r_2}} |f(z_1, z_2)|, \tag{1.3.2}$$

где $f(z_1, z_2)$ — целая функция.

В силу возрастания функции $M(r_1, r_2)$ по любому из переменных, когда второе постоянно, почти для всех r_1 при постоянном r_2 существует частная производная $\dfrac{\partial M}{\partial r_1}$, и аналогично, почти для каждого r_2 при постоянном r_1 — частная производная $\dfrac{\partial M}{\partial r_2}$. Тем же путем, как и выше, нетрудно показать, что функция $\ln M(r_1, r_2)$ выпуклая функция по логарифму каждого из переменных, когда второе постоянно. Отсюда вытекает, что всегда существуют односторонние конечные частные производные $\dfrac{\partial M}{\partial r_j}$, $j = 1, 2$. Покажем теперь, что, полагая $M(r_1, r_2) = |f(\zeta_1, \zeta_2)|$

$$\frac{\zeta_j \dfrac{\partial f(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial z_j}}{f(\zeta_1, \zeta_2)} = \frac{r_j \dfrac{\partial M}{\partial r_j}}{M}, \tag{2.3.2}$$

где под частной производной $\dfrac{\partial M}{\partial r_j}$ мы подразумеваем одностороннюю частную производную. Для доказательства этого, предположим сначала, что в рассматриваемой точке существует производная $\dfrac{\partial M}{\partial r_j}$. Введем функцию $h(z) = f(z, \zeta_2)$. Очевидно,

$$\max_{|z| = |\zeta_1|} |h(z)| = |f(\zeta_1, \zeta_2)| = M(r_1, r_2).$$

Пусть $\overline{M}(r) = \max\limits_{|z| = r} |h(z)|$ и η — точка, в которой достигается значение $\overline{M}(r)$, т. е. $\overline{M}(r) = |h(\eta)|$. Тогда (см. [11]):

$$\frac{\eta h'(\eta)}{h(\eta)} = \frac{\eta \dfrac{\partial f(\eta, \zeta_2)}{\partial z_1}}{f(\eta, \zeta_2)} = \frac{r\overline{M}'(r)}{\overline{M}(r)}.$$

Но $\ln \overline{M}(r)$ есть выпуклая функция от $\ln r$ и поэтому при $\alpha>1$, $\beta<1$, если заметить, что $\overline{M}(\alpha r)\leqslant M(\alpha r,\ r_2)$; $\overline{M}(\beta r)\leqslant M(\beta r,\ r_2)$,

$$\frac{r_1\overline{M}'(r_1)}{\overline{M}(r_1)}\leqslant\frac{\ln\overline{M}(\alpha r_1)-\ln\overline{M}(r_1)}{\ln\alpha}\leqslant\frac{\ln M(\alpha r_1,\ r_2)-\ln M(r_1,\ r_2)}{\ln\alpha}\leqslant r_1\frac{\partial\ln M(\alpha r_1,\ r_2)}{\partial r_1}$$

и

$$\frac{\partial\ln M(\beta r_1,\ r_2)}{\partial r_1}\leqslant\frac{\ln M(r_1,\ r_2)-\ln M(\beta r_1,\ r_2)}{\ln\frac{1}{\beta}}\leqslant\frac{\ln\overline{M}(r_1)-\ln\overline{M}(\beta r_1)}{\ln\frac{1}{\beta}}\leqslant r_1\frac{d\ln\overline{M}(r_1)}{dr_1}.$$

Таким образом, при любом $\alpha>1$ и $\beta<1$

$$\frac{\beta r_1\dfrac{\partial M(\beta r_1,\ r_2)}{\partial r_1}}{M(\beta r_1,\ r_2)}\leqslant\frac{\zeta_1\dfrac{\partial f(\zeta_1,\ \zeta_2)}{\partial z_1}}{f(\zeta_1,\ \zeta_2)}\leqslant\frac{\alpha r_1\dfrac{\partial M(\alpha r_1,\ r_2)}{\partial r_1}}{M(\alpha r_1,\ r_2)},$$

что, в силу предположенной непрерывности производной в точке $(r_1,\ r_2)$, дает

$$\frac{\zeta_1\dfrac{\partial f(\zeta_1,\ \zeta_2)}{\partial z_1}}{f(\zeta_1,\ \zeta_2)}=\frac{r_1\dfrac{\partial M(r_1,\ r_2)}{\partial r_1}}{M(r_1,\ r_2)}.$$

Так как $\ln M(r_1,\ r_2)$ есть выпуклая функция от $\ln r_1$ (при постоянном r_2), то функция $\dfrac{\partial\ln M(r_1,\ r_2)}{\partial r_1}$ есть возрастающая функция от r_1 (при постоянном r_2). Пусть сейчас $(r_1,\ r_2)$ — произвольная точка. Существует, в соответствии со сказанным выше, последовательность чисел $\{r_1^{(j)}\}$; $r_1^{(j)}\uparrow r_1$ такая, что в каждой точке $(r_1^{(j)},\ r_2)$ существует производная $\dfrac{\partial M}{\partial r_1}$. Пусть теперь $|f(\zeta_1^{(j)},\ \zeta_2)|=M(r_1^{(j)},\ r_2)$ и $(\zeta_1,\ \zeta_2)$ — предельная точка последовательности $(\zeta_1^{(j)},\ \zeta_2)$ на бицилиндре $|z_1|=r_1$, $|z_2|=r_2$. Выберем из нашей последовательности точек подпоследовательность, которую мы опять обозначим через $(\zeta_1^{(j)},\ \zeta_2)$, сходящуюся к точке $(\zeta_1,\ \zeta_2)$. В каждой точке $(\zeta_1^{(j)},\ \zeta_2)$ справедливо по доказанному равенство (2.3.2), т. е.

$$\zeta_1^{(j)}\frac{\partial\ln f(\zeta_1^{(j)},\ \zeta_2)}{\partial z_1}=r_1^{(j)}\frac{\partial\ln M(r_1^{(j)},\ r_2)}{\partial r_1}.$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $j\to\infty$, придем к равенству (2.3.2) в точке $(\zeta_1,\ \zeta_2)$, причем справа в этом равенстве $\dfrac{\partial M}{\partial r_j}$ означает производную справа по r_j.

Подобным же образом доказывается равенство (2.3.2), как для переменного z_2, так и для производных слева. Обозначив

$$K(r_1,\ r_2)=\sum_{j=1}^{2}\frac{r_j\dfrac{\partial M}{\partial r_j}}{M}$$

и

$$\frac{r_j\dfrac{\partial M}{\partial r_j}}{M}=\alpha_j K(r_1,\ r_2);\qquad \alpha_1+\alpha_2=1,$$

мы можем в согласии с вышедоказанным написать:

$$\frac{\left(\zeta_1\dfrac{\partial}{\partial z_1}+\zeta_2\dfrac{\partial}{\partial z_2}\right)f(\zeta_1,\ \zeta_2)}{f(\zeta_1,\ \zeta_2)}=K(r_1,\ r_2)\qquad(3.3.2)$$

и

$$K_j(r_1,\ r_2)=\frac{\zeta_j\dfrac{\partial f(\zeta_1,\ \zeta_2)}{\partial z_j}}{f(\zeta_1,\ \zeta_2)}=\alpha_j K(r_1,\ r_2);\qquad j=1,\ 2. \tag{4.3.2}$$

Соотношение (2.2.2) вместе с равенством (4.3.2) доказывает справедливость следующей леммы.

Лемма 1.3.2. *Пусть $V(R,\ a_1,\ a_2)$ — семейство параболически подобных круговых областей, исчерпывающее пространство C^2 при $R\to\infty$. Пусть, далее, $f(z_1,\ z_2)$ — целая функция, а $(\zeta_1,\ \zeta_2)$ точка максимума функции $|f(z_1,\ z_2)|$ на гиперповерхности $S(R,\ a_1,\ a_2)$, ограничивающей область $V(R,\ a_1,\ a_2)$. Полагая, по-прежнему, этот максимум равным $M(R)$, а $K(R)=\dfrac{RM'(R)}{M(R)}$, мы утверждаем, что*

$$K(R)=a_1K_1(r_1,\ r_2)+a_2K_2(r_1,\ r_2), \tag{5.3.2}$$

где $r_j=|\zeta_j|$; $j=1,\ 2$ $\left(K_j\right.$ определяется из $\left.(4.3.2)\right)$.

4.2. В заключении этой главы докажем следующее предложение.

Лемма 1.4.2. *Пусть $f(z_1,\ z_2)$ — целая трансцендентная функция. В плоскости переменных $r_1,\ r_2$ $(|z_j|=r_j)$ рассмотрим область G, ограниченную параболами $r_2=A_1r_1^{\beta_1}$ и $r_2=A_2r_1^{\beta_2}$, причем $0<\beta_1<\beta_2$. Справедливо предельное равенство*

$$\lim_{\substack{r_1\to\infty\\ (r_1,\ r_2)\in\bar G}} K(r_1,\ r_2)=\lim_{\substack{r_1\to\infty\\ (r_1,\ r_2)\in\bar G}}\sum_{j=1}^{2} r_j\frac{\partial\ln M(r_1,\ r_2)}{\partial r_j}=\infty. \tag{1.4.2}$$

Доказательство. Сначала отметим простой факт: если при постоянном r_2 и любых r_1

$$\frac{\partial\ln M(r_1,\ r_2)}{\partial\ln r_1}<\lambda<\infty, \tag{2.4.2}$$

(здесь $\lambda>0$ — постоянная), то функция $f(z_1,\ z_2)$ есть полином относительно переменного z_1. Действительно, из (2.4.2) следует, что

$$M(r_1,\ r_2)<\bar{C}r_1^{\lambda}.$$

Последнее означает, что при всяком постоянном z_2 с $|z_2|=r_2$ функция $f(z_1,\ z_2)$ есть полином степени не выше, чем $[\lambda]+1$. С другой стороны, очевидно, имеет место разложение во всем конечном пространстве C^2 следующего вида:

$$f(z_1,\ z_2)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z_2)z_1^n. \tag{3.4.2}$$

При $|z_2|=r_2$ эта функция вырождается в полином степени не выше $[\lambda]+1$. Иными словами, на окружности $|z_2|=r_2$

$$f_{[\lambda]+p+1}(z_2)=0 \tag{4.4.2}$$

при всех целых $p>0$, что возможно лишь тогда, когда (4.4.2) есть тождество при всех z_2. Это мы и утверждали.

Приведенное замечание показывает, что, если $f(z_1,\ z_2)$ — целая трансцендентная функция, то либо $\dfrac{\partial\ln M(r_1,\ r_2)}{\partial r_1}\to\infty$ при всяком постоянном r_2 и $r_1\to\infty$, либо $\dfrac{\partial\ln M(r_1,\ r_2)}{\partial r_2}\to\infty$ при всяком постоянном r_1 и $r_2\to\infty$.

Так как область G ограничена параболами $r_2=A_1 r_1^{\beta_1}$ и $r_2=A_2 r_1^{\beta_2}$, причем $0<\beta_1<\beta_2$, то при достаточно больших $r_1: r_1>r_1^\circ$ имеет место неравенство $A_2 r_1^{\beta_2}>A_1 r_1^{\beta_1}$, и поэтому при $r_1>r_1^\circ$ график параболы $A_2 r_1^{\beta_2}=r_2$ находится выше графика параболы $r_2=A_1 r_1^{\beta_1}$ (мы считаем r_1 осью абсцисс в плоскости переменных r_1, r_2). Отметим еще, что любая прямая $r_1=m=\text{const}$ пересекает, как легко видеть, обе параболы при любом $m>0$.

Теми же рассуждениями, как и выше, легко показать, что если

$$\lim_{R\to\infty} K(B_1 R^{a_1},\ B_2 R^{a_2})=\lambda<\infty, \qquad a_1,\ a_2>0,$$

то функция $f(z_1, z_2)$ — полином по совокупности переменных (см. также ниже п.5.4). Так как по предположению $f(z_1, z_2)$ — целая трансцендентная функция, то

$$\lim_{R\to\infty} K(B_1 R^{a_1},\ B_2 R^{a_2})=\infty \tag{5.4.2}$$

при любых постоянных B_1, B_2 и a_1, a_2. Подберем числа a_1 и a_2, B_1 и B_2 так, чтобы было $\frac{a_2}{a_1}=\beta_1$ и $B_2=B_1^{\beta_1}A_1$. При таком выборе постоянных, кривая, задаваемая параметрически уравнениями

$$\begin{cases} r_1=B_1 R^{a_1}; \\ r_2=B_2 R^{a_2}, \end{cases} \tag{6.4.2}$$

совпадает с параболой $r_2=A_1 r_1^{\beta_1}$. Формула (5.4.2) теперь означает, что вдоль параболы $r_2=A_1 r_1^{\beta_1}$ функция $K(r_1, r_2)\to\infty$, т. е. при $R>R_0(N)$

$$K(r_1,\ r_2)>N, \tag{7.4.2}$$

где (r_1, r_2) — точка параболы (6.4.2). В точке пересечения прямой $r_1=B_1 \overline{R}^{a_1}$, $\overline{R}>R_0(N)$ с параболой (6.4.2) справедливо (7.4.2), и поэтому вдоль прямой $r_1=B_1 \overline{R}^{a_1}$ при $r_2>B_2 \overline{R}^{a_2}$ функция $K(r_1, r_2)$, как возрастающая, превосходит значение N. Следовательно, на отрезке прямой $r_1=B_1 \overline{R}^{a_1}$, заключенном в области G, справедливо (7.4.2). Это неравенство будет иметь место на любом подобном отрезке в области G при $R>\overline{R}$, так как вдоль параболы (6.4.2), в соответствии со сказанным в § 1, функция $K(B_1 R^{a_1}, B_2 R^{a_2})$ возрастает.

Лемма доказана.

Глава 2

§ 3. Некоторые предложения о возрастающих функциях

1.3. Р. Неванлинна [9] обобщил известную в теории возрастающих функций лемму Бореля [2] следующим образом.

Лемма Р. Неванлинны. *Пусть $h(x)$ — неубывающая и непрерывная справа на луче $x>0$ функция с $\lim_{x\to\infty} h(x)=\infty$. Пусть, далее, $\varphi(t)>0$ есть невозрастающая функция такая, что*

$$\int^{\infty} \varphi(t)\,dt<\infty.$$

Тогда всюду, за исключением множества интервалов, число которых на каждом ограниченном отрезке конечно, конечной меры на оси x, справедливо неравенство

$$h\big(x+\varphi(h)\big)-h(x)<1, \qquad \varphi(h)=\varphi[h(x)]. \tag{1.1.3}$$

Если же

$$\int^{\infty} \varphi(t)\,dt = \infty,$$

то найдется такая неубывающая функция $h(x)$, *что всюду при* $x > x_0$

$$h\Big(x + \varphi(h)\Big) - h(x) \geqslant 1. \qquad (2.1.3)$$

Заметим, что доказательство этой леммы Р. Неванлинна провел методом Бореля.

Обычным у Бореля приемом (изучением функции $h(e^x)$, см., например, [2]) из вышеприведенной леммы легко вывести следующее предложение.

Лемма 1.1.3. *В предположениях леммы Р. Неванлинны относительно функций* $h(x)$ *и* $\varphi(t)$ *всюду, за исключением, быть может, множества* E *интервалов, число которых на каждом ограниченном отрезке конечно, ограниченной логарифмической меры, справедливо неравенство:*

$$h[xe^{\varphi(h)}] - h(x) < c_0, \quad \varphi(h) = \varphi[h(x)]. \qquad (3.1.3)$$

В последнем неравенстве $c_0 > 0$ — *произвольная постоянная; исключаемое множество* E *от постоянной* c_0, *вообще говоря, зависит.*

Для наших целей мы далее выбираем

$$\varphi(t) = \frac{2}{t \ln^{1+\alpha} t}, \qquad \alpha > 0.$$

Неравенство (3.1.3) тогда принимает следующий вид:

$$h(xe^{\tau}) - h(x) < c_0, \qquad (4.1.3)$$

где $\tau = 2(h \ln^{1+\alpha} h)^{-1}$; $h = h(x)$.

Обозначим теперь $y = xe^{\frac{\tau}{2}}$. Вместо (4.1.3) мы сейчас можем писать неравенство

$$h(ye^{\frac{\tau}{2}}) - h(ye^{-\frac{\tau}{2}}) < c_0. \qquad (5.1.3)$$

Но $y > x$, так как $\tau > 0$. Поэтому $h(y) \geqslant h(x)$ и

$$\frac{1}{h(y)\ln^{1+\alpha} h(y)} \leqslant \frac{1}{h(x)\ln^{1+\alpha} h(x)}.$$

Положив $\tau_0 = [h(y)\ln^{1+\alpha} h(y)]^{-1}$, из (5.1.3) получим

$$h(ye^{\tau_0}) - h(ye^{-\tau_0}) = [h(ye^{\tau_0}) - h(y)] + [h(y) - h(ye^{-\tau_0})] < c_0. \qquad (6.1.3)$$

Пусть множество E в лемме 1.1.3 состоит из последовательности интервалов (x_j', x_j''), $j = 1, 2, 3, \ldots$ Тогда

$$\int_E \frac{dt}{t} = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{x_j'}^{x_j''} \frac{dt}{t} < \infty.$$

Каждому $x \notin E$ соответствует значение $y = xe^{+\frac{1}{h(x)\ln^{1+\alpha} h(x)}}$, для которого верно (6.1.3). Поэтому множество E' точек оси x, для которых (6.1.3) не имеет места, содержится во множестве интервалов (y_j', y_j''), $j = 1, 2, 3, \ldots$, где

$$y_j' = x_j' e^{-\frac{1}{h(x_j'')\ln^{1+\alpha} h(x_j'')}}; \quad y_j'' = x_j'' e^{\frac{1}{h(x_j')\ln^{1+\alpha} h(x_j')}}.$$

Таким образом

$$\int\limits_{E'} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{y_j'}^{y_j''} \frac{dt}{t} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int\limits_{y_j'}^{x_j'} + \int\limits_{x_j'}^{x_j''} + \int\limits_{x_j''}^{y_j''} \right) \frac{dt}{t} = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{x_j'}^{x_j''} \frac{dt}{t} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\ln \frac{x_j'}{y_j'} + \ln \frac{y_j''}{x_j''} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} - \int\limits_{h(x_j')}^{h(x_j'')} d\left(\frac{1}{t \ln^{1+\alpha} t} \right) + \int\limits_{E} \frac{dt}{t} < - \int\limits_{h(x_1')}^{\infty} d\left(\frac{1}{t \ln^{1+\alpha} t} \right) + \int\limits_{E} \frac{dt}{t} < \infty .$$

Отсюда вытекает (см. (6.1.3))

лемма 2.1.3. *Пусть $h(x)$ удовлетворяет условиям леммы Р. Неванлинны. Тогда вне множестеа интервалов E ограниченной, логарифмической меры (число исключаемых интервалов на каждом ограниченном отрезке конечно) верно неравенство*

$$|h(ye^{\tau}) - h(y)| < c_0, \tag{7.1.3}$$

где $|\tau| \leqslant \dfrac{1}{h(y) \ln^{1+\alpha} h(y)}$.

2.3. Вместе с функцией $h(x)$ условиям леммы Р. Неванлинны удовлетворяет также функция $\beta^{-1} h(x)$, $\beta \leqslant 1$. По лемме 1.1.3 мы тогда находим:

$$\frac{1}{\beta} \left\{ h^{\beta} \left[y e^{\frac{1}{h^{\beta}(y) \ln^{1+\alpha} h(y)}} \right] - h^{\beta}(y) \right\} < c_0 .$$

Далее, по теореме о конечных разностях

$$\frac{h \left[y e^{\frac{1}{h^{\beta}(y) \ln^{1+\alpha} h(y)}} \right] - h(y)}{h^{1-\beta} \left(y e^{\frac{1}{h^{\beta}(y) \ln^{1+\alpha} h(y)}} \right)} < c_0 .$$

Заметим сейчас, что по лемме 2.1.3 вне определенного там исключаемого множества E при $y > x_0$, где x_0 достаточно велико,

$$h^{1-\beta} \left[y e^{\frac{1}{h^{\beta}(y) \ln^{1+\alpha} h(y)}} \right] = \left\{ h^{\beta} \left[y \exp \left(h^{\beta}(y) \ln^{1+\alpha} h(y) \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\}^{\frac{1-\beta}{\beta}} <$$

$$< [h^{\beta}(y) + c_0]^{\frac{1-\beta}{\beta}} < 2 h^{1-\beta}(y).$$

Аналогичное неравенство теми же рассуждениями мы получим и при

$$\tau = -\left(h^{\beta}(y) \ln^{1+\alpha} h(y) \right)^{-1}.$$

Таким образом, в условиях леммы 2.1.3 имеет место неравенство

$$|h(xe^{\tau}) - h(x)| < c_1 h^{1-\beta}(x), \tag{1.2.3}$$

где $|\tau| \leqslant \left(h^{\beta}(x) \ln^{1+\alpha} h(x) \right)^{-1}$, $c_1 > 0$ — произвольное постоянное, причем исключаемое множество E от него зависит.

Рассмотрим, наконец, функцию

$$g(x) = \frac{h(x)}{\ln^{\gamma(1+\alpha)} h(x)}, \qquad 0 \leqslant \gamma \leqslant 1.$$

При $x > x_0$, где x_0 достаточно велико, функция $g(x)$ (вместе с $h(x)$) удовлетворяет условиям леммы 2.1.3. Отсюда следует, что вне некоторого множества интервалов, определенного в упомянутой лемме, по теореме о конечных разностях при $\tau=[g(x)\ln^{1+\alpha}g(x)]^{-1}$ имеет место соотношение

$$c_0>g(xe^{\tau})-g(x)=\frac{h(xe^{\tau})}{\ln^{\gamma(1+\alpha)}h(xe^{\tau})}-\frac{h(x)}{\ln^{\gamma(1+\alpha)}h(x)}\geqslant$$

$$\geqslant\left[\frac{1}{\ln^{\gamma(1+\alpha)}h(xe^{\tau})}-\frac{(1+\alpha)\gamma}{\ln^{\gamma(1+\alpha)+1}h(x)}\right][h(xe^{\tau})-h(x)]. \qquad (2.2.3)$$

На основании леммы 2.1.3 мы найдем:

$$\frac{1}{\ln^{\gamma(1+\alpha)}h(xe^{\tau})}-\frac{(1+\alpha)\gamma}{\ln^{\gamma(1+\alpha)+1}h(x)}\geqslant\frac{1}{\ln^{\gamma(1+\alpha)}h(x)+\tilde{c}}-\frac{(1+\alpha)\gamma}{\ln^{\gamma(1+\alpha)+1}h(x)}=$$

$$=\left(1+o(1)\right)\frac{1}{\ln^{\gamma(1+\alpha)}h(x)}\geqslant\frac{1}{2\ln^{\gamma(1+\alpha)}h(x)},$$

если $x>x_0$; $x\notin E$. Далее, при $x>x_0$

$$\tau=\frac{1}{g(x)\ln^{1+\alpha}g(x)}=\frac{\ln^{\gamma(1+\alpha)}h(x)}{h(x)\left[\ln h(x)-(1+\alpha)\gamma\ln\ln h(x)\right]^{1+\alpha}}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{h(x)\ln^{(1-\gamma)(1+\alpha)}h(x)}.$$

Из неравенства (2.2.3) теперь вытекает, что при

$$0\leqslant\tau\leqslant\left[h(x)\ln^{\gamma(1+\alpha)}h(x)\right]^{-1}; \qquad x\notin E,$$

справедливо соотношение

$$h(xe^{\tau})-h(x)\leqslant c_1\ln^{(1-\gamma)(1+\alpha)}h(x), \qquad (3.2.3)$$

где $c_1>0$ — некоторая постоянная. Аналогичное неравенство этим же путем мы найдем и при

$$0\geqslant\tau\geqslant-\left[h(x)\ln^{\gamma(1+\alpha)}h(x)\right]^{-1}.$$

Комбинируя неравенства (1.2.3) и (3.2.3), мы приходим к следующему предложению.

Лемма 1.2.3. *Пусть $h(x)$ — неубывающая функция и непрерывная справа на луче $x>0$, причем $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=\infty$. Всюду на луче $x>0$ за исключением, быть может, некоторого множества E интервалов конечной логарифмической меры (число исключаемых интервалов на каждом ограниченном отрезке конечно) при*

$$|\tau|\leqslant\left[h^{\beta}(x)\ln^{\gamma(1+\alpha)}h(x)\right]^{-1}; \qquad 0\leqslant\gamma\leqslant1; \qquad 0<\alpha, \quad \beta\leqslant1$$

имеет место неравенство

$$\left|h(xe^{\tau})-h(x)\right|<h^{1-\beta}(x)\ln^{(1-\gamma)(1+\alpha)}h(x).$$

Множество E зависит от чисел α, β и γ.

Примечание. Р. Неванлинна в ходе доказательства выше приведенной своей леммы показал, что мера исключаемого в этой лемме множества E не превосходит числа

$$\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{\infty}\varphi(t)\,dt,$$

где $t_0=h(x_0)$.

Если проследить за нашими рассуждениями, то нетрудно заметить, что логарифмическая мера исключаемого согласно лемме 1.2.3 множества E не превосходит числа

$$3\left[\frac{1}{h(x_0)\ln^{1+\alpha'} h(x_0)}+\int\limits_{h(x_0)}^{\infty}\frac{dt}{t\ln^{1+\alpha'} t}\right]<\frac{6}{\alpha'}\;\frac{1}{\ln^{\alpha'} h(x_0)}\left(\alpha'=\frac{\alpha}{2}\right),$$

причем x_0 число такое, что $h(x_0)>e^2$. Эти рассуждения приводят к следующему замечанию.

Пусть нам дано множество функций $\{h(x)\}$, каждая из которых удовлетворяет условиям леммы 1.2.3. Пусть, далее, в точке $x=x_0$ для всякой функции множества $h(x)$ имеет место оценка $h(x_0)>e^2$. В этих условиях мы можем для каждой функции рассматриваемого множества написать неравенство леммы 1.2.3, причем последнее может оказаться неверным на некотором множестве интервалов, логарифмическая мера которого оказывается не превосходящим числа $\frac{6}{\alpha'\ln^{\alpha'} h(x_0)}$. Если число α считать постоянным для всего изучаемого класса функций, то сказанное выше означает, что множество логарифмических мер, соответственно исключаемых множеств, ограничено в рассматриваемом множестве функций числом $\frac{6}{\alpha'\ln^{\alpha'} h(x_0)}$.

§ 4. Способ исчерпания пространства

1.4. Для последующего мы должны ограничить способ исчерпания n-мерного ($n\geqslant 2$) комплексного пространстра C^n семействами круговых областей. Круговой замкнутой гиперповерхности S мы сопоставляем гиперповерхность в „абсолютном октанте" пространства переменных $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$; $|z_j|=r_j$; $j=1, 2, \ldots, n$, которую обозначаем через σ.

Пусть $\overline{H}$ есть граница Шилова на гиперповерхности S в классе целых функций (т. е. $\overline{H}$ есть минимальное множество точек на S, в котором достигается максимум модуля произвольной целой функции), а H — соответствующее множество модулей из $\overline{H}$ на гиперповерхности σ. Пусть, далее, существует число $\tau_0>0$ и множество точек H_0 на гиперповерхности σ такие, что если точка $(r_1^0, r_2^0, \ldots, r_n^0)\in H$ с $r_1^0\cdot r_2^0\cdot\ldots\cdot r_n^0>0$, то проекция любой точки $(r_1^0 e^{a_1\tau_1}, r_2^0 e^{a_2\tau_2}, \ldots, r_n^0 e^{a_n\tau_n})$ с постоянными $a_j>0$, $j=1, 2, \ldots, n$ на гиперповерхность σ при всех действительных τ_j таких, что $|\tau_j|<\tau_0$; $j=1, 2, \ldots, n$ принадлежит H_0; очевидно $H\subseteq H_0$.

Примечание. Числа $a_j>0$ мы вводим здесь, имея ввиду последующее применение гиперповерхностей S и σ.

Предположим теперь, что в любой точке множества H_0 можно провести касательную плоскость к гиперповерхности σ, причем эта плоскость непрерывно меняется в H_0. Гиперповерхность σ в сделанных предположениях можно в некоторой окрестности точки $(r_1^0, r_2^0, \ldots, r_n^0)$, $r_1^0\cdot r_2^0\cdot\ldots\cdot r_n^0>0$ аналитически выразить системой равенств:

$$r_j=\rho_j(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1})=\rho_j(u);\qquad j=1, 2, \ldots, n; \tag{1.1.4}$$
$$u=(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}),$$

определенных в некоторой области Δ_0, содержащей точку $A_0(u_1^0, u_2^0, \ldots, u_{n-1}^0)$, соответствующую точке $(r_1^0, r_2^0, \ldots, r_n^0)$. Притом, возможна параметризация, при которой в точке A_0 существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial\rho_j}{\partial u_k}$; $j=1, 2, \ldots, n$; $k=1, 2, \ldots, n-1$. Введем в рассмотрение два определителя:

$$D(u)=\begin{vmatrix} a_1\rho_1 & a_2\rho_2 & \ldots & a_n\rho_n \\ \frac{\partial\rho_1}{\partial u_1} & \frac{\partial\rho_2}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial\rho_n}{\partial u_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\rho_1}{\partial u_{n-1}} & \frac{\partial\rho_2}{\partial u_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial\rho_n}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

и*) (2.1.4)

$$D_0(u, u_0)=\begin{vmatrix} \rho_1\ln\frac{\rho_1(u)}{\rho_1(u_0)} & \rho_2\ln\frac{\rho_2(u)}{\rho_2(u_0)} & \ldots & \rho_n\ln\frac{\rho_n(u)}{\rho_n(u_0)} \\ \frac{\partial\rho_1}{\partial u_1} & \frac{\partial\rho_2}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial\rho_n}{\partial u_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\rho_1}{\partial u_{n-1}} & \frac{\partial\rho_2}{\partial u_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial\rho_n}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Относительно множества точек H_0 мы предполагаем выполненными следующие условия.

1. *H_0 есть гладкое множество (в описанном выше смысле).*

2. *Пусть $\left(\rho_1(u), \rho_2(u), \ldots, \rho_n(u)\right)\in H$, а $\left(\rho_1(u_0), \rho_2(u_0), \ldots, \rho_n(u_0)\right)$ — проекция на гиперповерхность σ произвольной точки гиперпараллелепипеда, образованного точками $(r_1e^{a_1\tau_1}, r_2e^{a_2\tau_2}, \ldots, r_ne^{a_n\tau_n})$, где $|\tau_j|\leqslant\tau\leqslant\tau_0$, $r_j=\rho_j(u)$; $j=1, 2, \ldots, n$. Тогда*

$$\left|\frac{D_0(u, u_0)}{D(u)}\right|<A\tau^{1+\delta}, \tag{3.1.4}$$

где $A>0$, $\delta>0$ — некоторые постоянные, которые от индивидуальной точки множества H не зависят.

3. *Множество $H_{0j_1j_2\ldots j_m}$ (аналогичное H_0), построенное для следа $H_{j_1j_2\ldots j_m}$ множества H на следе $\sigma_{j_1j_2\ldots j_m}$ гиперповерхности σ в подпространстве $r_{j_1j_2}, \ldots, r_{j_m}$ либо пусто (вместе с $H_{j_1j_2\ldots j_m}$), либо удовлетворяет в этом подпространстве условиям 1 и 2.*

(С л е д о м $F_{j_1j_2\ldots j_m}$ множества F пространства $r_1, r_2, \ldots, r_n$) в подпространстве переменных $r_{j_1}, r_{j_2}, \ldots, r_{j_m}$ мы называем те точки множества F, у которых каждая координата $r_{j'_q}=0$; $j'_q\neq j_p$; $p=1, 2, \ldots, m$, $q=1, 2, \ldots, n-m$. Чтобы записать условие 2 для следа $H_{j_1j_2\ldots j_m}$, надо аналитически выразить последнее множество параметрически в пространстве переменных $r_{j_1}, r_{j_2}, \ldots, r_{j_m}$, далее образовать соответствующие определители $D_{j_1j_2\ldots j_m}(u)$ и $D_{0j_1j_2\ldots j_m}(u, u_0)$, а затем потребовать выполнения той же оценки (3.1.4) для модуля отношения этих определителей.)

Класс гиперповерхностей S, которым соответствует класс гиперповерхностей σ, удовлетворяющих вышеприведенным трем условиям, мы обозначаем через $\Sigma(a_1, a_2, \ldots, a_n, \delta)$; числа a_j в скобках означают множители в элементах первой строки определителя $D(u)$, δ — слагаемое в показателе степени оценки условия 2.

*) Функции, которые в $D(u)$ и $D_0(u, u_0)$ написаны без указания зависимости, зависят только от u.

Убедимся в корректности условия 2. Для этого заметим, что отношение $\frac{D_0(u, u_0)}{D(u)}$ не зависит от параметризации окрестности Δ_0. Точнее это означает следующее. Произведем замену с помощью системы уравнений

$$u_j = u_j(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}); \qquad j=1, 2, \ldots, n-1,$$

отображающей область Δ_0' взаимно однозначно на область Δ_0, причем все функции $u_j(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$ непрерывно дифференцируемы и якобиан $J=\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}{\partial(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})} \neq 0$ в Δ_0'. Отношение $\frac{D_0(u, u_0)}{D(u)}$ инвариантно относительно замен описанного типа. Действительно, обозначая через A_j алгебраическое дополнение к j-му элементу $a_j\rho_j$ первой строки определителя $D(u)$, найдем, что

$$\left(\frac{D_0(u, u_0)}{D(u)}\right)^{-1} = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j \rho_j A_j}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j \ln \frac{\rho_j}{\rho_j(u_0)} A_j}. \tag{4.1.4}$$

Но

$$A_j = (-1)^{j+1} \begin{vmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial \rho_{j-1}}{\partial u_1} & \frac{\partial \rho_{j+1}}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial \rho_n}{\partial u_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial u_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial \rho_{j-1}}{\partial u_{n-1}} & \frac{\partial \rho_{j+1}}{\partial u_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial \rho_n}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{j+1} J^{-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial v_1} & \ldots & \frac{\partial \rho_{j-1}}{\partial v_1} & \frac{\partial \rho_{j+1}}{\partial v_1} & \ldots & \frac{\partial \rho_n}{\partial v_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial v_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial \rho_{j-1}}{\partial v_{n-1}} & \frac{\partial \rho_{j+1}}{\partial v_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial \rho_n}{\partial v_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Подставив это выражение в (4.1.4), получим:

$$\frac{D_0(u, u_0)}{D(u)} = \frac{D_0(v, v_0)}{D(v)}.$$

Отношение $\frac{D_0(u, u_0)}{D(u)}$, как легко видеть, также инвариантно относительно перестановок индексов.

Как мы увидим ниже, основные оценки (п.2.5) проводятся при $\tau_0 < 1$ и существенно зависят от δ только при $0 < \delta \leqslant 1$ и совершенно от δ не зависят при $\delta > 1$. Так как еще $\Sigma(a_1, a_2, \delta) \subseteq \Sigma(a_1, a_2, 1)$, $\delta > 1$, то, не ограничивая общности, в дальнейшем будем всегда считать

$$0 < \delta \leqslant 1. \tag{5.1.4}$$

Мы этого особо оговаривать не будем.

2.4. Мы сейчас приведем один признак, который позволяет иногда легко проверить выполнение условий предыдущего пункта.

Отметим сначала, что множество H — совокупность точек на σ, соответствующее границе Шилова на S, может быть задано любым из следующих уравнений:

$$r_j = \rho_j(r_1, r_2, \ldots, r_{j-1}, r_{j+1}, \ldots, r_n), \tag{1.2.4}$$

где функции ρ_j — однозначные функции, определенные на соответствующих множествах F_j. Покажем это.

Всякая прямая $r_p = c_p$; $p \neq j$, $p = 1, 2, \ldots, n$, где $c_p = \text{const}$, не может иметь более чем одну общую точку со множеством H, так как при $r_j' > r_j''$ для всякой целой функции $f(z_1, z_2, \ldots, z_n) \not\equiv \text{const}$

$$\max_{\substack{|z_p| = c_p;\, p \neq j \\ |z_j| = r_j'}} |f(z_1, z_2, \ldots, z_n)| > \max_{\substack{|z_p| = c_p;\, p \neq j \\ |z_j| = r_j''}} |f(z_1, z_2, \ldots, z_n)| \qquad (2.2.4)$$

и, следовательно, точка $(c_1, c_2, \ldots, c_{j-1}, r_j'', c_{j+1}, \ldots, c_n) \notin H$. Неравенство (2.2.4) также показывает, что любая кривая

$$r_j = \rho_j(c_1, c_2, \ldots, r_q, \ldots, c_n), \qquad (3.2.4)$$

при постоянных $r_p = c_p$; $p \neq q$ убывающая (или состоит из одной точки).

Пусть точки $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ и $(r_1', r_2', \ldots, r_n')$ принадлежат множеству H и различны. Невозможно, чтобы при всех j: $j = 1, 2, \ldots, n$ было $r_j \leqslant r$ (или $r_j' \leqslant r_j$). Предположим для определенности, что это не так и что $r_j \leqslant r_j'$. Какая бы ни была целая функция $f(z_1, z_2, \ldots, z_n) \not\equiv \text{const}$

$$\max_{\substack{|z_1| = r_1, \\ \cdots\cdots \\ |z_n| = r_n,}} |f(z_1, z_2, \ldots, z_n)| < \max_{\substack{|z_1| = r_1'; \\ \cdots\cdots \\ |z_n| = r_n'}} |f(z_1, z_2, \ldots, z_n)| \qquad (4.2.4)$$

(для справедливости этого неравенства мы учитываем, что рассматриваемые точки – различные). Неравенство (4.2.4) показывает, что в нашем предположении $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \notin H$. Но это противоречит условию. Отсюда вытекает, что существует хотя бы одна координата r_q такая, что $r_q > r_q'$. Следовательно, если $(r_1^0, r_2^0, \ldots, r_n^0) \in H$, то области $r_j \geqslant r_j^0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ вместе покрывают множество H.

В силу построения множества H_0 (см. п.1.4), его можно считать в открытом подпространстве $r_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ на гиперповерхности σ открытым, состоящим, следовательно, не более, чем из счетного числа компонент Δ_i. В каждой компоненте возьмем по точке $(r_1^{(i)}, r_2^{(i)}, \ldots, r_n^{(i)}) \in H$ и потребуем выполнения следующих условий.

I. *Существует постоянная* $a > 0$ *такая, что* $r_j^{(i)} \geqslant a > 0$ *при всех* j *и* i.

II. *Обозначим через* g_{ij} *область* $r_j \geqslant r_j^{(i)}$, $r_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. *Область* $\Delta_{ij} = \Delta_i \cap g_{ij}$ *определяется однозначной функцией*

$$r_j = \rho_{ji}(r_1, r_2, \ldots, r_{j-1}, r_{j+1}, \ldots, r_n), \qquad (5.2.4$$

имеющей непрерывные и ограниченные в $\bigcup_i \Delta_{ij}$ *частные производные по всем своим переменным, удовлетворяющие в* Δ_{ij} *условию* $Lip\,\delta$ $\Bigl($*очевидно,* $\rho_j \equiv \rho_{ij}$ *в* $H \cap \Bigl(\bigcup_i \Delta_{ij}\Bigr)$; $j = 1, 2, \ldots, n\Bigr)$, т.е.

$$\left| \frac{\partial \rho_{ij}(\tilde{r})}{\partial r_q} - \frac{\partial \rho_{ij}(\tilde{r}^\circ)}{\partial r_q} \right| < N \sum_{k \neq j} |r_k - r_k^0|^\delta; \quad \tilde{r} = (r_1, \ldots, r_{j-1}, r_{j+1}, \ldots, r_n); \quad \tilde{r}^0, \tilde{r} \in \Delta_{ij},$$

где N *от* i *и* j *не зависит.*

III. *Либо следы* $H_{j_1, j_2, \ldots, j_m}$ *и* $H_{0 j_1 j_2 \ldots j_m}$; $m \geqslant 2$ *пустые множества, либо последние обладают в подпространстве* $(r_{j_1}, r_{j_2}, \ldots, r_{j_m})$ *свойствами* I *и* II. *Соответствующие функции для* r_{j_p} *в* (5.2.4) *в этом случае получаются из функций* (5.2.4), *указанных в условии* II, *если в них положить* $r_{j_q'} = 0$; $j_q' \neq j_p$; $p = 1, 2, \ldots, m$, $q = 1, 2, \ldots, n - m$.

Заметим, что независимость N от i, j всегда имеет место, если H состоит из конечного числа компонент.

Если условия I, II *и* III *выполнены, то также выполнены условия* 1, 2 *и* 3 *предыдущего* п.1.4.

Доказательство. Легко убедиться в том, что проверке подлежит только условие 2 п.1.4. Пусть $(r_1^{(i)}, r_2^{(i)}, \ldots, r_n^{(i)}) \in H$ и $r_j \geqslant r_j^{(i)}$. В силу убывания функции (3.2.4) $\frac{\partial \rho_j}{\partial r_q} = \frac{\partial \rho_{ij}}{\partial r_q} \leqslant 0$ на H, $q=1, 2, \ldots, n$; $q \neq j$. В наших предположениях имеем в Δ_{in} (выбор индекса n, очевидно, не ограничивает общности):

$$D(\bar r) = \begin{vmatrix} a_1 r_1 & a_2 r_2 & \ldots & a_{n-1} r_{n-1} & a_n \rho_{ni}(\bar r) \\ 1 & 0 & & 0 & \frac{\partial \rho_{ni}(\bar r)}{\partial r_1} \\ 0 & 1 & & 0 & \frac{\partial \rho_{ni}(\bar r)}{\partial r_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \frac{\partial \rho_{ni}(\bar r)}{\partial r_{n-1}} \end{vmatrix} =$$

$$= \pm\left(a_n \rho_{ni} - \sum_{p=1}^{n-1} a_p r_p \frac{\partial \rho_{ni}}{\partial r_p}\right); \quad |D(\bar r)| \geqslant a_n r_n^{(i)} > a_n a > 0. \qquad (6.2.4)$$

Далее, если $(r_{10}^{(i)}, r_{20}^{(i)}, \ldots, r_{n0}^{(i)}) \in \Delta_{in}$ и $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \Delta_{in} \cap H$, то

$$D_0(\bar r, \bar r_0^{(i)}) = \begin{vmatrix} r_1 \ln \frac{r_1}{r_{10}^{(i)}} & r_2 \ln \frac{r_2}{r_{20}^{(i)}} & \ldots & r_{n-1} \ln \frac{r_{n-1}}{r_{n-10}^{(i)}} & \rho_{ni}(\bar r) \ln \frac{\rho_{ni}(\bar r)}{\rho_{ni}(r_0^{(i)})} \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial \rho_{ni}(\bar r)}{\partial r_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \frac{\partial \rho_{ni}(\bar r)}{\partial r_{n-1}} \end{vmatrix} =$$

$$= \pm\left(\rho_{ni}(\bar r) \ln \frac{\rho_{ni}(\bar r)}{\rho_{ni}(\bar r_0^{(i)})} - \sum_{p=1}^{n-1} r_p \ln \frac{r_p}{r_{p0}^{(i)}} \frac{\partial \rho_{ni}(\bar r)}{\partial r_p}\right). \qquad (7.2.4)$$

По теореме о конечных разностях отсюда вытекает:

$$D_0(\bar r, \bar r_0^{(i)}) = \pm\left[\frac{\rho_{ni}(\bar r)}{\rho_{ni}(\bar{\bar r})} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\partial \rho_{ni}(\bar{\bar r})}{\partial r_p}(r_p - r_{p0}^{(i)}) - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{r_p}{\bar{\bar r}_p} \frac{\partial \rho_{ni}(\bar r)}{\partial r_p}(r_p - r_{p0}^{(i)})\right], \quad (8.2.4)$$

где $\bar{\bar r}_p$ есть точка в интервале $(r_p, r_{p0}^{(i)})$. Так как для проверки условия 2 п.1.4 должно быть $r_{p0}^{(i)} = r_p e^{a_p \tau_p}$, $p=1, 2, \ldots, n-1$, то $\bar{\bar r}_p = r_p e^{a_p \bar\tau_p}$, где $|\bar\tau_p| < |\tau_p|$. Кроме того,

$$\rho_{ni}(\bar{\bar r}) = \rho_{ni}(r) - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\partial \rho_{ni}(r')}{\partial r_p}(r_p - \bar{\bar r}_p),$$

где (r') есть точка между $(\bar{\bar r})$ и $(\bar r)$. Поэтому из (8.2.4)

$$|D_0(\bar r, \bar r_0^{(i)})| = \left|\sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{\rho_{ni}(\bar r)}{\rho_{ni}(\bar{\bar r})} \frac{\partial \rho_{ni}(\bar{\bar r})}{\partial r_p} - \frac{r_p}{\bar{\bar r}_p} \frac{\partial \rho_{ni}(\bar r)}{\partial r_p}\right)(r_p - r_{p0}^{(i)})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=1}^{n-1}\left|\frac{\partial \rho_{ni}(\bar{\bar r})}{\partial r_p} - \frac{\partial \rho_{ni}(\bar r)}{\partial r_p}\right| |r_p - r_{p0}^{(i)}| +$$

$$+\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{\rho_{ni}(\bar r)}\sum_{q=1}^{j-1}\left|\frac{\partial\rho_{ni}(r')}{\partial r_p}\right|\,|r_q-\ _q|\,|r_p-r_{p0}^{(i)}|+$$

$$+\sum_{p=1}^{n-1}|1-e^{-a_p\bar\tau_p}|\left|\frac{\partial\rho_{ni}(\tilde r)}{\partial r_p}\right|\,|r_p-r_{p0}^{(i)}|. \tag{9.2.4}$$

Имеем: а) по условию II

$$\sum_{p=1}^{n-1}\left|\frac{\partial\rho_{ni}(\bar{\bar r})}{\partial r_p}-\frac{\partial\rho_{ni}(\tilde r)}{\partial r_p}\right|\,|r_p-r_{p0}^{(i)}|\leqslant N\sum_{q=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{n-1}|r_q-\bar{\bar r}_q|^{\delta}\,|r_p-r_{p0}^{(i)}|$$

и б)

$$|r_p-r_{p0}^{(i)}|=r_p\,|1-e^{a_p\tau_p}|=\Big(1+o(1)\Big)r_p a_p|\tau_p|;$$

$$|r_p-\bar{\bar r}_p|=r_p\,|1-e^{a_p\bar\tau_p}|=\Big(1+o(1)\Big)r_p a_p|\ \bar\tau_*|,$$

причем, так как r_p — точка в интервале $(r_p,\ r_{p0}^{(i)})$, то $|\tau_p|<|\tau_p|$.

Заметив наконец (по условию II), что частные производные ограничены в $\bigcup_i \Delta_{in}$ числом $C>0$, найдем по (9.2.4) а) и б), что при $|\tau_p|<\tau$, где τ достаточно мало,

$$|D_0(\tilde r,\ \tilde r_0^{(i)})|\leqslant N(n-1)^2\tau^{1+\delta}+C(n-1)^2\Big(1+o(1)\Big)\tau^2+$$

$$+\Big(1+o(1)\Big)(n-1)\,C\tau^2\leqslant A'\,\tau^{1+\delta},$$

где A', A'' — const, причем мы пользуемся тем, что a_p, $r_p<C_0=\text{const}$ при всех p. Последняя оценка вместе с (6.2.4) дает теперь (считая $\delta\leqslant 1$)

$$\left|\frac{D_0(\tilde r,\ \tilde r_0^{(i)})}{D(\tilde r)}\right|<A\tau^{1+\delta}. \tag{10.2.4}$$

В частности, если функции $\rho_{ni}(\tilde{\ })$ имеют ограниченные в $\bigcup_i \Delta_{in}$ частные производные второго порядка, то

$$\left|\frac{D_0(r,\ r_0^{(i)})}{D(\tilde r)}\right|<A\tau^2. \tag{11.2.4}$$

На основании условия III мы и для следов $H_{0j_1j_2\ldots j_m}$ в подпространстве переменных r_{j_1}, r_{j_2}, ..., r_{j_n} найдем оценку (11.2.4), повторяя дословно только что проведенные выкладки.

Наше утверждение доказано.

3.4. Рассмотрим несколько примеров.

1. Гиперповерхность

$$r_1^m+r_2^m+\ldots+r_n^m=1$$

при $m\geqslant 2$ удовлетворяет условиям признака в п.2.4 и поэтому удовлетворяет также условиям п.1.4 с $\delta=1$.

2. Рассмотрим гиперповерхность σ, которая выражается уравнением

$$r_1^{m_1}+r_2^{m_2}+\ldots+r_n^{m_n}=1,$$

где

$$0<m_k<1,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ p,\quad \text{а}\quad m_{p+j}\geqslant 1;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-p.$$

Выделим точку $\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{m_1}}}, \frac{1}{n^{\frac{1}{m_2}}}, \dots, \frac{1}{n^{\frac{1}{m_n}}}\right)$. Пусть $r_1 \geqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{m_1}}}$. Положим $r_j = t_j^{\frac{1}{m_j}}$, $j=2, 3, \dots, p$; $r_j = t_j$; $j=p+1, \dots, n$. Гиперповерхность σ в новых параметрах выражается следующей системой равенств:

$$\begin{cases} r_1 = (1 - t_2 - \dots - t_p - t_{p+1}^{m_{p+1}} - \dots - t_n^{m_n})^{\frac{1}{m_1}}; \\ r_j = t_j^{\frac{1}{m_j}}; \quad j=2, 3, \dots, p, \\ r_j = t_j; \quad j=p+1, \dots, n. \end{cases}$$

Надлежит проверить выполнение неравенства (3.1.4) (условие 1 п.1.4 здесь выполнено автоматически; условие 3 п.1.4 также будет удовлетворено, если будет удовлетворено условие 2 п.1.4, так как след $\sigma_{j_1 j_2 \dots j_q}$ есть гиперповерхность

$$r_{j_1}^{m_{j_1}} + r_{j_2}^{m_{j_2}} + \dots + r_{j_q}^{m_{j_q}} = 1,$$

т. е. такая же гиперповерхность в подпространстве $(r_{j_1}, r_{j_2}, \dots, r_{j_q})$, как рассматриваемая во всем пространстве). Имеем:

$$\frac{D_0(t, t_0)}{D(t)} = \frac{\begin{vmatrix} r_1(t) \ln \frac{r_1(t)}{r_1(t_0)} & \frac{1}{m_2} t_2^{\frac{1}{m_2}} \ln \frac{t_2}{t_2^0} & \dots & \frac{t_p^{\frac{1}{m_p}}}{m_p} \ln \frac{t_p}{t_p^0} & t_{p+1} \ln \frac{t_{p+1}}{t_{p+1}^0} & \dots & t_n \ln \frac{t_n}{t_n^0} \\ \frac{\partial r_1(t)}{\partial t_2} & \frac{1}{m_2} t_2^{\frac{1}{m_2}-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial r_1(t)}{\partial t_n} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 r_1(t) & a_2 t_2^{\frac{1}{m_2}} & & a_p t_p^{\frac{1}{m_p}} & a_{p+1} t_{p+1} & \dots & a_n t_n \\ \frac{\partial r_1(t)}{\partial t_2} & \frac{1}{m_2} t_2^{\frac{1}{m_2}-1} & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial r_1(t)}{\partial t_n} & 0 & & 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix}},$$

при этом

$$r_1(t) = (1 - t_1 - \dots - t_p - t_{p+1}^{m_{p+1}} - \dots - t_n)^{\frac{1}{m_1}}$$

и

$$\frac{\partial r_1}{\partial t_j} = \frac{r_1^{1-m_1}(t)}{m_1}, \qquad j=2, 3, \dots, p;$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial t_j} = -\frac{m_j}{m_1} t_j^{m_j-1} r_1^{1-m_1}(t); \qquad j=p+1, \dots, n.$$

Вынеся за знаки определителей в числителе и знаменателе произведение

$$r_1^{1-m_1}(t)\, t_2^{\frac{1}{m}-1} \quad \dots, \quad t_p^{\frac{1}{m_p}-1},$$

получим:

$$\frac{D_0(t,t_0)}{D(t)}=\frac{\begin{vmatrix} r_1^{m_1}(t)\ln\frac{r_1(t)}{r_1(t_0)} & \frac{1}{m_2}t_2\ln\frac{t_2}{t_2^0} & \ldots & \frac{t_p}{m_p}\ln\frac{t_p}{t_p^0} & t_{p+1}\ln\frac{t_{p+1}}{t_{p+1}^0} & \ldots & t_n\ln\frac{t_n}{t_n^0} \\ -\frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_2} & & 0 & 0 & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{1}{m_1} & 0 & & \frac{1}{m_p} & 0 & & 0 \\ -\frac{m_{p+1}}{m_1}t_{p+1}^{m_p-1} & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{m_n}{m_1}t_n^{m_n-1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 r_1^{m_1}(t) & \frac{a_2}{m_2}t_2 & & \frac{a_p}{m_p}t_p & a_{p+1}t_{p+1} & & a_n t_n \\ -\frac{1}{m_2} & \frac{1}{m_2} & & 0 & 0 & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{1}{m_p} & 0 & & \frac{1}{m_p} & 0 & & 0 \\ -\frac{m_{p+1}}{m_1}t_{p+1}^{m_{p+1}-1} & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{m_n}{m_1}t_n^{m_n-1} & 0 & & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}}$$

Числитель и знаменатель в последнем отношении ничем существенным не отличаются от определителей (6.2.4) и (7.2.4) и оцениваются точно также, как в п.2.4. Так как $r_1 \geqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{m_1}}}$, то $r_1(t)$ имеет вторые непрерывные производные по всем переменным, так что $\delta = 1$ и

$$\left|\frac{D_0(t,\ t_0)}{D(t)}\right| < A\tau^2$$

при $r_j^0 = r_j e^{a_j \tau_j}$; $|\tau_j| \leqslant \tau$; $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Этот пример показывает, что требование $\frac{\partial r_1}{\partial t_j} \in Lip\,\delta$ не является необходимым для оценки (3.1.4).

3. Гиперповерхность σ ограничивает множество точек, которое есть теоретическая сумма точек гипершара $\sum_{j=1}^{n}(r_j-1)^2 \leqslant a^2$, $a<\frac{1}{2}$ и точек гиперкуба $r_j \leqslant 1$; $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Нетрудно видеть, что множество H совпадает с той частью гиперсферы $\sum_{j=1}^{n}(r_j-1)^2=a^2$, где $r_j \geqslant 1$; $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. В качестве множества H_0 можно выбрать часть той же гиперсферы, где $r_j = 1+\vartheta a$; $\vartheta > 0$ — произвольное (достаточно малое) число. Легко проверить, что к нашей гиперповерхности применим признак, изложенный в п.2.4 (условие 3 п.1.4 выполняется в силу пустоты следов $H_{j_1 j_2 \ldots j_m}$).

4. Рассмотрим поверхность А. А. Темлякова:

$$\begin{cases} r_1=\rho_1(t); & 0\leqslant t\leqslant 1; \\ r_2=\rho_2(t), & \rho_1(0)=0, \quad \rho_1(1)<\infty; \quad 0<\rho_1'(t)<t^{-1}\rho_1(t); \end{cases}$$

$$\rho_2(t)=\exp\left\{-\int_0^t \frac{\tau}{1-\tau}\,d\ln\rho_1(\tau)\right\}.$$

Функцию $\rho_1(t)$ считаем непрерывно дифференцируемой на отрезке $0\leqslant t\leqslant 1$. Условия 1 и 3 п.1.4 здесь выполнены автоматически. В проверке нуждается условие 2. Имеем:

$$\rho_2'(t)=-\frac{t}{1-t}\,\frac{\rho_1'(t)}{\rho_1(t)}\,\rho_2(t);$$

$$\frac{D_0(t_1\ t_0)}{D(t)}=\frac{\begin{vmatrix} \rho_1(t)\ln\dfrac{\rho_1(t)}{\rho_1(t_0)} & \rho_2(t)\ln\dfrac{\rho_2(t)}{\rho_2(t_1)} \\ \rho_1'(t) & -\dfrac{t}{1-t}\,\dfrac{\rho_1'(t)}{\rho_1(t)}\,\rho_2(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1\rho_1(t) & a_2\rho_2(t) \\ \rho_1'(t) & -\dfrac{t}{1-t}\,\dfrac{\rho_1'(t)}{\rho_1(t)}\,\rho_2(t)\end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{t\ln\dfrac{\rho_1(t)}{\rho_1(t_0)}+(1-t)\ln\dfrac{\rho_2(t)}{\rho_2(t_0)}}{a_1 t+a_2(1-t)};$$

$$\left|\frac{D_0(t,\ t_0)}{D(t)}\right|\leqslant\frac{\left|t\ln\dfrac{\rho_1(t)}{\rho_1(t_0)}+(1-t)\ln\dfrac{\rho_2(t)}{\rho_2(t_0)}\right|}{a},$$

где $a=\min(a_1,\ a_2)$. Далее,

$$\ln\frac{\rho_2(t)}{\rho_2(t_0)}=-\int_{t_0}^t\frac{u}{1-u}\,d\ln\rho_1(u);\quad \ln\frac{\rho_1(t)}{\rho_1(t_0)}=\int_{t_0}^t d\ln\rho_1(u).$$

Таким образом, при $t\leqslant\frac{1}{2}$

$$\left|t\ln\frac{\rho_1(t)}{\rho_1(t_0)}+(1-t)\ln\frac{\rho_2(t)}{\rho_2(t_0)}\right|=\left|\int_{t_0}^t\frac{t(1-u)-(1-t)u}{1-u}\,\frac{\rho_1'(u)}{\rho_1(u)}\,du\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\,|t-t_0|\ln\frac{\rho_1(t)}{\rho_1(t_0)}.$$

Если $\rho_1(t_0)=\rho_1(t)e^{a_1\tau}$, то $\rho_1(t)-\rho_1'(\bar t)(t-t_0)=\rho_1(t)e^{a_1\tau}$, где $\bar t$ — число между t и t_0. Так как, далее, функция $\rho_1'(t)>0$ в сегменте $0\leqslant t\leqslant 1$, то при достаточно малом τ: $|\tau|\leqslant r_0$, $|t-t_0|<c\tau$ ($c>0$ — постоянная, от t не зависящая). Таким образом, при $t_1\leqslant\frac{1}{2}$; $\frac{\rho_1(t_0)}{\rho_1(t)}=e^{a_1\tau}$; $|\tau|\leqslant\tau_0$

$$\left|\frac{D_0(t,\ t_0)}{D(t)}\right|<A\tau^2.$$

Случай $t>\frac{1}{2}$ приводит к той же оценке, если исходить из функции $\rho_2(t)$.

5. Рассмотрим кривую σ, заданную уравнениями:

$$\begin{cases} r_1=t; \\ r_2=A\left(t-\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}+B\left(t-\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{3}}+C, & 0\leqslant t\leqslant 1; \end{cases}$$

где A, B и C удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}} A + \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{3}} B + C = 1; \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}} A + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{3}} B + C = 0. \end{cases}$$

Отсюда $C = \frac{1}{2}$, а коэффициенты A и B можно выбрать отрицательными. Положив $t_0 - \frac{1}{2} = \tau$ и $t = \frac{1}{2}$, найдем:

$$\frac{D_0\left(\frac{1}{2},\ t_0\right)}{D\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2t_0} & C\ln\frac{C}{A\tau^{\frac{5}{3}} + B\tau^{\frac{7}{3}} + C} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{2}a_1 & Ca_2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} =$$

$$= +a_2^{-1}\left[\ln\left(C + A\tau^{\frac{5}{3}} + B\tau^{\frac{7}{3}}\right) - \ln C\right] = \frac{1}{a_2}\ln\left(1 + \frac{A}{C}\tau^{\frac{5}{3}} + \frac{B}{C}\tau^{\frac{7}{3}}\right).$$

Таким образом, при $|\tau| \leqslant \tau_0$, где τ_0 — достаточно мало,

$$\left| \frac{D_0\left(\frac{1}{2},\ t_0\right)}{D\left(\frac{1}{2}\right)} \right| < A_0 |\tau|^{\frac{5}{3}},$$

$A_0 > 0$ — некоторая постоянная.

(Заметим, что если $2t_0 = e^{\tau}$, то $\left|t_0 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}|e^{\tau} - 1| < |\tau|$, где $|\tau|$ — достаточно мало.)

Нетрудно проверить, что $H_0 = H = \sigma$, и что, если $\frac{t_0}{t} = e^{\tau}$, $|\tau| < \tau_0$, то

$$\left|\frac{D_0(t,\ t_0)}{D(t)}\right| < A|\tau|^{\frac{5}{3}},$$

где $A > 0$ — постоянная, которая от t не зависит.

4.4. Пусть $V(R) = V(R,\ a_1,\ \ldots,\ a_n)$ есть семейство параболически подобных круговых областей, исчерпывающее пространство C^n при $R \to \infty$, а $S(R) = S(R,\ a_1,\ \ldots,\ a_n)$ — соответствующее ему семейство ограничивающих гиперповерхностей. Покажем сейчас, что если $\tilde{H}(1)$ есть граница Шилова в классе целых функций на гиперповерхности семейства $S(1)$, то $\tilde{H}(R)$ — граница Шилова в том же классе функций на гиперповерхности $S(R)$ — состоит из тех и только из тех точек $(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)$, для которых

$$\left(\frac{z_1}{R^{a_1}},\ \frac{z_2}{R^{a_2}},\ \ldots,\ \frac{z_n}{R^{a_n}}\right) \in \tilde{H}(1).$$

В самом деле, пусть $f(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n) \not\equiv \text{const}$ — целая функция и

$$M(R) = |f(\zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots,\ \zeta_n)| = \max_{S(R)} |f(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)| =$$

$$= \max_{\tilde{H}(R)} |f(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z)|. \qquad (1.4.4)$$

Тогда

$$M(R)=\left|f\left(R^{a_1}\frac{\zeta_1}{R^{a_1}},\ R^{a_2}\frac{\zeta_2}{R^{a_2}},\ \ldots,\ R^{a_n}\frac{\zeta_n}{R^{a_n}}\right)\right|=$$

$$=\max_{S(1)}\left|f(R^{a_1}z_1, R^{a_2}z_2, \ldots, R^{a_n}z_n)\right|=\max_{\tilde H(1)}\left|f(R^{a_1}z_1, R^{a_2}z_2, \ldots, R^{a_n}z_n)\right|. \qquad (2.4.4)$$

Последнее равенство, если его читать также справа на лево, вместе с равенством (1.4.4) доказывает наше утверждение, так как функция $f(R^{a_1}z_1, R^{a_2}z_2, \ldots, R^{a_n}z_n)$ при постоянном R — целая вместе с функцией $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

5.4. Пусть $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — целая трансцендентная функция. Рассмотрим исчерпание пространства C^n, описанного в предыдущем п.4.4. Полагаем попрежнему,

$$M(R)=M(R, a_1, \ldots, a_n, f)=M(R, f)=\max_{S(R)}|f(z_1, z_2, \ldots, z_n)|.$$

Число

$$\rho=\rho(a_1, a_2, \ldots, a_n)=\overline{\lim_{R\to\infty}}\frac{\ln\ln M(R)}{\ln R}$$

(или ∞) мы называем порядком функции $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ в параболическом направлении $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Мы сейчас покажем, что число ρ *зависит только от чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *и не зависит от конкретного способа исчерпания пространства семействами параболически подобных круговых областей (при постоянных* $a_1, a_2, \ldots, a_n$*)* (см. [15]).

Для доказательства этого мы наряду с семейством областей $S(R)=S(R, a_1, \ldots, a_n)$ введем в рассмотрение также семейство областей $|z_j|<R^{a_j}$; $j=1, 2, \ldots, n$; через $\tilde S(R)$ мы обозначаем полицилиндр $|z_j|=R^{a_j}$, $j=1, \ldots, n$. Пусть $H(1)$ — граница Шилова в классе целых функций на гиперповерхности $S(1)$, $d>0$ — расстояние начала координат до множества $H(1)$, а $\bar d>0$ — наибольшее из расстояний между началом координат и точками множества $H(1)$. Легко видеть, что

$$M_{\tilde S}\left(\frac{d}{2}\right)=\max_{\tilde S\left(\frac{d}{2}\right)}|f(z_1, \ldots, z_n)|\leqslant\max_{H(1)}|f(z_1, \ldots, z_n)|=M_S(1)\leqslant$$

$$\leqslant\max_{\tilde S(2\bar d)}|f(z_1, z_2, \ldots, z_n)|=M_{\tilde S}(2\bar d),$$

и поэтому на основании того, что

$$\max_{\bar S(R)}|f(z_1, z_2, \ldots, z_n)|=\max_{\bar S(1)}|f(R^{a_1}z_1, R^{a_2}z_2, \ldots, R^{a_n}z_n)|,$$

где $\bar S(R)$ либо совпадает с $S(R)$, либо с $\tilde S(R)$,

$$M_{\tilde S}\left(\frac{d}{2}R\right)\leqslant M_S(R)\leqslant M_{\tilde S}(2\bar dR), \qquad (2.5.4)$$

что и доказывает наше утверждение.

Убедимся теперь в том, что при исчерпании пространства произвольным семейством параболически подобных круговых областей, всегда

$$\underline{\lim_{R\to\infty}}\frac{\ln M(R)}{\ln R}=\infty. \qquad (3.5.4)$$

Для этого рассмотрим исчерпание пространства семейством полицилиндров $\tilde{V}(R)$ с ограничивающими их гиперповерхностями $\tilde{S}(R, a_1, \ldots, a_n)$. Предположим, вопреки нашему утверждению, что существует последовательность точек $\{R_j\}$, $R_j\uparrow\infty$, такая, что

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln M(R_j)}{\ln R_j} = c < \infty. \qquad (4.5.4)$$

Это означает, что $M(R_j) = R_j^{(1+o(1))}$, где $o(1)\to 0$ при $j\to\infty$. На гиперповерхности $\tilde{S}(R_j)$ максимум функции $|f(z_1, z_2, \ldots, z_n)|$ достигается в точке $(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0)$, причем $|z_k^0| = R_j^{a_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому справедлива по теореме Коши следующая оценка для коэффициентов ряда Тейлора

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{i_1+\ldots+i_n=0}^{\infty} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n}:$$

$$|a_{i_1 i_2 \ldots i_n}| \leqslant \frac{M_{\tilde{S}}(R)}{R_j^{a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_n i_n}}.$$

При i_k таких, что $\sum_{k=0}^{1} a_k i_k \geqslant [c]+1$ по (4.5.4) $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0$, что мы получаем устремляя j в бесконечность, а это означает, что функция $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — полином. Неравенство (2.5.4) показывает, далее, что соотношение (3.5.4) имеет место при любом произвольном исчерпании пространства семейством параболически подобных круговых областей, если только $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — целая трансцендентная функция.

В самом деле, допустим, что

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln M_S(R_j)}{\ln R_j} = c < \infty; \qquad R_j\uparrow\infty.$$

Тогда по (2.4.5)

$$\lim_{f\to\infty} \frac{\ln M_{\tilde{S}}\left(\frac{d}{2} R_j\right)}{\ln R_j} \leqslant c,$$

что, как мы показали выше, невозможно.

Следствие. *Если $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — целая трансцендентная функция, то*

$$\frac{RM'(R_j)}{M(R)} = K(R)\to\infty,$$

при $R\to\infty$, каким бы семейством $V(R)$ параболически подобных круговых областей ни исчерпать пространство C^n.

§ 5. Основные неравенства

1.5. Рассмотрим целую трансцендентную функцию $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ в пространстве C^n, исчерпаемом семейством параболически подобных круговых областей $V(R) = V(R, a_1, \ldots, a_n)$, с ограничивающими их гиперповерхностями $S(R) = S(R, a_1, \ldots, a_n)$, причем $S(1)\in\Sigma(a_1, a_2, \ldots, a_n, \delta)$ (см. § 4). Попрежнему мы полагаем $M(R) = M(R, a_1, \ldots, a_n) = \max\limits_{S(R)} |f(z_1, \ldots, z_n)|$ и $K(R) = K(R, a_1, \ldots, a_n) = \dfrac{RM'(R)}{M(R)}$. Напомним, что $K(R)\to\infty$ при $R\to\infty$, и, что $K(R)$ — возрастающая непрерывная справа функция. Обозначим наконец через $\zeta=(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ точку, в которой

$$|f(\zeta)|=|f(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)|=M(R). \tag{1.1.5}$$

Нашей непосредственной целью является оценка выражения

$$L=\ln|f(\zeta_1 e^{a_1\eta_1}, \zeta_2 e^{a_2\eta_2}, \ldots, \zeta_n e^{a_n\eta_n})|-\ln|f(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)|-$$
$$-(K_1 a_1 \tau_1+K_2 a_2 \tau_2+\ldots+K_n a_n \tau_n), \tag{2.1.5}$$

где $\eta_j=\tau_j+i\sigma_j$; $K_j=\dfrac{\partial \ln M(r_1, r_2, \ldots, r_n)}{\partial \ln r_j}$, $r_j=|\zeta_j|$; $j=1, 2, \ldots, n$; $M(R)=$ $=M(r_1, \ldots, r_n)$ (см. п.3.2) при $|\tau_j|\leqslant\tau\leqslant\tau_0$, где τ_0 — достаточно мало.

Для этого придется предварительно рассмотреть некоторые соотношения в точке максимума модуля целой функции $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

Точке $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta\,)\in S(R)$ соответствует на гиперповерхности $\sigma(R)$ в „абсолютном октанте" пространства переменных $r_1, r_2, \ldots, r_n$ точка $r_0=(r_1^0, r_2^0, \ldots, r_n^0)\in\sigma(R)$. В некоторой окрестности Δ_0 точки r_0 с $r_1^0\cdot r_2^0\ldots r_n^0>$ >0 гиперповерхность $\sigma(R)$ может быть выражена параметрически следующим образом:

$$\left\{\begin{array}{l} r_1=\rho_1(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})R^{a_1}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_n=\rho_n(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})R^{a_n}, \end{array}\right. \tag{3.1.5}$$

причем функции $\rho_j(u)$ по условиям, наложенным на класс гиперповерхностей $\Sigma(a_1, \ldots, a_n, \delta)$ (см. п.1.4), имеют непрерывные частные производные первого порядка по всем u_k; $(u_1, \ldots, u_{n-1})\in\Delta_0$. Пусть $r_j^0=\rho_j(u_0)$; $j=$ $=1, 2, \ldots, n$. Имеем в окрестности Δ точки ζ

$$|f(z_1, z_2, \ldots, z_n)|=$$
$$=\left|f\left(R^{a_1}\rho_1(u_1, \ldots, u_{n-1})e^{i\varphi_1}, \ldots, R^{a_n}\rho_n(u_1, \ldots, u_{n-1})e^{i\varphi_n}\right)\right|.$$

Так как $S(1)\in\Sigma(a_1, \ldots, a_n, \delta)$, то в точке ζ

$$\frac{\partial \ln|f|}{\partial\varphi_j}=0; \qquad j=1, 2, \ldots, n \tag{4.1.5}$$

и

$$\frac{1}{|f|}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial|f|}{\partial r_j}R^{a_j}\frac{\partial\rho_j}{\partial u_p}=\sum_{j=1}^{n}\frac{r_j^0\dfrac{\partial|f|}{\partial r_j}}{|f|}\frac{1}{\rho_j}\frac{\partial\rho_j}{\partial u_p}=0, \quad p=1, 2, \ldots, n-1. \tag{5.1.5}$$

Обратимся к определителю

$$\tilde{D}=\rho_1\rho_2\ldots\rho_n D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & & a_n \\ \dfrac{1}{\rho_1}\dfrac{\partial\rho_1}{\partial u_1} & \dfrac{1}{\rho_2}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial u_1} & \ldots & \dfrac{1}{\rho_n}\dfrac{\partial\rho_n}{\partial u_1} \\ \dfrac{1}{\rho_1}\dfrac{\partial\rho_1}{\partial u_{n-1}} & \dfrac{1}{\rho_2}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial u_{n-1}} & \ldots & \dfrac{1}{\rho_n}\dfrac{\partial\rho_n}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} \tag{6.1.5}$$

и обозначим через D_j алгебраическое дополнение определителя $\tilde{D}$, соответствующее j-му элементу первой строки. Из (5.1.5) вытекает, что

$$\frac{r_1^0\dfrac{\partial|f|}{\partial r_1}}{|f|}:\frac{r_2^0\dfrac{\partial|f|}{\partial r_2}}{|f|}:\ldots:\frac{r_n^0\dfrac{\partial|f|}{\partial r_n}}{|f|}=D_1:D_2:\ldots:D_n. \tag{7.1.5}$$

Но в силу условий (4.1.5), как показано в § 2

$$\frac{r_j^0 \frac{\partial |f|}{\partial r_j}}{|f|} = \frac{\zeta_j \frac{\partial f(\zeta)}{\partial z_j}}{f(\zeta)} = K_j(r_1^0, \ldots, r_n^0) = K_j(R) = K_j, \tag{8.1.5}$$

причем $\sum_{j=1}^{n} a_j K_j(R) = K(R)$. По (7.1.5) и (8.1.5)

$$K_1 : K_2 : \ldots : K_n = D_1 : D_2 : \ldots : D_n; \quad \sum_{j=1}^{n} a_j D_j = \tilde{D},$$

так что $D_j = \lambda K_j$; $\lambda = \frac{\tilde{D}}{K}$ и

$$\frac{D_j}{\tilde{D}} = \frac{K_j}{K}; \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{9.1.5}$$

2.5. Вернемся к выражению (2.1.5). Предположим сначала, что $\prod_{j=1}^{n} r_j^0 > 0$. Имеем:

$$L \leqslant \ln \frac{M\left(r_1^0 e^{a_1\tau_1}, r_2^0 e^{a_2\tau_2}, \ldots, r_n^0 e^{a_n\tau_n}\right)}{M\left(r_1^0, r_2^0, \ldots, r_n^0\right)} - \sum_{j=1}^{n} a_j K_j \tau_j =$$

$$= \ln\left\{ \frac{M\left(r_1^0 e^{a_1\tau_1}, r_2^0 e^{a_2\tau_2}, \ldots, r_n^0 e^{a_n\tau_n}\right)}{M\left(r_1^0, r_2^0, \ldots, r_n^0\right)} e^{-\sum_{j=1}^{n} a_j K_j \tau_j} \right\}.$$

Положим $r_j^0 e^{a_j\tau_j} = \tilde{r}_j$. Тогда

$$e^L \leqslant \frac{M(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \ldots, \tilde{r}_n)}{M(r_1^0, r_2^0, \ldots, r_n^0)} \left(\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{r_j^0}{\tilde{r}_j} \right)^{K_j} \right) = \tilde{L}. \tag{1.2.5}$$

Рассмотрим максимум выражения $\tilde{L}$ при $\tilde{r}_j = r_j^0 e^{a_j\tau_j}$, $|\tau_j| \leqslant \tau$. Пусть этот максимум достигается при $\tilde{r} = \bar{\bar{r}}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. $(\bar{\bar{r}}_1, \bar{\bar{r}}_2, \ldots, \bar{\bar{r}}_n)$ есть точка некоторой гиперповерхности $\sigma(Re^{\tilde{\tau}_0}) = \sigma(Re^{\tilde{\tau}_0}, a_1 \ldots, a_n)$ в пространстве переменных $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, соответствующей гиперповерхности $S(Re^{\tilde{\tau}_0})$, параболически подобной $S(1)$, рассмотренной в конце п.1.5. Поэтому $\bar{\bar{r}}_j = r'_j (Re^{\tilde{\tau}_0})^{a_j} = r_j e^{a_j\tilde{\tau}_0}$, $(r'_1, \ldots, r'_n) \in \sigma(1)$, $(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n) \in \sigma(R)$. Тогда в соответствии со сказанным, используя (3.1.4), имеем:

$$\max \tilde{L} = \frac{M\left(\bar{r}_1 e^{a_1\tilde{\tau}_0}, \bar{r}_2 e^{a_2\tilde{\tau}_0}, \ldots, \bar{r}_n e^{a_n\tilde{\tau}_0}\right)}{M(r_1^0, r_2^0, \ldots, r_n^0)} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{n} (r_j^0)^{K_j}}{\prod_{j=1}^{n} (\bar{\bar{r}}_j)^{K_j}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M(Re^{\tilde{\tau}_0})}{M(R)} \frac{\prod_{j=1}^{n} (R^{a_j}\rho_j^0)^{K_j}}{\prod_{j=1}^{n} (R^{a_j}\bar{\bar{\rho}}_j)^{K_j}} = \frac{M(Re^{\tilde{\tau}_0})}{M(R)} e^{-\tilde{\tau}_0 \sum_{j=1}^{n} a_j K_j} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\rho_j^0}{\bar{\rho}_j} \right)^{K_j}. \tag{2.2.5}$$

У нас

$$(\rho_1^0, \ldots, \rho_n^0) = \left(\frac{r_1^0}{R^{a_1}}, \ldots, \frac{r_n^0}{R^{a_n}} \right) \in H,$$

а точка

$$(\bar{\rho}_1, \ldots, \bar{\rho}_n) = \left(\frac{\bar{r}_1}{R^{a_1}}, \ldots, \frac{\bar{r}_n}{R^{a_n}} \right) \in H_0$$

на гиперповерхности $\sigma(1)$ $\Big($см. (1.5.5) и п.4.4$\Big)$. По условию 2 п.1.4 при $|\tilde{\tau}_0|\leqslant\tau\leqslant\tau_0$ в согласии с (3.1.4) на основе (6.1.5) и (9.1.5)

$$\left|\sum_{j=1}^{n} K_j \ln\frac{\rho_j^0}{\tilde{\rho}_j}\right| = K\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{D_k}{\tilde{D}_k}\ln\frac{\rho_j^0}{\tilde{\rho}_j}\right| \leqslant AK\,|\tilde{\tau}_0|^{1+\delta}.$$

С другой стороны, так как функция $\ln M(R)$ выпукла по $\ln R$, то

$$\ln M(Re^{\tilde{\tau}_0}) - \ln M(R) - \tilde{\tau}_0 K(R) \leqslant \Big[K(Re^{\tilde{\tau}_0}) - K(R)\Big]\tilde{\tau}_0 .$$

При $|\tilde{\tau}_0|\leqslant\dfrac{1}{K^{\frac{1}{1+\delta}}(R)\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K(R)}$ по лемме 1.2.3 вне некоторого множества интервалов E ограниченной логарифмической меры

$$\Big|K(Re^{\tilde{\tau}_0}) - K(R)\Big| \leqslant K^{\frac{\delta}{1+\delta}}(R)\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K(R)$$

и

$$\ln M(Re^{\tilde{\tau}_0}) - \ln M(R) - K(R)\tau_0 \leqslant K^{\frac{\delta}{1+\delta}}(R)\sqrt{\ln^{1+\alpha}K(R)}\,|\tilde{\tau}_0|.$$

Итак при $|\tau_j|\leqslant\tau\leqslant[K^{\frac{1}{1+\delta}}(R)\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K(R)]^{-1}\leqslant\tau_0$ мы находим для выражения (2.1.5) следующую оценку, верную вне множества E, введенного выше $\Big($напомним: $S(1)\in\Sigma(a_1, \ldots, a_n, \delta)\Big)$:

$$L\leqslant K^{\frac{\delta}{1+\delta}}(R)\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K(R)\,\tau + \frac{1}{\ln^{(1+\delta)\frac{1+\alpha}{2}}K(R)}. \tag{3.2.5}$$

3.5. Предположим сейчас, что $\max\limits_{S(R)}|f(z_1, \ldots, z_n)|$ достигается в точке $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p, 0, \ldots, 0)$, $p\geqslant 2$ (к этому виду всегда можно привести координаты точки, меняя в случае необходимости нумерацию переменных). В силу условия 3 п.1.4 в подпространстве $(r_1, r_2, \ldots, r_p)$ надо рассматривать следы $\sigma_{12\ldots p}(R)$, $H_{12\ldots p}(R)$, $H_{012\ldots p}(R)$ и максимум функции $|f(z_1, z_2, \ldots, z_p, 0, \ldots, 0)|$ на $\tilde{H}_{12\ldots p}(R)$, достигаемый в точке $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p)=\zeta$ с $|\zeta_j|=r_j^0$, $j=1, 2, \ldots, p$. В окрестности Δ_0 точки $(|\zeta_1|, \ldots, |\zeta_p|)$ в подпространстве $(r_1, r_2, \ldots, r_p)$ гиперповерхность $\sigma(R)$ может быть выражена параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} r_1=\rho_1(v_1, \ldots, v_{p-1})\,R^{a_1}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_p=\rho_p(v_1, \ldots, v_{p-1})\,R^{a_p}. \end{cases}$$

Повторяя буквально все рассуждения предыдущих пунктов 1.5 и 2.5 и на этот раз при $|\tau_j|\leqslant\tau\leqslant\tau_0$ придем к неравенству (3.2.5).

Если $p=1$, то при $|\tau_1|\leqslant\dfrac{1}{K^{\frac{1}{1+\delta}}(R)\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K(R)}$ вне E

$$L\leqslant\ln\frac{|f(\zeta, e^{a_1\tau_1}, 0, \ldots, 0)|}{|f(\zeta_1, 0, \ldots, 0)|} - K\tau_1 \leqslant \ln M(Re^{\tau_1}) - \ln M(R) - K(R)\tau_1 \leqslant$$

$$\leqslant K^{\frac{\delta}{1+\delta}}(R)\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K(R)\,|\tau_1|,$$

что совпадает с оценкой (3.2.5), если отбросить там второе слагаемое справа.

4.5. Исключим из рассмотрения множество точек E, определенное на основании леммы 1.2.3 при оценке разности $K(Re^{\tau})-K(R)$. Пусть $R\in E$ и $w=(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ — точка на гиперповерхности $S(R)$ такая, что

$$|f(w)|\geqslant \frac{1}{K^{\beta}(R)}M(R),\quad \beta>0,\quad |w_j|=|\zeta_j|;\qquad |f(\zeta)|=M(R),\quad \zeta\in S(R).$$

Тогда аналогично тому, как мы это сделали в предыдущих пунктах, получим:

$$\begin{aligned} L(w, \eta) &= \ln|f(w_1 e^{a_1\eta_1}, w_2 e^{a_2\eta_2}, \ldots, w_n e^{a_n\eta_n})| - \ln|f(w_1, w_2, \ldots, w_n)| - \\ &- \sum_{j=1}^{n} a_j K_j(R)\tau_j \leqslant \ln M(r_1 e^{a_1\tau_1}, r_2 e^{a_2\tau_2}, \ldots, r_n e^{a_n\tau_n}) - \\ &- \ln M(r_1, r_2, \ldots, r_n) + \beta\ln K(R) - \sum_{j=1}^{n} a_j K_j(R)\tau_j \leqslant \\ &\leqslant K^{\frac{\delta}{1+\delta}}(R)\ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K(R) + \frac{1}{\ln^{(1+\delta)\frac{1+\alpha}{2}} K(R)} + \beta\ln K(R), \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

при $|\tau_j|\leqslant\tau\leqslant\left(K^{\frac{1}{1+\delta}}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K\right)^{-1}$; $K=K(R)$.

5.5. Выражение (2.1.5) легко оценивается независимо от способа исчерпания пространства семействами параболически подобных круговых областей (т. е. на гиперповерхности $S(1)$ мы не накладываем никаких условий, кроме того условия, что она круговая), если $\eta_1=\eta_2=\ldots=\eta_n=\eta$. Действительно вне обычного множества интервалов, определяемого на основании леммы 1.2.3, при $\tau\leqslant(K\ln^{1+\alpha}K)^{-\frac{1}{2}}$; $K=K(R)$

$$L(\zeta, \tau)=\ln\frac{|f(\zeta_1 e^{a_1\eta}, \zeta_2 e^{a_2\eta}, \ldots, \zeta_n e^{a_n\eta})|}{|f(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)|}-\sum_{j=1}^{n} a_j K_j\tau\leqslant$$

$$\leqslant\ln\frac{M(Re^{\tau})}{M(R)}-K(R)\tau\leqslant\left[K(Re^{\tau})-K(R)\right]\tau\leqslant\left(K(R)\ln^{1+\alpha}K(R)\right)^{+\frac{1}{2}}\tau. \tag{1.5.5}$$

Замечание. Оценка (1.5.5) может быть получена при исчерпании пространства полицилиндрами при различных $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ и в том случае, когда функция $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ такова, что все построенные для нее функции $\frac{\partial\ln M(r_1, r_2, \ldots, r_n)}{\partial\ln r_j}$; $j=1, 2, \ldots, n$ монотонно возрастающие, т.е.

$$K_j=\frac{\partial\ln M(r_1, r_2, \ldots, r_n)}{\partial\ln r_j}\leqslant\frac{\partial\ln M(\bar r_1, \bar r_2, \ldots, \bar r_n)}{\partial\ln r_j},$$

когда $r_i\leqslant\bar r_i$; $i=1, 2, \ldots, n$*).

Действительно, очевидно тождество:

$$\begin{aligned} &\ln M(r_1 e^{a_1\tau_1}, r_2 e^{a_2\tau_2}, \ldots, r_n e^{a_n\tau_n}) - \ln M(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \\ &= \ln M(r_1 e^{a_1\tau_1}, r_2 e^{a_2\tau_2}, \ldots, r_n e^{a_n\tau_n}) - \ln M(r_1 e^{a_1\tau_1}, r_2 e^{a_2\tau_2}, \ldots, r_{n-1} e^{a_{n-1}\tau_{n-1}}, r_n) + \\ &+ \ln M(r_1 e^{a_1\tau_1}, r_2 e^{a_2\tau_2}, \ldots, r_{n-1} e^{a_{n-1}\tau_{n-1}}, r_n) - \ln M(r_1 e^{a_1\tau_1}, r_2 e^{a_2\tau_2}, \ldots, r_{n-1}, r_n) + \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ &+ \ln M(r_1 e^{a_1\tau_1}, r_2, \ldots, r_n) - \ln M(r_1, r_2, \ldots, r_n). \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

*) В работе [14] в формулировке теоремы 10 условие этого замечания по недосмотру автора пропущено.

Так как функция $\ln M(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ — выпуклая функция от $\ln r_j$, когда все остальные переменные r_i; $r_i \neq r_j$ постоянны, то функции $K_j(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, $j=1, 2, \ldots, n$ возрастают по r_j и

$$\ln M(r_1 e^{a_1\tau_1}, \ldots, r_j e^{a_j\tau_j}, r_{j+1}, \ldots, r_n) - \ln M(r_1 e^{a_1\tau_1}, \ldots, r_j, r_{j+1}, \ldots, r_n) \leqslant$$
$$\leqslant K_j(r_1 e^{a_1\tau_1}, \ldots, r_j e^{a_j\tau_j}, r_{j+1}, \ldots, r_n)\, a_j \tau_j.$$

Отсюда и из (2.5.5) теперь вытекает, что вне привычного множества интервалов ограниченной логарифмической меры при $|\tau_j| \leqslant \tau \leqslant (K \ln^{1+\alpha} K)^{-\frac{1}{2}}$, $K = K(R)$

$$L(\zeta, \tau) \leqslant \ln M(r_1 e^{a_1\tau_1}, \ldots, r_n e^{a_n\tau_n}) - \ln M(r_1, \ldots, r_n) - \sum_{j=1}^{n} a_j K_j \tau_j \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \Big[a_j K_j(r_1 e^{a_1\tau_1}, \ldots, r_j e^{a_j\tau_j}, r_{j+1}, \ldots, r_n) - a_j K_j(r_1, \ldots, r_n)\Big]\tau_j \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} a_j \Big[K_j(r_1 e^{a_1\tau}, \ldots, r_n e^{a_n\tau}) - K_j(r_1, \ldots, r_n)\Big]\tau \leqslant$$
$$\leqslant \Big[K(Re^{\tau}) - K(R)\Big]\tau \leqslant (K \ln^{1+\alpha} K)^{\frac{1}{2}}\, \tau.$$

Сформулированное выше условие о монотонности выполняется, например, всегда для функций вида $e^{F(z_1, \ldots, z_n)}$, где $F(z_1, \ldots, z_n)$ — целая функция с положительными тейлоровскими коэффициентами в разложении $F(z_1, \ldots, z_n) = \Sigma a_{j_1 j_2 \ldots j_n} z_1^{j_1} z_2^{j_2} \ldots z_n^{j_n}$.

Глава 3

§ 6. Оценки для целой трансцендентной функции при больших значениях ее модуля

1.6. В этой главе мы занимаемся целыми трансцендентными функциями от двух независимых переменных. Общий случай многих переменных рассматривается буквально также, как и случай двух переменных.

Приведем формулировку одной леммы, которая нам ниже понадобится.

Лемма 1.1.6. *Пусть функция $F(z_1, z_2)$ — аналитическая функция в замкнутом бицилиндре $C: |z_j| \leqslant \rho_j$; $j=1, 2$. Пусть, далее,* $\operatorname{Re} F(z_1, z_2) < A$ *и*

$$F(z_1, z_2) = \sum_{i+j=\infty}^{\infty} a_{ij} z_1^i z_2^j \qquad (1.1.6($$

тейлоровское разложение функции $F(z_1, z_2)$ в бицилиндре C. Тогда

$$|a_{ij}| \leqslant \frac{2(A - \operatorname{Re} a_{00})}{\rho_1^i \rho_2^j}. \qquad (2.1.6)$$

Доказательство этой леммы имеется в [1].

Переходим к доказательству нескольких предложений о поведении целой трансцендентной функции при больших значениях ее модуля. Условимся о следующей терминологии: во всем дальнейшем слова „множество интервалов“ будут означать множество интервалов, число которых на каждом конечном сегменте конечно.

Рассмотрим, по-прежнему, целую трансцендентную функцию $f(z_1, z_2)$ и предположим, что пространство C^2 исчерпывается семейством параболически подобных круговых областей $V(R) = V(R, a_1, a_2)$. Пусть $S(R) = S(R, a_1, a_2)$ — гиперповерхности, ограничивающие области $V(R, a_1, a_2)$, причем $S(1) \in \Sigma(a_1, a_2, \delta)$. Ниже всюду мы будем обозначать через $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, не оговаривая этого, точку максимума $|f(z)|$ на $S(R): \zeta \in S(R)$.

Теорема 1.1.6. *Пусть $\{(w_1, w_2)\}$ есть множество точек, удовлетворяющих следующему условию: если $(w_1, w_2) \in S(R)$, то*

$$|f(w_1, w_2)| \geqslant K^{-\beta}(R) M(R); \qquad \beta > 0, \quad |w_j| = |\zeta_j|. \tag{3.1.6}$$

Тогда вне некоторого множества интервалов E конечной логарифмической меры функция $f(w_1 e^{a_1\eta_1}, w_2 e^{a_2\eta_2})$; $\eta_j = \tau_j + i\sigma_j$ в бицилиндре

$$|\eta_j| < (K^{\frac{1}{1+\delta}+\beta} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K)^{-1}, \quad K = K(R),$$

где $\alpha > 0$ — произвольное число, а множество E от α зависит, в нуль не обращается.

Доказательство. Исключим в соответствии с леммой 1.2.3 из рассмотрения множество интервалов E_0 такое, что вне E_0

$$|K(Re^{\tau}) - K(R)| \leqslant K^{\frac{\delta}{1+\delta}}(R) \ln^{\frac{1+\alpha'}{2}} K(R),$$

при $|\tau| \leqslant K^{\frac{1}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha'}{2}} K)^{-1}$ (множество E_0 от α' зависит).

Оценим в степенном разложении

$$F(\eta_1, \eta_2) = \frac{f(w_1 e^{a_1\eta_1}, w_2 e^{a_2\eta_2})}{f(w_1, w_2)} e^{-K_1(R)a_1\eta_1 - K_2(R)a_2\eta_2} = 1 + \sum_{i+j=1}^{\infty} A_{ij} \eta_1^i \eta_2^j, \tag{4.1.6}$$

модули коэффициентов A_{ij}, где $(w_1, w_2) \in S(R)$; $R \notin E_0$. В согласии с (1.4.5)

$$|F(\eta_1, \eta_2)| = \exp\left\{ \ln\left| \frac{f(w_1 e^{a_1\eta_1}, w_2 e^{a_2\eta_2})}{f(w_1, w_2)} \right| - a_1 K_1(R)\tau_1 - a_2 K_2(R)\tau_2 \right\} \leqslant$$

$$\leqslant K^{\beta} \exp\{ K^{\frac{\delta}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha'}{2}} K\tau \}, \tag{5.1.6}$$

если $|\eta_j| \leqslant \tau = \left(K^{\frac{1}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha'}{2}} K\right)^{-1}$ (здесь и дальше $K = K(R)$). Отсюда находим, что при таком τ

$$|F(\eta_1, \eta_2| = K_{\beta}\left(1 + o(1)\right). \tag{6.1.6}$$

По теореме Коши согласно (5.1.5), если взять $|\eta_j| \leqslant (K^{\frac{1}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha'}{2}} K)^{-1}$, получим:

$$|A_{ij}| \leqslant \left(1 + O(\ln^{-\frac{1+\alpha'}{2}} K)\right) K^{\beta + \frac{i+j}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha'}{2}(i+j)} K. \tag{7.1.6}$$

Следовательно, при $|\eta_j| \leqslant \tau$; $j = 1, 2$

$$\left| \sum_{i+j=1}^{\infty} A_{ij} \eta_1^i \eta_2^j \right| \leqslant [1 + o(1)] \sum_{p=1}^{\infty} (p+1) K^{\beta + \frac{p}{1+\delta}} \ln^{p\frac{1+\alpha'}{2}} K\tau^p =$$

$$= [1 + o(1)] K^{\beta + \frac{1}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha'}{2}} K\tau \sum_{p=0}^{\infty} (p+2) K^{\frac{p}{1+\delta}} \ln^{p\frac{1+\alpha'}{2}} K\tau^p.$$

Если теперь выбрать τ так, чтобы было $(K^{\frac{1}{1+\delta}}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K)^{-1}\geqslant\tau$, $\alpha>\alpha'$, то

$$\left|\sum_{i+j=1}^{\infty}A_{ij}\eta_1^i\eta_2^j\right|\leqslant 3\,[1+o\,(1)]\,K^{\beta+\frac{1}{1+\delta}}\ln^{\frac{1+\alpha'}{2}}K\tau-\frac{1}{1-\dfrac{1}{\ln^{\frac{\alpha-\alpha'}{2}}K}}<$$

$$<K^{\beta+\frac{1}{1+\delta}}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K\tau, \tag{8.1.6}$$

если $R>R_0(\alpha)$. Отсюда

$$|F(\eta_1,\ \eta_2)|\geqslant 1-\left|\sum_{i+j=1}^{\infty}A_{ij}\eta_1^i\eta_2^j\right|>1-K^{\beta+\frac{1}{1+\delta}}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K\tau=0,$$

если $|\eta_j|\leqslant[K^{\beta+\frac{1}{1+\delta}}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K]^{-1}$. При этом из оси R мы исключаем множество $E=E_0\cup\left(o,\ R_0(\alpha)\right)$.

Теорема доказана.

Тем же методом можно получить и следующее предложение.

Теорема 2.1.6. Пусть пространство C^2 исчерпывается семейством параболически подобных круговых областей $V(R,\ a_1,\ a_2)$. Пусть, далее, $S(R)=S(R,\ a_1,\ a_2)$ — соответствующее семейство ограничивающих их гиперповерхностей, причем не обязательно $S(1)\in\Sigma(a_1,\ a_2,\ \delta)$. Предположим еще, что $f(z_1,\ z_2)$ — целая трансцендентная функция и, что $(w_1,\ w_2)$ — точка, в которой справедливо неравенство

$$|f(w_1,\ w_2)|\geqslant\frac{1}{K^{\beta}(R)}M(R),\quad \beta>0,\quad |w_j|=|\zeta_j|, \tag{9.1.6}$$

$\left(M(R)=|f(\zeta_1,\ \zeta_2)|;\ K(R)=\dfrac{RM'(R)}{M(R)}\right)$. В этих условиях функция $f(w_1e^{a_1\eta},\ w_2e^{a_2\eta})$ не обращается в нуль в круге

$$|\eta|\leqslant\frac{K^{-\beta}}{\sqrt{K\ln^{1+\alpha}K}};\quad K=K(R).$$

Теорема верна при любом значении $R\left((w_1,w_2)\in S(R)\right)$, за исключением, быть может, некоторого множества интервалов ограниченной логарифмической меры.

2.6. Теоремы предыдущего пункта мы сейчас сформулируем иначе. В продолжении всей главы 3 мы через $V(R)=V(R,\ a_1,\ a_2)$ обозначаем семейство параболически подобных круговых областей, исчерпывающих пространство C^2 при $R\to\infty$; через $S(R)=S(R,\ a_1,\ a_2)$ — ограничивающие их гиперповерхности. Мы этого специально не будем оговаривать.

Теорема 1.2.6. *Пусть* $\{(w_1,\ w_2)\}$ — *множество точек, удовлетворяющих условию: если в точке* $(w_1,\ w_2)\in S(R)$

$$|f(w_1,\ w_2)|\geqslant K^{-\beta}M(R);\quad \beta>0,\quad |w_j|=|\zeta_j|,$$

то в равенстве

$$f(w_1e^{a_1\eta_1},\ w_2e^{a_2\eta_2})=f(w_1,\ w_2)\,e^{a_1K_1\eta_1+a_2K_2\eta_2}\left(1+\omega(\eta_1,\ \eta_2)\right), \tag{2.2.6}$$

при любом R, *за исключением, быть может, некоторого множества интервалов конечной логарифмической меры оси* R

а) $$|\omega(\eta_1, \eta_2)| \leqslant (K^{\frac{1}{1+\delta}+\beta} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K)\tau \quad (3.2.6.)$$

при $S(1) \in \Sigma(a_1, a_2, \delta)$ *и* $|\eta_j| \leqslant \tau \leqslant (K^{\frac{1}{1+\delta}+\beta} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K)^{-1}$;

б) $$|\omega(\eta_1, \eta_2)| \leqslant (K^{\frac{1}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K\tau)^2, \quad (4.2.6)$$

если $w_j = \zeta_j$; $S(1) \in \Sigma(a_1, a_2, \delta)$; $|\eta_j| \leqslant \tau \leqslant (K^{\frac{1}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K)^{-1}$, *где точка* (ζ_1, ζ_2) *есть точка максимума на гиперповерхности* $S(R)$ *функции* $|f(z_1, z_2)|$ *и*

в) *при* $\eta_1 = \eta_2 = \eta$ *всегда имеет место оценка* (3.2.6) *или* (4.2.6) *независимо от способа исчерпания пространства семействами параболически подобных круговых областей* $\Big($*т. е. не обязательно* $S(1) \in \Sigma(a_1, a_2, \delta)\Big)$ *с* $\delta = 1$.

Доказательство. Утверждения а) и в) являются простыми перефразировками неравенства (8.1.6) и ему подобного в случае в). Перейдем к доказательству утверждения б). Оно производится точно также как в случаях а) и в) с тем только отличием, что в обсуждаемом случае б)

$$\omega(\eta_1, \eta_2) = \sum_{i+j=2}^{\infty} A_{ij} \eta_1^i \eta_2^j,$$

$\Big($см. (4.1.6), (4.3.2)$\Big)$. По оценке (3.2.5) имеем:

$$|F(\eta_1, \eta_2)| \leqslant \Big(1 + o(1)\Big) \exp\{K^{\frac{\delta}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha'}{2}} K\tau\},$$

при $|\eta_j| \leqslant \tau \leqslant (K^{\frac{1}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha'}{2}} K)^{-1}$. По теореме Коши тогда, полагая $|\eta_1| = |\eta_2| = (K^{\frac{1}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha'}{2}} K)^{-1}$,

$$|A_{ij}| \leqslant \Big[e + o(1)\Big] K^{\frac{i+j}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha'}{2}(i+j)} K.$$

Поэтому при $|\eta_j| \leqslant \tau$; $j = 1, 2$

$$\left|\omega(\eta_1, \eta_2)\right| = \left|\sum_{i+j=2}^{\infty} A_{ij} \eta_1^i \eta_2^j\right| \leqslant \Big(e + o(1)\Big) \sum_{p=2}^{\infty} (p+1) [K^{\frac{1}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha'}{2}} K\tau]^p <$$

$$< 3\Big[e + o(1)\Big] (K^{\frac{1}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha'}{2}} K\tau)^2 \sum_{p=0}^{\infty} pK^{\frac{1}{1+\delta}} \ln^{p\frac{1+\alpha'}{2}} K\tau^p.$$

Если сейчас положить $K^{\frac{1}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K\tau \leqslant 1$; $\alpha > \alpha'$, то

$$\left|\omega(\eta_1, \eta_2)\right| \leqslant (K^{\frac{1}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha'}{2}} K\tau)^2 \left\{3\Big[e + o(1)\Big] \frac{1}{1 - \frac{1}{\ln^{\frac{\alpha-\alpha'}{2}} K}}\right\} <$$

$$< (K^{\frac{1}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K\tau)^2,$$

если $R > R_0(\alpha)$ при $\tau < (K^{\frac{1}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K)^{-1}$. Очевидно, следует исключить те значения $R\Big(R > R_0(\alpha)\Big)$, которые исключаются при выводе оценки (3.2.5).

Следствие. *Предположим выполненными условия теоремы* 1.2.6. *В тождестве* ($|w_j|=|\zeta_j|$)

$$f(w_1 e^{a_1\eta_1},\ w_2 e^{a_2\eta_2})=f(w_1,\ w_2)\left(1+\omega(\eta_1,\ \eta_2)\right) \qquad (5.2.6)$$

I в условиях случая а) *при* $|\eta_j|\leqslant\tau<(K\ln^{\gamma}K)^{-1}$, $\beta<\frac{\delta}{1+\delta}$ *и II в условиях* б) *и* в) *при* $|\eta_j|\leqslant\tau<(K\ln^{1+\alpha+\gamma}K)^{-1}$

$$\left|\tilde{\omega}(\eta_1,\ \eta_2)\right|<\frac{C}{\ln^{\gamma}K}, \qquad (6.2.6)$$

причем число $\gamma>0$ *произвольное и следует, быть может, исключить множество интервалов, указанное в теореме* 1.2.6.

Доказательство неравенства (6.2.6) вытекает непосредственно из выражения (2.2.6). Действительно, при указанных выше значениях τ $\left(K_j=K_j(R);\ j=1,\ 2\right)$

$$\mathrm{Re}\{a_1K_1\eta_1+a_2K_2\eta_2\}\leqslant K\tau\leqslant\frac{1}{\ln^{\gamma}K},$$

так что

$$|e^{a_1K_1\eta_1+a_2K_2\eta_2}|=1+O(\ln^{-\gamma}K). \qquad (7.2.6)$$

Кроме того, при этих же значениях τ

$$\left|\omega(\eta_1,\ \eta_2)\right|=O(\ln^{-\gamma}K). \qquad (8.2.6)$$

К (6.2.6) мы сейчас придем, если в (3.2.6) подставить (7.2.6) и (8.2.6).

3.6. Докажем сейчас теорему, доказанную в частном случае исчерпания пространства полицилиндрами в [6].

Теорема 1.3.6. *Пусть* $u(v)$ *и* $v(z_1,\ z_2)$ — *целые трансцендентные функции от соответствующих переменных. Предположим, что пространство* C^2 *исчерпывается семейством произвольных параболически подобных круговых областей* $V(R)$, *причем* $S(R)$ *суть ограничивающие эти области гиперповерхности* $\left(\text{не обязательно } S(1)\in\Sigma(a_1,\ a_2,\ \delta)\right)$. *Пусть, наконец,* $F(z_1,\ z_2)=$ $=u[v(z_1,\ z_2)]$ $\left(\text{очевидно, } F(z_1,\ z_2) - \text{целая функция}\right)$. *Тогда вне некоторого множества интервалов* $E(n)$ *полуоси* $R>0$ *ограниченной логарифмической меры, справедливо неравенство:*

$$M^n(R,\ v)<M(R,\ F); \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots. \qquad (1.3.6)$$

Доказательство. Пусть $(\zeta_1,\ \zeta_2)$ — точка максимума функции $|v(z_1,\ z_2)|$ на гиперповерхности $S(R)$, $R\notin E'$, в которой справедливо (1.1.5) (E' — множество исключаемых интервалов в соответствии с теоремой 1.2.6). Рассмотрим функцию

$$h(\eta)=u\left[v(\zeta_1,\ \zeta_2)\,e^{K(R,\,v)\eta}\right]. \qquad (2.3.6)$$

По (1.5.5), вне некоторого множества интервалов E'' конечной логарифмической меры, справедливо равенство:

$$v(\zeta_1 e^{a_1\eta},\ \zeta_2 e^{a_2\eta})=v(\zeta_1,\ \zeta_2)\,e^{K\eta}\left(1+\omega(\eta)\right);\quad K=K(R,\ v), \qquad (3.3.6)$$

где $|\omega(\eta)| < \sqrt{K \ln^{1+\alpha} K} \, |\operatorname{Re}\eta|$ при $|\operatorname{Re}\eta| \leqslant (K \ln^{1+\alpha} K)^{-\frac{1}{2}}$. Следовательно,

$$h(\eta) = u\left[\Big(1+\omega_0(\eta)\Big) v(\zeta_1 e^{a_1\eta}, \zeta_2 e^{a_2\eta})\right] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} u^{(j)}(v)(\omega_0 v)^j;$$

$$v = v(\zeta_1 e^{a_1\eta}, \ \zeta_2 e^{a_2\eta}), \tag{4.3.6}$$

где $\omega_0(\eta) = \frac{1}{1+\omega(\eta)}$, так что $|\omega_0(\eta)| = \Big(1+o(1)\Big) |\omega(\eta)|$ при $|\operatorname{Re}\eta| \leqslant$ $\leqslant (K \ln^{1+\alpha'} K)^{-\frac{1}{2}}$; $\alpha' > \alpha$. По интегральной формуле Коши

$$\frac{u^{(n+1)}(v)}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{(n+1)}}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{u(t)}{(t-v)^{n+2}} \, dt, \tag{5.3.6}$$

где C_0 — спрямляемая замкнутая кривая, содержащая внутри точку v. Положим для краткости $\zeta_j e^{a_j\eta} = w_j$. Образ C' окружности $|\xi| = \rho'$ при отображении функцией $v = v(w_1 e^{a_1\xi}, \ w_2 e^{a_2\xi})$ есть в плоскости v кривая, обходящая точку $v(w_1, \ w_2)$ $m \geqslant 1$ раз. Отсюда вытекает, что

$$\frac{u^{(n+1)}\left[v(w_1, \ w_2)\right]}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i} \cdot \frac{1}{m} \int_{|\xi|=\rho'} \frac{F(w_1 e^{a_1\xi}, \ w_2 e^{a_2\xi}) \, dv(w_1 e^{a_1\xi}, \ w_2 e^{a_2\xi})}{\left| v(w_1 e^{a_1\xi}, \ w_2 e^{a_2\xi}) - v(w_1, \ w_2) \right|^{n+2}}. \tag{6.3.6}$$

Так как $(w_1 e^{a_1\xi}, \ w_2 e^{a_2\xi}) \in V(\operatorname{Re}^{\rho})$, $\rho = |\operatorname{Re}\eta| + |\operatorname{Re}\xi|$ и

$$\frac{dv(w_1 e^{a_1\xi}, \ w_2 e^{a_2\xi})}{v(w_1 e^{a_1\xi}, \ w_2 e^{a_2\xi})} = (a_1 D_1 + a_2 D_2) \ln v(w_1 e^{a_1\xi}, \ w_2 e^{a_2\xi}), \qquad D_j v = z_j \frac{\partial v}{\partial z_j}; \qquad j = 1, \ 2,$$

то из (6.3.6)

$$\frac{\left| u^{(n+1)}\left[v(w_1, \ w_2)\right] \right|}{(n+1)!} \leqslant \frac{M(\operatorname{Re}^{\rho}), F)}{2\pi} \times$$

$$\times \int_{|\xi|=\rho'} \frac{\left| (a_1 D_1 + a_2 D_2) \ln v(w_1 e^{a_1\xi}, \ w_2 e^{a_2\xi}) \right| \left| v(w_1 e^{a_1\xi}, \ w_2 e^{a_2\xi}) \right| |d\xi|}{\left| v(w_1 e^{a_1\xi}, \ w_2 e^{a_2\xi}) - v(w_1, \ w_2) \right|^{n+2}}. \tag{7.3.6}$$

При $|\operatorname{Re}\eta| \leqslant (\tilde{K} \ln^{1+\alpha} K)^{-1}$; $|\xi| = \rho' = (\tilde{K} \ln^{1+\alpha} K)^{-1}$, где $\tilde{K} = \tilde{K}(R) =$ $= \max\Big(K(R, \ v), \ K(R, \ F)\Big)$, вспомнив, что $w_j = \zeta_j \exp(a_j \eta)$, находим:

$$|e^{K\eta}| = e^{K \operatorname{Re}\eta} = 1 + o(1); \quad |e^{K\xi} - 1| = \Big(1+o(1)\Big) K |\xi| = \frac{\Big(1+o(1)\Big) K}{\tilde{K} \ln^{1+\alpha} K};$$

$$\Big|\omega_0(\eta+\xi)\Big| \leqslant \sqrt{K \ln^{1+\alpha} K} \Big(|\operatorname{Re}\eta| + |\operatorname{Re}\xi|\Big) \leqslant \frac{2\sqrt{K \ln^{1+\alpha} K}}{\tilde{K} \ln^{1+\alpha} K} + \frac{2}{\tilde{K}} \sqrt{\frac{K}{\ln^{1+\alpha} K}};$$

$$\Big|\omega_0(\eta)\Big| \leqslant \frac{1}{\tilde{K}} \sqrt{\frac{K}{\ln^{1+\alpha} K}}, \quad v(\zeta_1 e^{a_1\eta}, \ \zeta_2 e^{a_2\eta}) = \Big(1+o(1)\Big) v(\zeta_1, \ \zeta_2);$$

$$\left| v(\zeta_1 e^{a_1(\xi+\eta)}, \ \zeta_2 e^{a_2(\xi+\eta)}) \right| = \left| e^{K(\eta+\xi)} v(\zeta_1, \ \zeta_2) \Big(1 + \omega_0(\xi+\eta)\Big) \right| =$$

$$= \Big(1+o(1)\Big) \Big| v(\zeta_1, \ \zeta_2) \Big|;$$

$$\left| v(\zeta_1 e^{a_1(\xi+\eta)}, \ \zeta_2 e^{a_2(\xi+\eta)}) - v(\zeta_1 e^{a_1\eta}, \ \zeta_2 e^{a_2\eta}) \right| \geqslant \tag{8.3.6}$$

$$\geqslant \Big(1+o(1)\Big) \Big| v(\zeta_1, \ \zeta_2) \Big| \left\{ |e^{K\xi} - 1| - \Big(\Big|\omega_0(\xi+\eta)\Big| e^{K|\xi|} + \Big|\omega_0(\eta)\Big| \Big) \right\} \geqslant$$

$$\geqslant\left(1+o(1)\right)\left|v(\zeta_1,\ \zeta_2)\right|\left(\left(1+o(1)\right)\frac{K}{\tilde{K}\ln^{1+\alpha}K}-\right.$$

$$\left.-\left(1+o(1)\right)\frac{3}{\tilde{K}}\sqrt{\frac{K}{\ln^{1+\alpha}K}}\right)=\frac{\left(1+o(1)\right)\left|v(\zeta_1,\ \zeta_2)\right|K}{\tilde{K}\ln^{1+\alpha}K}.$$

Далее из теоремы 2.4.6, которую мы ниже докажем, следует соотношение

$$(a_1D_1+a_2D_2)\ln v(w_1e^{a_1\xi},\ w_2e^{a_2\xi})=\left(1+o(1)\right)K. \tag{9.3.6}$$

Из (7.3.6) сейчас получаем:

$$\left|\frac{u^{(n+1)}\left[v(w_1,\ w_2)\right]}{(n+1)!}\right|\leqslant\left(1+o(1)\right)\frac{M(\mathrm{Re}^{\rho},\ F)}{M^{n+1}(R,\ v)}\tilde{K}\left[\left(1+o(1)\right)\sqrt{\frac{\ln^{1+\alpha}K}{K}}\right]^{n+1}.$$

Таким образом

$$\left|h(\eta)\right|\leqslant\left(1+o(1)\right)M(\mathrm{Re}^{\rho},\ F)\left\{1+\tilde{K}\sum_{j=1}^{\infty}\left[\left(1+o(1)\right)\sqrt{\frac{\ln^{1+\alpha}K}{K}}\right]^{j}\right\}=$$

$$=\left(1+o(1)\right)\tilde{K}M(\mathrm{Re}^{\rho},\ F). \tag{10.3.6}$$

Пусть $u(t)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_mt^m$ и $\eta=\tau+i\sigma$. Тогда, если $a_{n+1}\neq 0$, верно равенство:

$$\frac{K}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{K}}e^{-i(n+1)K\sigma}u\left[v(\zeta_1,\ \zeta_2)e^{K(\tau+i\sigma)}\right]d\sigma=\sum_{m\neq n+1}a_m v^m(\zeta_1,\ \zeta_2)e^{mK\tau}\cdot$$

$$\cdot\frac{K}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{K}}e^{iK(m-n-1)\sigma}d\sigma+a_{n+1}v^{n+1}(\zeta_1,\ \zeta_2)e^{(n+1)K\tau}\frac{K}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{K}}d\sigma=a_{n+1}e^{(n+1)K\tau}v^{n+1}(\zeta_1,\ \zeta_2).$$

В согласии с (10.3.6) при указанном выше значении $\mathrm{Re}\,\eta$

$$|a_{n+1}|M^{n+1}(R,\ v)\leqslant\left(1+o(1)\right)M(\mathrm{Re}^{\rho},\ F)\tilde{K}(R). \tag{11.3.6}$$

Из неравенства 4.2.1 по лемме 1.2.3 следует:

при $\tau_0=\dfrac{1}{\ln^{1+\alpha}\ln M(R)}$; $K(R)\leqslant\dfrac{\ln M(\mathrm{Re}^{\tau_0})}{\tau_0}\leqslant\left(1+o(1)\right)\ln M(R)\ln^{1+\alpha}\ln M(R)$;

при $\rho=\dfrac{2}{\tilde{K}\ln^{1+\alpha}K}$: $M(\mathrm{Re}^{\rho},\ F)\leqslant M(R,\ F)e^{\tilde{K}(\mathrm{Re}^{\rho})\rho}=\left(1+o(1)\right)M(R,\ F)$. (12.3.6)

Так как $\tilde{K}(R)\leqslant K(R,\ F)K(R,\ v)$; $R>R_0$, то из (11.3.6) находим:

$$M^{n+1}(R,\ v)\leqslant\frac{1+o(1)}{|a_{n+1}|}\left(\ln^{1+\alpha}M(R,\ v)\ln^{1+\alpha}M(R,\ F)\right)M(R,\ F)$$

и

$$M^{n}(R,\ v)\leqslant\left\{\frac{1+o(1)}{|a_{n+1}|}\ \frac{\ln^{1+\alpha}M(R,\ v)}{M(R,\ v)}\right\}^{1+\varepsilon(R)}\cdot M(R,\ F),$$

где $\varepsilon(R)\to 0$, $R\to\infty$ (заметим, что неравенства (8.3.6) и затем и неравенства (12.3.6) верны вне некоторого множества интервалов конечной логарифмической меры). Если R_0 — достаточно велико, то

$$\frac{1+o(1)}{|a_{n+1}|}\ \frac{\ln^{1+\alpha}M(R,\ v)}{M(R,\ v)}<1$$

и

$$M^n(R,\ v)<M(R,\ F),$$

что и требовалось доказать.

4.6. Введем в рассмотрение оператор D_j по определению:

$$D_j f(z_1, z_2) = z_j \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_j}. \tag{1.4.6}$$

Очевидно, оператор D_j однороден, линеен и коммутативен в классе целых функций.

Рассмотрим ряд

$$\ln f(w_1 e^{a_1\eta_1}, w_2 e^{a_2\eta_2}) = \ln f(w_1, w_2) + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (a_1 \eta_1 D_1 + a_2 \eta_2 D_2)^j \ln f(w_1, w_2); \tag{2.4.6}$$

здесь $(w_1, w_2) \in S(R)$; $S(1) \in \Sigma(a_1, a_2, \delta)$; $R \notin E$, где множество E определяется в соответствии с леммой 1.2.3, причем

$$\left| f(w_1, w_2) \right| > \frac{1}{K^{\beta}(R)} M(R), \quad \beta < \frac{\delta}{1+\delta}, \quad |w_j| = |\zeta_j|. \tag{3.4.6}$$

По доказанному в п.2.6 этот ряд сходится при

$$|\eta_j| \leqslant \frac{1}{K^{\frac{1}{1+\delta}+\beta} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K}; \quad K = K(R), \quad j = 1, 2.$$

Оценку коэффициентов ряда (2.4.6) произведем по его действительной части. По (1.4.5) при $|\eta_j| \leqslant (K^{\frac{1}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K)^{-1}$

$$\ln \left| \frac{f(w_1 e^{a_1\eta_1}, w_2 e^{a_2\eta_2})}{f(w_1, w_2)} \right| - a_1 K_1 \tau_1 - a_2 K_2 \tau_2 \leqslant K^{\frac{\delta}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K\tau + B \ln K,$$

где $B > \beta$ — некоторая постоянная. Применяя лемму 1.1.6 к ряду для функции

$$\ln \frac{f(w_1 e^{a_1\eta_1}, w_2 e^{a_2\eta_2})}{f(w_1, w_2)} - a_1 K_1 \eta_1 - a_2 K_2 \eta_2,$$

получим:

$$\left| a_j \left(D_j \ln f(w_1, w_2) - K_j \right) \right| \leqslant 2 \left(\frac{K^{\frac{\delta}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K}{K^{\frac{1}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K} + B \ln K \right) K^{\frac{1}{1+\delta}+\beta} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K \leqslant \\ \leqslant c' K^{\frac{1}{1+\delta}+\beta} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}+1} K, \tag{4.4.6}$$

(здесь $c' > 0$ — некоторая постоянная, которая от R не зависит). Разделив обе стороны неравенства (4.4.6) на K и переходя к пределу при $R \to \infty$, найдем вне множества интервалов E:

$$\lim_{R\to\infty} \left(\frac{D_j \ln f(w_1, w_2)}{K} - \alpha_j \right) = 0; \qquad j = 1, 2, \tag{5.4.6}$$

где $\frac{K_j}{K} = \alpha_j \geqslant 0$ и $a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 = 1$.

Для других коэффициентов ряда (1.4.6) мы выводим:

$$\frac{a_1^{i_1} a_2^{i_2}}{i_1!\, i_2!} \left| D_1^{i_1} D_2^{i_2} \ln f(w_1, w_2) \right| \leqslant 2 [K^{\frac{\delta}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K + \beta \ln K] [K^{\frac{1}{1+\delta}+\beta} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K]^{i_1+i_2-1},$$

или

$$\left| D_1^{i_1} D_2^{i_2} \ln f(w_1, w_2) \right| \leqslant c(i_1, i_2) K^{\frac{\delta}{1+\delta}} [K^{\frac{1}{1+\delta}+\beta}]^{i_1+i_2-1} (\ln^{1+\alpha} K)^{\frac{i_1+i_2}{2}}, \tag{5.4.6}$$

где $c(i_1, i_2) \leqslant 2 \frac{i_1!\, i_2!}{a_1^{i_1} a_2^{i_2}} \left(1 + o(1)\right)$; $i_1 + i_2 \geqslant 2$. Итак мы получили следующее предложение.

Теорема 1.4.6. *Вне некоторого множества интервалов E конечной логарифмической меры на оси R справедливы неравенства:*

$$\left| D_1^{i_1} D_2^{i_2} \ln f(w_1, w_2) \right| \leqslant c(i_1, i_2)\ K^{\frac{\delta}{1+\delta}} \left(K^{\frac{1}{1+\delta}+\beta}\right)^{i_1+i_2-1} \left(\ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K\right)^{i_1+i_2-1} \ln K,$$

где

$$(w_1, w_2) \in S(R);\ \left| f(w_1, w_2) \right| > K^{-\beta} M(R);\ \ \beta < \frac{\delta}{1+\delta};$$

$$S(1) \in \sum (a_1, a_2, \delta);\ i_1 + i_2 \geqslant 2,\ |w_j| \doteq |\zeta_j|.$$

Кроме того верны предельные равенства

$$\lim_{R\to\infty} \left(\frac{D_j \ln f(w_1, w_2)}{K} - \alpha_j\right) = 0; \quad j = 1, 2, \tag{7.4.6}$$

причем $\alpha_j = \frac{K_j}{K} \geqslant 0$, $a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 = 1$.

В частности, если $w_j = \zeta_j$, *где* $(\zeta_1\ \zeta_2)$ — *точка максимума функции* $|f(z_1, z_2)|$ *на гиперповерхности* $S(R)$, *то* $D_j \ln f(\zeta_1, \zeta_2) = K_j$; $j = 1, 2$ *и*

$$\left| D_1^{i_1} D_2^{i_2} \ln f(\zeta_1, \zeta_2) \right| \leqslant c(i_1, i_2)\ K^{\frac{\delta-1}{\delta+1}} \left(K^{\frac{1}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K\right)^{i_1+i_2};\quad i_1 + i_2 \geqslant 1. \tag{8.4.6}$$

Во всех этих неравенствах

$$c(i_1, i_2) \leqslant 2\ \frac{i_1!\ i_2!}{a_1^{i_1}\ a_2^{i_2}} \left(1 + o(1)\right).$$

Если всюду положить $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, то

$$\ln f(w_1 e^{a_1\eta},\ w_2 e^{a_2\eta}) - \ln f(w_1, w_2) - K\eta =$$
$$= \left(a_1 D_1 \ln f(w_1, w_2) - a_2 D_2 \ln f(w_1, w_2) - K\right)\eta +$$
$$+ \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\eta^j}{j!} (a_1 D_1 + a_2 D_2)^j \ln f(w_1, w_2)$$

и, аналогично предыдущему, найдем следующее предложение.

Теорема 2.4.6. *При любом исчерпании пространства C^2 семейством параболически подобных круговых областей при*

$$\left| f(w_1, w_2) \right| > K^{-\beta} M(R);\quad \beta < \frac{1}{2},$$

и всех R вне некоторого множества интервалов ограниченной логарифмической меры справедливы неравенства:

$$\left| (a_1 D_1 + a_2 D_2)^j \ln f(w_1, w_2) \right| \leqslant c(j)\ K^{\frac{1}{2}+\beta} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K)^j \ln K,$$

$$c(j) = \left[2 + o(1)\right] j!;\quad j \geqslant 2. \tag{9.4.6}$$

Кроме того, вне того же множества E верно предельное равенство:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{(a_1 D_1 + a_2 D_2) \ln f(w_1, w_2)}{K} = 1. \tag{10.4.6}$$

5.6. Неравенства (6.4.6) или (8.4.6) позволяют получить оценки для функции $\omega_n(\eta_1, \eta_2)$ в тождестве

$$f(w_1 e^{a_1\eta_1},\ w_2 e^{a_2\eta_2}) = f(w_1, w_2)\ e^{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} (\eta_1 a_1 D_1 + \eta_2 a_2 D_2)^j \ln f(w_1\ w_2)} \times$$
$$\times \left(1 + \omega_n(\eta_1, \eta_2)\right) \tag{1.5.6}$$

(ср. с [10]). В соответствии с (2.4.6) имеем:

$$\ln\left(1+\omega_n(\eta_1,\ \eta_2)\right)=\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!}\ (\eta_1 a_1 D_1+\eta_2 a_2 D_2)^j \ln f(w_1,\ w_2).$$

Отсюда, воспользовавшись оценками (6.4.6), найдем при

$$|\eta_j|\leqslant\tau;\quad j=1,\ 2;\quad \tau\leqslant\left(K^{\frac{1}{1+\delta}+\beta}\ln^{\frac{1+\alpha'}{2}}K\right)^{-1},\ R\notin E,$$

где E — множество интервалов, исключаемое в согласии с теоремой 1.4.6,

$$\ln\left(1+\omega_n(\eta_1,\ \eta_2)\right)\Big|\leqslant\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!}\ \Big|\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}a_1^k a_2^{j-k}\eta_1^k\eta_2^{j-k}D_1^k D_2^{j-k}\ln f(w_1,\ w_2)\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\left(2+o(1)\right)K^{\frac{\delta-1}{\delta+1}-\beta}\sum_{j=n+1}^{\infty}(j+1)\ \left(K^{\frac{1}{1+\delta}+\beta}\ln^{\frac{1+\alpha'}{2}}K\tau\right)^j.$$

Положим

$$K^{\frac{1}{1+\delta}+\beta}\ln^{\frac{1+\alpha'}{2}}K\tau=q<1.$$

Тогда

$$\Big|\ln\left(1+\omega_n(\eta_1,\ \eta_2)\right)\Big|\leqslant\left[2+o(1)\right]K^{\frac{\delta-1}{\delta+1}-\beta}\left(K^{\frac{1}{1+\delta}+\beta}\ln^{\frac{1+\alpha'}{2}}K\tau\right)^{n+1}\sum_{j=0}^{\infty}(n+j+1)\,q^j\leqslant$$

$$\leqslant 2\left(1+o(1)\right)\frac{n+1}{(1-q)^2}K^{\frac{\delta-1}{\delta+1}-\beta}\left(K^{\frac{1}{1+\delta}}\ln^{\frac{1+\alpha'}{2}}K\tau\right)^{n+1}.\qquad(2.5.6)$$

Из $|\ln(1+\omega_n)|=p$ следует, что если $p\to 0$, то и $\omega_n\to 0$. Таким образом, если $\alpha>\alpha'$ и R достаточно велико, то

$$K^{\frac{1}{1+\delta}+\beta}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K\tau<1$$

и

$$\Big|\omega_n(\eta_1,\ \eta_2)\Big|\leqslant K^{\frac{\delta-1}{\delta+1}-\beta}\left(K^{\frac{1}{1+\delta}+\beta}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K\right)^{n+1}(n+1)\ \tau^{n+1}.$$

Если $\eta_1=\eta_2=\eta$, то аналогично предыдущему на основании (9.4.6) при $\beta<\frac{1}{2}$, найдем

$$\Big|\omega_n(\eta_1,\ \eta_2)\Big|\leqslant\ln K\ \left(K^{\frac{1}{2}+\beta}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K\tau\right)^{n+1};\qquad|\eta_j|\leqslant\tau\leqslant\frac{1}{K^{\frac{1}{2}+\beta}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}}K}$$

при $R>R_0$ вне некоторого множества интервалов оси R ограниченной логарифмической меры.

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 1.5.6. *Пусть* $f(z_1,\ z_2)$ — *целая трансцендентная функция*; $V(R)=V(R,\ a_1,\ a_2)$ — *семейство параболически подобных круговых областей, а* $S(R)=S(R,\ a_1,\ a_2)$ — *ограничивающие их гиперповерхности, причем* $S(1)\in\Sigma(a_1,\ a_2,\ \delta)$. *Пусть, далее,*

$$\Big|f(w_1,\ w_2)\Big|\geqslant K^{-\beta}M(R);\quad\beta<\frac{\delta}{1+\delta};\quad(w_1,\ w_2)\in S(R);\quad|w_j|=|\zeta_j|.$$

Тогда в выражении

$$f(w_1 e^{a_1\eta_1}, w_2 e^{a_2\eta_2}) = f(w_1, w_2)\, e^{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{j!}(a_1\eta_1 D_1 + a_2\eta_2 D_2)^j \ln f(w_1, w_2)} \left(1+\omega_n(\eta_1, \eta_2)\right) \quad (1.5.6)$$

вне некоторого множества интервалов оси R конечной логарифмической меры при $|\eta_j| \leqslant \tau \leqslant (K^{\frac{1}{1+\delta}+\beta} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K)^{-1}$; $j=1, 2, \quad n>1$

$$\left|\omega_n(\eta_1, \eta_2)\right| \leqslant (n+1)\, K^{-\frac{1-\delta}{1+\delta}-\beta} (K^{\frac{1}{1+\delta}+\beta} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K\tau)^{n+1} \quad (3.5.6)$$

(*исключаемое множество от* α *зависит*).

Если $\eta_1=\eta_2=\eta$, *то вне исключаемого множества интервалов, при любой гиперповерхности* S (R) $\left(\textit{не обязательно } S(1) \in \Sigma(a_1, a_2, \delta)\right)$ и $|\eta| \leqslant \leqslant \tau \leqslant (K^{\frac{1}{2}+\beta} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K)^{-1}$,

$$\left|\omega_n(\eta, \eta)\right| \leqslant K^{-\beta} (K^{\frac{1}{2}+\beta} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K\tau)^{n+1}. \quad (4.5.6)$$

Замечание 1. В выражении

$$f(w_1 e^{a_1\eta_1}, w_2 e^{a_2\eta_2}) = f(w_1, w_2)\, e^{\sum\limits_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j!}(\eta_1 a_1 D_1 + \eta_2 a_2 D_2)^j \ln f(w_1, w_2)} \times$$

$$\times e^{\sum\limits_{i_1+i_2=n;\ i_1\leqslant j_1;\ i_2\leqslant j_2} \frac{1}{i_1!\, i_2!} a_1^{i_1} a_2^{i_2} D_1^{i_1} D_2^{i_2} \ln f(w_1, w_2)\, \eta_1^{i_1} \eta_2^{i_2}} \left(1+\omega_{j_1 j_2}(\eta_1, \eta_2)\right)$$

Функция $\omega_{j_1 j_2}(\eta_1, \eta_2)$ оценивается так же, как и функция $\omega_n(\eta_1, \eta_2)$.

Замечание 2. В случае $m>2$ переменных в неравенстве (3.5.6) вместо $(n+1)$ должно быть $(n+1)^{m-1}$.

§ 7. Соотношения для частных производных целых трансцендентных функций при больших значениях их модулей

1.7. Рассмотрим два степенных разложения:

$$f(w_1 e^{a_1\eta_1}, w_2 e^{a_2\eta_2}) = f(w_1, w_2) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (a_1\eta_1 D_1 + a_2\eta_2 D_2)^j \cdot f(w_1, w_2) \quad (1.1.7)$$

и

$$\ln f(w_1 e^{a_1\eta_1}, w_2 e^{a_2\eta_2}) = \ln f(w_1, w_2) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (a_1\eta_1 D_1 + a_2\eta_2 D_2)^j \ln f(w_1, w_2). \quad (2.1.7)$$

Мы видели, что если выполнено условие (3.4.6), ряд (2.1.7) сходится в бицилиндре

$$|\eta_j| \leqslant (K^{\frac{1}{1-\delta}+\beta} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K)^{-1}$$

в то время, как ряд (1.1.7) сходится во всем пространстве переменных (η_1, η_2). Из ряда (2.1.7) находим:

$$f(w_1 e^{a_1\eta_1}, w_2 e^{a_2\eta_2}) = f(w_1, w_2)\exp\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}(a_1\eta_1 D_1 + a_2\eta_2 D_2)^j \ln f(w_1, w_2) =$$

$$= f(w_1, w_2)\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}(a_1\eta_1 D_1 + a_2\eta_2 D_2)^j \ln f(w_1, w_2)\right)^k\right. . \quad (3.1.7)$$

Сравнением рядов (1.1.7) и (3.1.7) мы хотим выразить $D_1^{i_1} D_2^{i_2} f(w_1, w_2)$ через $D_1^{j_1} D_2^{j_2}\ln f(w_1, w_2)$. Коэффициент при $\eta_1^{i_1}\eta_2^{i_2}$ в ряде (1.1.7), равен

$$A_{i_1 i_2} = \frac{a_1^{i_1} a_2^{i_2}}{i_1!\, i_2!} D_1^{i_1} D_2^{i_2} f,$$

Тот же коэффициент в разложении (3.1.7) выглядит сложнее, а именно имеет следующий вид:

$$\frac{i_1!\, i_2!}{a_1^{i_1} a_2^{i_2}} A_{i_1 i_2} = f\left\{(D_1 \ln f)^{i_1}(D_2 \ln f)^{i_2} + \right.$$

$$\left. + \sum_s A_{m_1^{(1)} m_2^{(1)} m_1^{(2)} m_2^{(2)} \dots m_1^{(s)} m_2^{(s)}} \prod_{p=1}^{s}\left(D_1^{m_1^{(p)}} D_2^{m_2^{(p)}} \ln f\right)^{j_{m_1^{(p)} m_2^{(p)}}}\right\} =$$

$$= f\left\{(D_1 \ln f)^{i_1}(D_2 \ln f)^{i_2} + Q\right\}, \quad (4.1.7)$$

где $A_{m_1^{(1)} m_2^{(1)} \dots m_1^{(s)} m_2^{(s)}}$ — постоянные коэффициенты, а суммирование распространяется на все $m_1^{(p)}$, $m_2^{(p)}$ и $j_{m_1^{(p)} m_2^{(p)}}$, для которых

$$\sum_{p=1}^{s}(m_1^{(p)} + m_2^{(p)})\, j_{m_1^{(p)} m_2^{(p)}} = i_1 + i_2,$$

причем в каждом слагаемом в выражении для Q $j_{01} + j_{10} \leqslant i_1 + i_2 - 1$.

В условиях теоремы 1.4.6 вне указанного там множества интервалов E конечной логарифмической меры имеют место равенства:

$$\lim_{R\to\infty}\left(\frac{D_j \ln f(w_1, w_2)}{K} - \alpha_j\right) = 0; \quad (5.1.7)$$

$$\alpha_j = \alpha_j(R) \geqslant 0; \quad a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = 1; \quad j = 1,\ 2.$$

Мы сейчас покажем, что вне этого же множества E справедливо неравенство

$$|Q| \leqslant CK^{\frac{1}{1+\delta}+\beta} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K\,(K \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K)^{i_1+i_2-1}, \quad (6.1.7)$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная.

Действительно, если заметить, что $\left| D_j \ln f(w) \right| \leqslant \left(1+o(1)\right) K$, то общий член суммы Q по теореме 1.4.6 не превосходит выражения (напомним, что $\frac{\delta-1}{\delta+1}-\beta\leqslant 0$, а $j_{01}+j_{10}\leqslant i_1+i_2-1$):

$$CK^{j_{10}+j_{01}}\left(K^{\frac{\delta-1}{\delta+1}-\beta}\right)^{\Sigma j_{m_1^{(p)}} j_2^{(p)}}\left(K^{\frac{1}{1+\delta}+\beta}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K\right)^{i_1+i_2-j_{01}-j_{01}}\leqslant$$

$$\leqslant CK^{j_{10}+j_{01}+\left(\frac{1}{1+\delta}+\beta\right)(i_1+i_2-j_{01}-j_{10})}\left(\ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K\right)^{i_1+i_2}\leqslant$$

$$\leqslant CK^{\left(-\beta-\frac{1}{1+\delta}+1\right)(i_1+i_2-1)+\left(\frac{1}{1+\delta}+\beta\right)(i_1+i_2)}\left(\ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K\right)^{i_1+i_2}=$$

$$=CK^{\frac{1}{1+\delta}+\beta}\ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K\left(K\ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K\right)^{i_1+i_2-1},$$

что и требовалось доказать.

Отметим, наконец, тождество:

$$D_1^{i_1} D_2^{i_2} f = z_1^{i_1} z_2^{i_2}\frac{\partial^{i_1+i_2} f}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}}+\sum_{j_1+j_2=1}^{i_1+i_2-1} B_{j_1 j_2} z_1^{j_1} z_2^{j_2}\frac{\partial^{j_1+j_2} f}{\partial z_1^{j_1}\partial z_2^{j_2}}, \tag{7.1.7}$$

где $B_{j_1 j_2}$ — постоянные коэффициенты, которое легко проверяется методом математической индукции.

2.7. Полученные в предыдущем пункте тождества и оценки позволяют доказать следующее предложение.

Теорема 1.2.7. *Пусть $V(R)$ — семейство параболически подобных круговых областей, исчерпывающее пространство C^2, а $S(R)$ — соответствующее семейство ограничивающих эти области гиперповерхностей, причем $S(1)\in\Sigma(a_1, a_2, \delta)$. Пусть, далее, $f(z_1, z_2)$ целая трансцендентная функция, а $\{(w_1, w_2)\}$ — множество таких точек, что когда $(w_1, w_2)\in S(R)$, то*

$$\left| f(w_1, w_2)\right| \geqslant K^{-\beta} M(R),\quad \beta<\frac{\delta}{1+\delta},\quad |w_j|=|\zeta_j|. \tag{1.2.7}$$

Тогда вне некоторого множества интервалов E на оси R конечной логарифмической меры имеют место соотношения:

$$\lim_{R\to\infty}\left(\frac{w_1^{i_1} w_2^{i_2}\dfrac{\partial^{i_1+i_2} f(w)}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}}}{K^{i_1+i_2} f(w)}-\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}\right)=0, \tag{2.2.7}$$

где

$$\alpha_j=\alpha_j(R)\geqslant 0;\quad j=1,\ 2;\quad a_1\alpha_1+a_2\alpha_2=1.$$

Доказательство. Исключим из оси R множество интервалов E, определенное теоремой 1.4.6. Пусть теперь $R\notin E$. По (4.1.7) и (7.1.7)

$$z_1^{i_1} z_2^{i_2}\frac{\partial^{i_1+i_2} f}{\partial z_1^{i_1}\partial z_2^{i_2}}=-\sum_{j_1+j_2=1}^{i_1+i_2-1} B_{j_1 j_2} z_1^{j_1} z_2^{j_2}\frac{\partial^{j_1+j_2} f}{\partial z_1^{j_1}\partial z_2^{j_2}}+f\left\{(D_1\ln f)^{i_1}(D_2\ln f)^{i_2}+Q\right\}. \tag{3.2.7}$$

Доказательство проведем сейчас методом математической индукции. Сначала заметим, что согласно (5.1.7) формулы (2.2.7) справедливы при $i_1+i_2=1$. Допустим теперь, что эти формулы верны при $i_1+i_2=m-1$. Положим теперь в (3.2.7) $z_j=w_j$; $j=1,\ 2$ и разделим после этого все это тождество на $K^{i_1+i_2}$; затем перейдем к пределу при $R\to\infty$. Под знаком суммы в (3.2.7) входят производные порядка ниже i_1+i_2, поэтому

$$z_1^{i_1-p_1} z_2^{i_2-p_2} \frac{1}{f} \frac{\partial^{i_1+i_2-p} f}{\partial z_1^{i_1-p_1} \partial z_2^{i_2-p_2}} : K^{i_1+i_2} \to 0 \ (p_1+p_2=p>0)$$

при $R\to\infty$, $R\notin E$. Сумма Q, разделенная на $K^{i_1+i_2}$, также стремится к нулю в соответствии с оценкой (6.1.7). Действительно

$$\frac{|Q|}{K^{i_1+i_2}} \leqslant C \frac{K^{\frac{1}{1+\delta}+\beta} \ln^{1+\alpha} K \,(K \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K)^{i_1+i_2-1}}{K^{i_1+i_2}} = C \frac{(\ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K)^{i_1+i_2}}{K^{1-\frac{1}{1+\delta}-\beta}} \underset{R\to\infty}{\to} \infty, \qquad (4.2.7)$$

так как $\frac{1}{1-\delta}+\beta<\frac{1+\delta}{1+\delta}=1$, а $K(R)\to\infty$ при $R\to\infty$. Таким образом мы с помощью (5.1.7) из (3.2.7) находим (2.2.7).

Теорема доказана.

Отметим, что принадлежность гиперповерхности $S(1)$ классу $\Sigma(a_1, a_2, \delta)$ существенно для справедливости теоремы 1.2.7. Так, например, теорема не верна для функции $u=e^z+e^w$ при исчерпании пространства C^2 бицилиндрами $|z|\leqslant R$; $|w|\leqslant R$. Действительно, в этом случае $\max|u|$ достигается в этом бицилиндре в точке $z=w=R$, а тогда $M(R)=2e^R$, $K(R)=R$, $K_j(R)=\frac{R}{2}$. Но $R^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial w}=0$, в то время, как $\alpha_1\cdot\alpha_2=\frac{1}{4}$.

Примечание. Теорема 1.2.7 доказывается на основании тождества (3.2.7), из которого можно получить также следующую оценку:

$$Q_{i_1 i_2} = \left| \frac{w_1^{i_1} w_2^{i_2} \dfrac{\partial^{i_1+i_2} f(w)}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}}}{K^{i_1+i_2} f(w)} - \alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2} \right| < C_{i_1+i_2} \frac{(\ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K)^{i_1+i_2} \ln K}{K^{\frac{\delta}{1+\delta}-\beta}}, \qquad (5.2.7)$$

где $C_{i_1+i_2}$ — абсолютные постоянные, которые от индивидуальной функции f не зависят.

Для доказательства допустим, что при $1\leqslant i_1+i_2\leqslant m-1$

$$Q_{i_1 i_2} < C_{i_1+i_2} \frac{(\ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K)^{i_1+i_2}}{K^{\frac{\delta}{1+\delta}-\beta}} \ln K.$$

Нетрудно видеть по (4.4.6), что

$$Q_{i_1 i_2} < C_1 \frac{\ln^{\frac{1+\alpha}{2}+1} K}{K^{\frac{\delta}{1+\delta}-\beta}}; \quad i_1+i_2=1. \qquad (6.2.7)$$

На основании сделанного предположения из (3.2.7) после деления на $K^{i_1+i_2}$, найдем

$$Q_{i_1+i_2+1} < \sum_{j_1+j_2=2}^{i_1+i_2} B_{j_1 j_2} \left(\frac{1}{K} + C_{j_1 j_2} \frac{(\ln^{1+\alpha} K)^{\frac{j_1+j_2}{2}}}{K^{\frac{\delta}{1-\delta}-\beta}} \right) +$$

$$+ C \frac{(\ln^{1+\alpha} K)^{\frac{i_1+i_2+1}{2}}}{K^{\frac{\delta}{1+\delta}-\beta}} < C_{i_1+i_2+1} \frac{(\ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K)^{i_1+i_2+1} \ln K}{K^{\frac{\delta}{1+\delta}-\beta}},$$

что мы и утверждали.

Умножая равенства (2.2.7) на $\binom{m}{i_1} a_1^{i_1} a_2^{i_2} w_1^{i_1} w_2^{i_2}$ и суммируя по i_1, мы выводим соотношения, верные при любом R вне E

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\left(a_1 w_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + a_n w_n \frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{(m)} f(w)}{K^m f(w)} = 1. \tag{7.2.7}$$

Нетрудно показать, что соотношение (7.2.7) верно и в том случае, когда гиперповерхность $S(1)$ (см. теорему 1.2.7) не принадлежит классу $\Sigma(a_1, \ldots, a_n, \delta)$. Наметим здесь путь, ведущий к доказательству сказанного. Полагая в (3.1.7) $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, мы тем же способом, каким вывели равенство (3.2.7), найдем тождество для выражения

$$\frac{\left(a_1 w_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + a_n w_n \frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{(m)} f(w)}{f(w)},$$

аналогичное тождеству (3.2.7) и тогда на основании (13.1.2) точно также, как и выше при доказательстве теоремы 1.2.7, найдем следующее предложение.

Теорема 2.2.7. *Пусть $V(R)$ — семейство параболически подобных произвольных круговых областей, исчерпывающее пространство C^2. При всех условиях теоремы 1.2.7, вне некоторого множества интервалов E оси R конечной логарифмической меры справедливы предельные соотношения (при любом m; не обязательно $w_j = \zeta_j$)*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\left(a_1 w_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + a_2 w_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{(m)} f(w)}{K^m f(w)} = 1. \tag{8.2.7}$$

Примечание. Очевидно, что теоремы 1.2.7 и 2.2.7 будут верны и в том случае, когда $w_j = \zeta_j$; $j = 1, 2$, т. е. когда $\beta = 0$, а точка (ζ_1, ζ_2) — есть точка максимума функции $|f(z_1, z_2)|$ на гиперповерхности $S(R)$.

3.7. Теоремы 1.2.7 и 2.2.7 допускают простые обобщения: названные теоремы верны, если в них вместо целых трансцендентных функций рассматривать функции

$$f(z_1, z_2) = z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} F(z_1, z_2), \tag{1.3.7}$$

где λ_1 и λ_2 — постоянные комплексные числа, а $F(z_1, z_2)$ — целая трансцендентная функция. При этом условие (1.2.7) надо записать для функции $F(z_1, z_2)$. В самом деле, тождество

$$\frac{\partial^{i_1+i_2} f}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}} = \frac{\partial^{i_1+i_2} (z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} F)}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}} = z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \frac{\partial^{i_1+i_2} F}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}} +$$

$$+ \sum_{j_1+j_2=1}^{i_1+i_2} \tilde{B}_{j_1 j_2} z_1^{\lambda_1 - j_1} z_2^{\lambda_2 - j_2} \frac{\partial^{i_1-j_1+i_2-j_2} F}{\partial z_1^{i_1-j_1} \partial z_2^{i_2-j_2}}, \tag{2.3.7}$$

где $\tilde{B}_{j_1 j_2}$ — постоянные числа, легко вывести методом полной математической индукции. Разделим теперь (2.3.7) на

$$\frac{K^{i_1+i_2} f}{z_1^{i_1} z_2^{i_2}} = \frac{K^{i_1+i_2} z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} F}{z_1^{i_1} z_2^{i_2}},$$

положим там $z_j = w_j$ и перейдем к пределу при $R \to \infty$. Так как для функции $F(w_1, w_2)$ теоремы 1.2.7 и 2.2.7 верны $\left(K(R) = \frac{RM'(R, F)}{M(R, F)}\right)$, то отношение

$$\frac{w_1^{j_1} w_2^{j_2} \dfrac{\partial^{j_1+j_2} F(w)}{\partial z_1^{j_1} \partial z_2^{j_2}}}{K^{j_1+j_2} F(w)} \underset{R\to\infty}{\to} 0$$

при $j_1 + j_2 < i_1 + i_2$, а тогда вне E

$$\lim_{R\to\infty} \frac{w_1^{i_1} w_2^{i_2} \dfrac{\partial^{i_1+i_2} F(w)}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}}}{K^{i_1+i_2} F(w)} = \lim_{R\to\infty} \frac{w_1^{i_1} w_2^{i_2} \dfrac{\partial^{i_1+i_2} f(w)}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}}}{K^{i_1+i_2} f(w)}.$$

Последнее равенство и доказывает наше обобщение.

4.7. Покажем, что *существует предел*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{K^p(R)}{M(R)} = 0, \tag{1.4.7}$$

где R, пробегая ось R, пропускает некоторое множество E интервалов оси R конечной логарифмической меры, при любом постоянном p. Действительно

$$K(R)\,\tau \leqslant \ln M(Re^{\tau}) - \ln M(R).$$

По лемме 1.2.3 при $\tau \leqslant \left(\ln\ln M(R)\right)^{-(1+\alpha)}$ вне некоторого множества интервалов E конечной логарифмической меры

$$\ln M(Re^{\tau}) \leqslant C \ln M(R),$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная. Следовательно, вне E

$$K(R) \leqslant \ln M(R) \ln^{1+\alpha} \ln M(R) < \ln^2 M(R)$$

и

$$\ln M(R) > \sqrt{K(R)}, \quad M(R) > e^{\sqrt{K(R)}},$$

Отсюда

$$0 < \frac{K^p(R)}{M(R)} < \frac{K^p(R)}{e^{\sqrt{K(R)}}} \underset{R\to\infty}{\to} 0,$$

что мы и утверждали.

§ 8. Связь с коэффициентами тейлоровских разложений

1.8. В этом параграфе мы займемся выяснением вопроса о связи, существующей между функцией $K(R)$ и коэффициентами тейлоровского разложения функции $f(z_1, z_2)$. Пусть

$$f(z_1, z_2) = \sum_{i+j=0}^{\infty} a_{ij} z_1^i z_2^j. \tag{1.1.8}$$

Наряду с функцией (1.1.9) рассмотрим также функцию

$$F(z_1, z_2) = \sum_{i+j=0}^{\infty} |a_{ij}|\, z_1^i z_2^j. \tag{2.1.8}$$

Очевидно

$$M(R, f) \leqslant M(R, F), \tag{3.1.8}$$

где пространство C^2 исчерпывается семейством параболически подобных произвольных круговых областей $V(R)$. Через $S(R)$ мы обозначаем гиперповерхность, ограничивающую область $V(R)$. По теореме Коши, если $(z_1, z_2) \in S(R)$, то

$$|a_{ij}| \leqslant \frac{M(R, f)}{r_1^i r_2^j}; \quad |z_k| = r_k; \quad k=1, 2. \tag{4.1.8}$$

Тогда при

$$(z_1, z_2) \in S(R) \ (z_1 e^{a_1 \tau_0}, z_2 e^{a_2 \tau_0}) \in S(\mathrm{Re}^{\tau_0})$$

и

$$F(r_1, r_2) \leqslant M(\mathrm{Re}^\tau, f) \sum_{i+j=0}^{\infty} e^{-(a_1 i + a_2 j)\tau} \leqslant$$

$$\leqslant M(\mathrm{Re}^\tau, f) \sum_{i=0}^{\infty} e^{-a_1 i} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-a_2 j} = \frac{M(\mathrm{Re}^\tau, f)}{(1-e^{-a_1\tau})(1-e^{-a_2\tau})}$$

и при τ достаточно малых, когда $1-e^{-a\tau} > c_0\tau$; $c_0 = \mathrm{const}$

$$M(R, F) = F(r_1, r_2) < C\,\frac{M(\mathrm{Re}^\tau, f)}{\tau^2} < C\,\frac{M(R, f)\, e^{K(\mathrm{Re}^\tau, f)\tau}}{\tau^2}$$

(здесь $C>0$ – некоторая постоянная). По лемме 1.2.3 вне некоторого множества интервалов конечной логарифмической меры оси R при $\tau \leqslant K^{-1}(R, f)$

$$K(\mathrm{Re}^\tau, f) - K(R, f) < \ln^{1+\alpha} K(R, f),$$

и поэтому

$$M(R, F) < C_0 M(R, f)\, K^2(R, f),$$

где $C_0 > 0$ – новая постоянная, которая от R не зависит. Следовательно,

$$M(R, f) \leqslant M(R, F) < C_0 M(R, f)\, K^2(R, f). \tag{5.1.8}$$

Прежде всего

$$K(R, h)\,\tau \leqslant \ln M(\mathrm{Re}^\tau, h) - \ln M(R, h) \leqslant K(\mathrm{Re}^\tau, h)\,\tau \tag{6.1.8}$$

и по (5.1.8)

$$-\ln C_0 - 2\ln K(R,f) + \ln M(\mathrm{Re}^\tau, f) - \ln M(R,f) < \ln M(\mathrm{Re}^\tau, F) - \ln M(R, F) <$$
$$< \ln C_0 + 2\ln K(\mathrm{Re}^\tau, f) + \ln M(\mathrm{Re}^\tau, f) - \ln M(R, f)$$

или, в соответствии с (6.1.8),

$$K(R, f)\,\tau < K(\mathrm{Re}^\tau, F)\,\tau + |\ln C_0| + 2\ln K(R, f) \tag{7.1.8}$$

и

$$K(R, F)\,\tau < K(\mathrm{Re}^\tau, f)\,\tau + |\ln C_0| + 2\ln K(\mathrm{Re}^\tau, f). \tag{8.1.8}$$

Далее, вне некоторого множества интервалов E_0 ограниченной логарифмической меры при $\tau \leqslant \left(K(R, F) \ln^{1+\alpha} K(R, F)\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$K(\mathrm{Re}^\tau, F) = \left(1 + o(1)\right) K(R, F)$$

и при $\tau \leqslant \left(K(R, f) \ln^{1+\alpha} K(R, f)\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$K(\mathrm{Re}^\tau, f) = \left(1 + o(1)\right) K(R, f). \tag{9.1.8}$$

Тогда вне E_0 из (8.1.8) при $\tau = \sqrt{K(R, f) \ln^{1+\alpha} K(R, f)}$ вытекает, что

$$K(R, F) \leqslant \left(1 + o(1)\right) K(R, f). \tag{10.1.8}$$

Если в (7.1.8) сейчас положить $\tau=[2K(R, f)\ \ln^{1+\alpha} K(R, f)]^{-\frac{1}{2}}$, то, учитывая (9.1.8) и (10.1.8), получим неравенство

$$K(R, f) \leqslant \left(1+o(1)\right) K(R, F).$$

Следовательно,

$$K(R, f) = \left(1+o(1)\right) K(R, F). \tag{11.1.8}$$

Мы пришли к следующему выводу:

для всех трансцендентных функций, модули коэффициентов тейлоровских разложений которых одни и те же, в качестве функции сравнения можно взять функцию $K(R, F)$ $\left(F \text{ определена в } (2.1.8)\right)$.

2.8. В оценке (3.1.8) функцию $M(R, f)$ можно заменить максимальным членом $\mu(R, f)$, определяемым следующим образом:

$$\mu(R, f)=\max_{i,j}\ \max_{S(R)} |a_{ij}\, r_1^i\, r_2^j| = \max_{i,j} R^{a_1 i+a_2 j} \max_{S(1)} |a_{ij}\, r_1^i\, r_2^j|.$$

Легко видеть, что искомый максимум достигается при конечных значениях индексов i и j. Из всех пар i, j, для которых достигается искомый максимум, выбираем ту пару, для которой сумма $a_1 i+a_2 j$ имеет наибольшее значение (a_1, a_2 — числа, характеризирующие параболическое подобие семейства круговых областей $V(R)$). Мы обозначаем: $a_1 i+a_2 j=\nu(R, a_1, a_2)=$ $=\nu(R)$ и называем это число центральным индексом ряда (1.1.8) (при данном исчерпании). Нетрудно показать, что $\mu(R)$ возрастающая, а $\nu(r)$ — неубывающая функция, причем, кроме того, функция $\mu(R)$ непрерывна. Пусть (R_1, R_2) — интервал непрерывности функции $\nu(R)$. По изложенному в п.1.2

$$\frac{R\mu'(R)}{\mu(R)}=\nu(R)$$

и

$$\ln\mu(R)-\ln\mu(R_0)=\int_{R_0}^{R}\frac{\nu(t)}{t}\,dt. \tag{1.2.8}$$

Для коэффициентов степенного разложения функции (1.1.8) сейчас имеем:

$$|a_{ij}| \leqslant \frac{\mu(R)}{r_1^i\, r_2^j}; \quad |z_k|=r_k; \quad k=1,\ 2; \quad (z_1, z_2)\in S(R). \tag{2.2.8}$$

Наподобие тому, как мы это сделали в предыдущем пункте, из оценки (2.2.8) нетрудно вывести неравенство

$$\mu(R) \leqslant M(R, F) < C_0\,\mu(R)\ \nu^2(R),$$

а отсюда, аналогично предыдущему, показать, что

$$K(R)=\left(1+o(1)\right)\nu(R). \tag{3.2.8}$$

Последнее соотношение показывает еще нагляднее, что функция сравнения $K(R)$, немногим отличающаяся от $\nu(R)$, зависит в основном только от модулей коэффициентов тейлоровских разложений рассматриваемых функций.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
19.XII.1963.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Баврин. Оценки коэффициентов разложения аналитических функций двух комплексных переменных, Уч. зап. Моск. пед. инст. им. В. И. Ленина, т. ХС, I, вып. 6, 1960.
2. O. Blumenthal. Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini, Paris 1910.
3. Ж. Валирон. Аналитические функции, М., 1957.
4. Г. Виттих. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, М., 1960.
5. А. А. Гольдберг, И. И. Битнлян. Теорема Вимана—Валирона для целых функций многих комплексных переменных, Вестник ЛГУ, серия мех. мат. и астр., 13, 27—41, 1959.
6. А. А. Гольдберг. О целых решениях уравнений с частными производными, Изв. ВУЗ, матем. 3 (4), 62—66, 1958.
7. У. Т. Мартин, С. Бохнер. Функции многих комплексных переменных ,М., 1951.
8. A. Y. Macintyre. Wiman's method and the „flat regions" of integral functions, Quart. J. Math., 9, 81–88, 1938.
9. R. Nevanlinna. Remarques sur les fonctions monotones, Bul. des Sciences Math. 55, 140–144, 1931.
10. И. В. Островский. О применении одной закономерности, установленной Виманом и Валироном к исследованию характеристических функций вероятностных законов, ДАН СССР, 143, 3, 532—535, 1962.
11. Ш. И. Стрелиц. О максимальных модулях аналитических функций, УМН, X, 4 (66), 1955, 153—160.
12. Ш. И. Стрелиц. Теорема Вимана—Валирона для целых функций многих комплексных переменых, Мат. сб., 58 (100); 1962, 47—64.
13. Щ. И. Стрелиц. Обобщение теоремы Вимана—Валирона для целых функций многих комплексных переменных, Лит. мат. сб., 1—2, 327—354, 1961.
14. Ш. И. Стрелиц. Соотношения для производных в точках максимума модулей целой трансцендентной функции многих комплексных переменных, ДАН СССР, 145, 4, 737—740, 1962.

DAUGELIO KINTAMŲJŲ SVEIKOS TRANSCENDENTINĖS FUNKCIJOS ELGIMASIS, ESANT DIDELĖMS JOS MODULIO REIKŠMĖMS

Š. STRELICAS

(*Reziumė*)

Sakome, kad n-matę kompleksinę erdvę išsemiame paraboliškai panašių skritulinių sričių šeima $V(R, a_1, \ldots, a_n)$, kai $R\to\infty$, jeigu yra patenkintos sekančios sąlygos:

1. *kartu su tašku* $(z_1, \ldots, z_n)$ *sričiai* $V(R, a_1, \ldots, a_n)$ *priklauso kiekvienas taškas* $(z_1 e^{i\vartheta_1}, \ldots, z_n e^{i\vartheta_n})$ *su bet kuriais realiais* $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$;

2. *taškas* $(z_1, \ldots, z_n) \in V(R, a_1, \ldots, a_n)$ *tuomet ir tiktai tuomet, kai taškas*

$$\left(\frac{z_1}{R^{a_1}}, \ldots, \frac{z_n}{R^{a_n}}\right) \in V(1, a_1, \ldots, a_n).$$

Čia apibrėžtų sričių aibė sudaro klasę Σ'. Paviršių, aprėžiantį sritį $V(R, a_1, \ldots, a_n)$, mes žymime $S(R, a_1, \ldots, a_n)$. Be to, darbe yra definuojamas klasės Σ' išsėmimų poklasis, kuris charakterizuojamas pakankamu paviršių $V(1, a_1, \ldots, a_n)$ gluodumu. Atitinkamų paviršių klasę mes žymime $\Sigma(a_1, \ldots, a_n, \delta)$ (skaičius $\delta>0$ nustato tam tikra prasme liečiamosios plokštumos artimumą paviršiui $S(1, a_1, \ldots, a_n)$).

Štai keletas būdingų rezultatų.

Tegu $f(z)=f(z_1, \ldots, z_n)$ — sveika transcendentinė funkcija;

$$S(R)=S(R, a_1, \ldots, a_n); \quad V(R)=V(R, a_1, \ldots, a_n) \in \sum{}'; \quad M(R)=M(R, a_1, \ldots, a_n)=$$

$$=\max_{S(R)} |f(z)|=|f(\zeta)|; \quad \zeta \in S(R); \quad K(R)=\frac{RM'(R)}{M(R)}.$$

Teorema 1. $\ln M(R)$ *yra iškyla* $\ln R$ *funkcija.*

Teorema 2.

$$\frac{1}{f(\zeta)} \sum_{j=1}^{n} a_j \zeta_j \frac{\partial f(\zeta)}{\partial z_j}=K(R).$$

Tegu dabar papildomai $S(1, a_1, \ldots, a_n) \in \Sigma(a_1, \ldots, a_n, \delta)$. Apibrėšime toliau operatorių D_j lygybe:

$$D_j F=z_j \frac{\partial F}{\partial z_j}; \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

Teorema 3. *Išskyrus, gal būt, pusašio* $R>0$ *aprėžto logaritminio mato intervalų aibę* E

$$|D_1^{i_1} \cdots D_n^{i_n} \ln f(\zeta)|<C(i_1, \ldots, i_n) K^{\frac{\delta-1}{\delta+1}} (K^{\frac{1}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K)^{i_1+\cdots+i_n}.$$

Teorema 4.

$$\lim_{R\to\infty}\left(\frac{\zeta_1^{i_1} \cdots \zeta_n^{i_n} \dfrac{\partial^{i_1+\cdots+i_n} f(\zeta)}{\partial z_1^{i_1} \cdots \partial z_n^{i_n}}}{K^{i_1+\cdots+i_n}(R) f(\zeta)}-\prod_{j=1}^{n} \alpha_j^{i_j}\right)^{i_1+\cdots+i_n>1}=0,$$

kur

$$\alpha_j=\alpha_j(R)>0; \quad \sum_{j=1}^{n} a_j \alpha_j=1$$

ir pereinant prie ribos tenka, gal būt, praleisti intervalų aibę E, apibrėžtą teoremoje 3.

DAS VERHALTEN EINER GANZEN TRANSZENDENTEN FUNKTION BEI GROSSEN WERTEN IHRES ABSOLUTEN BETRAGES

S. STRELITS

(Zusammenfassung)

Eine Schar parabolisch ähnlicher n-kreisiger Gebiete $V(R, a_1, \ldots, a_n)$ (mit festen $a_1, \ldots, a_n$), die den n-dimensionellen Raum C^n ausschöpft bei $R\to\infty$, bestimmen die folgenden Bedingungen:

1. *ist* $(z_1, \ldots, z_n)\in V(R, a_1, \ldots, a_n)$, *ist auch* $(z_1 e^{i\vartheta_1}, \ldots, z_n e^{i\vartheta_n})\in V(R, a_1, \ldots, a_n)$ *mit beliebigen reellen* $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$;

2. $(z_1, \ldots, z_n)\in V(R, a_1, \ldots, a_n)$ *dann und nur dann, wenn*

$$\left(\frac{a_1}{R^{a_1}}, \ldots, \frac{z_n}{R^{a_n}}\right)\in V(1, a_1, \ldots, a_n).$$

Wir bezeichnen die Klasse solcher Ausschöpfungen mit Σ'. Mit $S(R, a_1, \ldots, a_n)$ bezeichnen wir weiter die Fläche, die das Gebiet $V(R, a_1, \ldots, a_n)$ begrenzt. Die Teilklasse der genügend glatten Flächen $S(1, a_1, \ldots, a_n)$ bezeichnen wir durch $\Sigma(a_1, \ldots, a_n, \delta)$ ($\delta>0$ zeigt in geeignetem Sinne, wie nah die tangente Ebene zur Flache $S(1, a_1, \ldots, a_n)$ ist).

Hier bringen wir einige charakteristische Ergebnisse.

Es seien: $f(z)=f(z_1, \ldots, z_n)$ — eine ganze transzendente Funktion

$$S(R)=S(R, a_1, \ldots, a_n); \quad V(R)=V(R, a_1, \ldots, a_n)\in\Sigma';$$

$$M(R)=M(R, a_1, \ldots, a_n)=\max_{S(R)} |f(z)|=|f(\zeta)|; \quad \zeta\in S(R); \quad K(R)=\frac{RM'(R)}{M(R)}.$$

Satz 1. $\ln M(R)$ *ist eine konvexe Funktion von* $\ln R$.

Satz 2.

$$\frac{1}{f(\zeta)}\sum_{j=1}^{n} a_j \zeta_j \frac{\partial f(\zeta)}{\partial z_j} = K(R).$$

Es sei nun $S(1)\in\Sigma(1_1, \ldots, a_n, \delta)$. *Die Operation* D_j *definieren wir durch die folgende Beziehungen:*

$$D_j F = z_j \frac{\partial F}{\partial z_j}; \qquad j=1, 2, \ldots. n.$$

Satz 3. *Ausserhalb, möglicher Weise, einer Intervalenmenge E der Halbaxe* $R>0$ *begrenzten logarythmischen Masses ist*

$$\left| D_1^{i_1} \ldots D_n^{i_n} \ln f(\zeta) \right| < C(i_1, \ldots, i_n) K^{\frac{\delta-1}{\delta+1}} \left(K^{\frac{1}{1+\delta}} \ln^{\frac{1+\alpha}{2}} K\right)^{i_1+\cdots+i_n}; \quad i_1+\ldots+i_n>1.$$

Satz 4.

$$\lim_{R\to\infty}\left(\frac{\zeta_1^{i_1}\ldots\zeta_n^{i_n}\dfrac{\partial^{i_1+\cdots+i_n} f(\zeta)}{\partial z_1^{i_1}\ldots\partial z_n^{i_n}}}{K^{i_1+\cdots+i_n}(R) f(\zeta)} - \prod_{j=1}^{n}\alpha_j^{i_j}\right)=0,$$

wo

$$\alpha_j = \alpha_j(R) \geqslant 0; \quad \sum_{j=1}^{n} a_j \alpha_j = 1$$

und wo der Grenzübergang ausserhalb der im Satze 3 *festgestellten Menge E durchzuführen ist*