IV LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 3
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1964

ТЕОРЕМА П. ЭРДЁША И А. ВИНТНЕРА НА УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУГРУППАХ С РЕГУЛЯРНОЙ НОРМИРОВКОЙ

З. ЮШКИС

1. Вещественная или комплексная функция $f(m)$ $(m=1, 2, \ldots)$ называется аддитивной арифметической функцией, если для любой пары взаимно простых m_1, m_2

$$f(m_1 m_2)=f(m_1)+f(m_2).$$

Пусть

$$\lambda_n\{f(m)<y\}=\frac{1}{n} M_n\{f(m)<y\},$$

где $M_n\{f(m)<y\}$ – число натуральных чисел m, удовлетворяющих условиям $m \leqslant n$, $f(m)<y$.

П. Эрдёш и А. Винтнер [6, 7] доказали, что для любой вещественной аддитивной арифметической функции $f(m)$ сходимость рядов

$$\sum_p \frac{\|f(p)\|}{p}, \qquad \sum_p \frac{\|f(p)\|^2}{p},$$

где

$$\|f(p)\|=\begin{cases} f(p), & \text{если} \quad |f(p)| \leqslant 1, \\ 1, & \text{если} \quad |f(p)|>1, \end{cases}$$

и суммируется по всем простым числам p, является необходимым и достаточным условием для сходимости функции распределения $\lambda_n\{f(m)<y\}$ при $n \to \infty$ к предельной функции распределения в точках непрерывности последней.

В настоящей работе теорема П. Эрдёша и А. Винтнера обобщается на упорядоченные полугруппы с регулярной нормировкой.

2. Мы будем придерживаться следующих обозначений и определений.

c_1, c_2, ... – положительные постоянные; B – число, ограниченное по модулю константой; x – вещественное число, $x>0$.

Далее, мы будем пользоваться определениями полугрупп статьи [1]. Пусть G – мультипликативно записанная свободная коммутативная полугруппа со счетной системой P образующих элементов, причем все образующие элементы бесконечного порядка. Таким образом, каждый элемент $m \in G$ однозначно записывается в форме $m=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots$, где $p_i \in P$ и α_i – целые неотрицательные числа, причем только конечное число $\alpha_i \neq 0$. В частности, если все $\alpha_i=0$, будем иметь единичный элемент, который обозначим символом e.

Пусть, далее, N — гомоморфизм G на мультипликативную полугруппу положительных чисел. Образ $N(m)$ элемента $m \in G$ будем называть его нормой. Кроме того, будем считать, что гомоморфизм N обладает еще следующими свойствами: в полугруппе G имеется только конечное число элементов m с $N(m) \leqslant x$ при любом $x > 0$, $N(p_i) > 1$, $N(e) = 1$. Элементы полугруппы G упорядочиваются по их возрастающим нормам. Из вышеуказанных свойств гомоморфизма, очевидно, следует, что $N(mn) = N(m)N(n)$, если $m, n \in G$; $N(m) \geqslant 1$.

Если

$$\nu(x) = \sum_{N(m) \leqslant x} 1 = Cx^{\Theta} + Bx^{\Theta_1},$$

где C, Θ, Θ_1 — константы, $C > 0$, $0 \leqslant \Theta_1 < \Theta$, то такую полугруппу будем называть упорядоченной полугруппой с регулярной нормировкой или, коротко, полугруппой G.

Обозначим еще: m, n, d — элементы полугруппы G; $n \backslash m$ означает, что существует $d \in G$ такой, что $m = nd$; n будем называть делителем m; $p^{\alpha} \backslash\backslash m$ означает, что $p^{\alpha} \backslash m$, $p^{\alpha+1} \backslash m$; $(m, n) = e$ означает, что m и n не имеют общих делителей; $\lambda_x\{f(m) < y\}$ — частота элементов полугруппы G, для которых $f(m) < y$, т. е. отношение числа элементов $m \in G$, $N(m) \leqslant x$, $f(m) < y$ к числу $\nu(x)$; $s > \Theta$ — вещественное число.

Оценки при помощи символов B, o, $\sim$ относятся в основном к $x \to \infty$ или $s \to \Theta + 0$.

Распространим определение аддитивной (мультипликативной) функции на полугруппу G. Вещественную или комплексную функцию $f(m)$ (соответственно $g(m)$) $(m \in G)$ мы будем называть аддитивной (соответственно мультипликативной), если

$$f(m_1 m_2) = f(m_1) + f(m_2) \qquad \bigl(g(m_1 m_2) = g(m_1)\, g(m_2)\bigr)$$

для любой пары m_1 и $m_2 \in G$ с $(m_1, m_2) = e$. Отсюда непосредственно следует, что $f(e) = 0$ и, если $g(m)$ не равна тождественно нулю, $g(e) = 1$. Далее, аддитивную и мультипликативную функцию, очевидно, можно представить в виде

$$f(m) = \sum_{p^{\alpha} \backslash\backslash m} f(p^{\alpha}), \qquad g(m) = \prod_{p^{\alpha} \backslash\backslash m} g(p^{\alpha}),$$

откуда следует, что аддитивные и мультипликативные функции вполне определяются значениями $f(p^{\alpha})$, $g(p^{\alpha})$ для $\alpha = 1, 2, \ldots$

3. Теорему П. Эрдёша и А. Винтнера на упорядоченных полугруппах с регулярной нормировкой мы формулируем следующим образом.

Теорема. *Пусть $f(m)$ — вещественная аддитивная функция, определенная на полугруппе G. Для того, чтобы законы распределения*

$$\lambda_x\{f(m) < y\}$$

при $x \to \infty$ сходились к предельному, необходимо и достаточно, чтобы ряды

$$\sum_{p \in P} \frac{\|f(p)\|}{N(p)^{\Theta}} \quad \text{и} \quad \sum_{p \in P} \frac{\|f(p)\|^2}{N(p)^{\Theta}},$$

где

$$\|f(p)\|=\begin{cases} f(p), & \text{если } |f(p)|<1, \\ 1, & \text{если } |f(p)|\geqslant 1, \end{cases}$$

сходились. Если предельный закон существует, то его характеристическая функция равна

$$\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{N(p)^{\Theta}}\right)\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\exp\left(itf(p^{\alpha})\right)}{N(p)^{\alpha\Theta}}.$$

4. Для доказательства теоремы мы используем некоторые соображения Г. Дедянжа [5]. Нам понадобятся некоторые оценки по нормам элементов полугруппы G и по нормам образующих элементов.

Лемма 1. *Для полугруппы G справедлива оценка*

$$\sum_{N(m)\leqslant x}\frac{1}{N(m)^{\Theta}}=C\Theta\ln x+B. \tag{1}$$

Доказательство. Используя частичное суммирование, имеем, что

$$\sum_{N(m)\leqslant x}\frac{1}{N(m)^{\Theta}}=\frac{1}{x^{\Theta}}\sum_{N(m)\leqslant x}1+\Theta\int_{1}^{x}\sum_{N(m)\leqslant u}1\,\frac{du}{u^{\Theta+1}}=$$

$$=B+C\Theta\int_{1}^{x}\frac{du}{u}+B\int_{1}^{x}\frac{du}{u^{\Theta-\Theta_1+1}}=C\Theta\ln x+B.$$

Лемма 2. *Для полугруппы G справедлива оценка*

$$\sum_{N(p)\leqslant x}\frac{\ln N(p)}{N(p)^{\Theta}}=B\ln x. \tag{2}$$

Доказательство. Известно [1], что

$$\sum_{N(p)\leqslant x}\ln N(p)=\frac{1}{\Theta}x^{\Theta}+o(x^{\Theta}). \tag{3}$$

Отметим, что для доказательства (2) достаточна менее точная оценка. Ввиду того, что оценку (3) мы используем в другом месте, применим ее и доказывая нашу лемму.

По формуле частичного суммирования находим, что

$$\sum_{N(p)\leqslant x}\frac{\ln N(p)}{N(p)^{\Theta}}=\frac{1}{x^{\Theta}}\sum_{N(p)\leqslant x}\ln N(p)+\Theta\int_{1}^{x}\sum_{N(p)\leqslant u}\ln N(p)\frac{du}{u^{\Theta+1}},$$

а в силу (3) получаем

$$\sum_{N(p)\leqslant x}\frac{\ln N(p)}{N(p)^{\Theta}}=B+B\int_{1}^{x}\frac{du}{u}=B\ln x.$$

Лемма 3. *Ряд*

$$\zeta_G(s)=\sum_{m\in G}\frac{1}{N(m)^s}$$

сходится для всех вещественных $s>\Theta$ и

$$\zeta_G(s)=\frac{Cs}{s-\Theta}+B=\frac{C\Theta+o(1)}{s-\Theta} \tag{4}$$

при $s\to\Theta+0$.

Доказательство. Применяя формулу частичного суммирования, имеем

$$\sum_{N(m)\leqslant x}\frac{1}{N(m)^s}=\frac{\nu(x)}{x^s}+s\int_1^x\frac{\nu(u)\,du}{u^{s+1}}=$$

$$=\frac{Bx^\Theta}{x^s}+Cs\int_1^x u^{\Theta-s-1}\,du+B\int_1^x u^{\Theta_1-s-1}\,du=$$

$$=Bx^{\Theta-s}+\frac{Cs}{s-\Theta}-\frac{Csx^{\Theta-s}}{s-\Theta}+B\int_1^x u^{\Theta_1-s-1}\,du.$$

Отсюда следует сходимость ряда при $s>\Theta$ и соотношение (4).

Лемма 4. *В обозначениях леммы 3 справедлива оценка*

$$\frac{1}{\zeta_G(s)}=\frac{s-\Theta}{Cs}\Big(1+o(1)\Big) \tag{5}$$

при $s\to\Theta+0$.

Доказательство следует непосредственно из леммы 3.

5. Дадим некоторые теоремы тауберовского типа.

Лемма 5. *Если* $\alpha(z)$ *— функция с ограниченным изменением,* $\alpha(0)=0$,

$$I(y)=\int_0^\infty e^{-yz}\,d\alpha(z)$$

сходится для $y>0$ *и* $I(y)\to l$ *при* $y\to 0$, *то для того, чтобы* $\alpha(z)\to l$ *при* $z\to\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_0^z u\,d\alpha(u)=Bz$$

при $z\to\infty$.

Доказательство см. в [4], стр. 193—194, а также примечания на стр. 196.

Лемма 6. *Если* $\alpha(z)$ *— возрастающая функция*

$$I(y)=\int_0^\infty e^{-yz}\,d\alpha(z)$$

сходится для $y>0$ *и* $I(y)\sim\frac{L}{y}$ *при* $y\to 0$, *где* $L\geqslant 0$, *то* $\alpha(z)\sim Lz$.

Доказательство см. в [4], стр. 198—201.

Лемма 7. *Если* α_m *для всех* $m\in G$ *комплексные числа,* $|\alpha_m|\leqslant c_1$ *и*

$$\sum_{m\in G}\frac{\alpha_m}{N(m)^s}=\frac{\alpha+o(1)}{s-\Theta}$$

при $s\to\Theta+0$, *то*

$$\sum_{N(m)\leqslant x}\frac{\alpha_m}{N(m)^\Theta}=\Big(\alpha+o(1)\Big)\ln x$$

при $x\to\infty$.

Доказательство (ср. [5]). Из принципа мажорирования рядов и леммы 3 следует, что ряд

$$\sum_{m\in G}\frac{\alpha_m}{N(m)^s}$$

сходится абсолютно для $s>\Theta$.

Обозначим

$$\alpha_m = u_m + iv_m, \quad \alpha = u + iv,$$

где u_m, v_m, u, v — вещественные числа. Пусть $c_2 > c_1$. В силу (4) и предположений леммы имеем, что

$$\sum_{m \in G} \frac{u_m + c_2}{N(m)^s} \sim \frac{u + c_2 C\Theta}{s - \Theta}$$

и

$$\sum_{m \in G} \frac{v_m + c_2}{N(m)^s} \sim \frac{v + c_2 C\Theta}{s - \Theta}$$

при $s \to \Theta + 0$.

Обозначая $s = \Theta + y$, имеем, что

$$\sum_{m \in G} \frac{u_m + c_2}{N(m)^\Theta} \frac{1}{N(m)^y} \sim \frac{u + c_2 C\Theta}{y}$$

и

$$\sum_{m \in G} \frac{v_m + c_2}{N(m)^\Theta} \frac{1}{N(m)^y} \sim \frac{v + c_2 C\Theta}{y}$$

при $y \to +0$.

В лемме 6 возьмем

$$\alpha(z) = \sum_{\ln N(m) \leqslant z} \frac{u_m + c_2}{N(m)^\Theta}.$$

Тогда

$$I(y) = \sum_{m \in G} \frac{u_m + c_2}{N(m)^\Theta} \frac{1}{N(m)^y} \sim \frac{u + c_2 C\Theta}{y};$$

условия леммы 6 выполнены и, значит,

$$\sum_{\ln N(m) \leqslant z} \frac{u_m + c_2}{N(m)^\Theta} \sim (u + c_2 C\Theta) z$$

при $z \to \infty$. Аналогично

$$\sum_{\ln N(m) \leqslant z} \frac{v_m + c_2}{N(m)^\Theta} \sim (v + c_2 C\Theta) z$$

при $z \to \infty$.

Обозначая $z = \ln x$, имеем

$$\sum_{N(m) \leqslant x} \frac{u_m + c_2}{N(m)^\Theta} \sim (u + c_2 C\Theta) \ln x$$

и

$$\sum_{N(m) \leqslant x} \frac{v_m + c_2}{N(m)^\Theta} \sim (v + c_2 C\Theta) \ln x,$$

а в силу (1) получаем

$$\sum_{N(m) \leqslant x} \frac{u_m}{N(m)^\Theta} = \bigl(u + o(1)\bigr) \ln x$$

и

$$\sum_{N(m) \leqslant x} \frac{v_m}{N(m)^\Theta} = \bigl(v + o(1)\bigr) \ln x$$

при $x \to \infty$.

6. Докажем еще пару предложений.

Лемма 8. *Если* $a_k \geqslant 0$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ *и ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

сходится, то можно найти такие числа $b_k \geqslant 0$, $b_k \to \infty$ *при* $k \to \infty$, *чтобы ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

сходился.

Доказательство. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $a_k > 0$. Полагая

$$r_l = a_{l+1} + a_{l+2} + \ldots$$

и

$$b_k = \frac{\sqrt{r_{k-1}} - \sqrt{r_k}}{a_k} = \frac{r_{k-1} - r_k}{a_k\left(\sqrt{r_{k-1}} + \sqrt{r_k}\right)} = \frac{1}{\sqrt{r_{k-1}} + \sqrt{r_k}},$$

будем иметь, что $b_k \to \infty$ при $k \to \infty$ и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{r_{k-1}} - \sqrt{r_k}\right)$$

сходится.

Лемма 9. *Пусть* $g(m)$ — *мультипликативная функция, принимающая значения* $\exp\left(itf(m)\right)$ *или* 1 ($f(m)$ — *вещественная аддитивная функция*);

$$|t| \leqslant T' = \min \frac{N(p)^{\Theta} - 1}{5\,|f(p^{\alpha}) - f(p^{\alpha-1})|}, \tag{6}$$

где минимум берется по всем p *и* α, *удовлетворяющим условиям* $N(p) < 3^{\frac{1}{\Theta}}$,

$$\alpha < \beta = \left[\frac{\ln 4 - \ln\left(N(p)^{\Theta} - 1\right)}{\Theta \ln N(p)}\right] + 1, \tag{7}$$

$f(p^{\alpha}) \neq f(p^{\alpha-1})$. *Тогда*

$$\frac{1}{\zeta_G(s)} \sum_{m \in G} \frac{g(m)}{N(m)^s} = \exp\left\{\sum_{p \in P} \frac{g(p) - 1}{N(p)^s}\right\} \Psi(s), \tag{8}$$

где $\Psi(s)$ — *непрерывная функция при* $s \geqslant \Theta$.

Доказательство. Очевидно, ряд

$$\sum_{m \in G} \frac{g(m)}{N(m)^s}$$

при $s > \Theta$ сходится абсолютно. Применяя тождество Эйлера, имеем

$$\zeta_G(s) = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{N(p)^s}\right)^{-1}$$

и

$$\sum_{m \in G} \frac{g(m)}{N(m)^s} = \prod_{p \in P} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{g(p^{\alpha})}{N(p)^{\alpha s}}.$$

Тогда

$$\frac{1}{\zeta_G(s)} \sum_{m \in G} \frac{g(m)}{N(m)^s} = \prod_{p \in P} \chi_p(s), \tag{9}$$

где

$$\chi_p(s)=\left(1-\frac{1}{N(p)^s}\right)\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{g(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha s}}\right).$$

1°. Если $g(m)=\exp\left(itf(m)\right)$ и $N(p)\geqslant 3^{\frac{1}{\Theta}}$, то

$$|\chi_p(s)-1|\leqslant\frac{2}{N(p)^s}+\frac{1}{N(p)^{2s}}+\left(1-\frac{1}{N(p)^s}\right)\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{1}{N(p)^{\alpha s}}=$$

$$=\frac{2}{N(p)^s}+\frac{2}{N(p)^{2s}}\leqslant\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}<1.$$

2°. Когда $g(m)=\exp\left(itf(m)\right)$ и $N(p)<3^{\frac{1}{\Theta}}$, $\chi_p(s)$ придадим вид

$$\chi_p(s)=1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\exp\left(itf(p^\alpha)\right)-\exp\left(itf(p^{\alpha-1})\right)}{N(p)^{\alpha s}}.$$

Обозначим

$$\chi_p(s)-1=r_p(s)+v_p(s), \tag{10}$$

где

$$r_p(s)=\sum_{\alpha=1}^{\beta}\frac{\exp\left(itf(p^\alpha)\right)-\exp\left(itf(p^{\alpha-1}\right)}{N(p)^{\alpha s}}$$

и

$$v_p(s)=\sum_{\alpha=\beta+1}^{\infty}\frac{\exp\left(itf(p^\alpha)\right)-\exp\left(itf(p^{\alpha-1})\right)}{N(p)^{\alpha s}}.$$

По условию (7) имеем:

$$|v_p(s)|\leqslant 2\sum_{\alpha=\beta+1}^{\infty}\frac{1}{N(p)^{\alpha s}}\leqslant 2\sum_{\alpha=\beta+1}^{\infty}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}=\frac{2}{N(p)^{\beta\Theta}\left(N(p)^{\Theta}-1\right)}\leqslant\frac{1}{2}. \tag{11}$$

Теперь оценим $r_p(s)$:

$$|r_p(s)|\leqslant\sum_{\alpha=1}^{\beta}\frac{\left|\exp\left(itf(p^\alpha)\right)-\exp\left(itf(p^{\alpha-1})\right)\right|}{N(p)^{\alpha s}}=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{\beta}\frac{\sqrt{2\left\{1-\cos t\left(f(p^\alpha)-f(p^{\alpha-1})\right)\right\}}}{N(p)^{\alpha s}}\leqslant 2\sum_{\alpha=1}^{\beta}\frac{\left|\sin\frac{t}{2}\left(f(p^\alpha)-f(p^{\alpha-1})\right)\right|}{N(p)^{\alpha\Theta}}.$$

По условию (6)

$$|r_p(s)|\leqslant 2\sum_{\alpha=1}^{\beta}\frac{\sin\frac{N(p)^\Theta-1}{10}}{N(p)^{\alpha\Theta}}<\frac{N(p)^{\Theta}-1}{5}\sum_{\alpha=1}^{\beta}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}=\frac{N(p)^{\beta\Theta}-1}{5N(p)^{\beta\Theta}}.$$

Подставляя β из (7), находим

$$|r_p(s)|\leqslant\frac{3N(p)^\Theta+1}{20}<\frac{1}{20}(3\cdot 3+1)=\frac{1}{2}. \tag{12}$$

Из (10), (11) и (12) следует, что

$$|\chi_p(s)-1|<1.$$

3°. Если же $g(m)=1$, то для всех $p\in P$ из определения $\chi_p(s)$ получаем

$$\chi_p(s)=\left(1-\frac{1}{N(p)^s}\right)\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{N(p)^{\alpha s}}\right)=1;$$

$$|\chi_p(s)-1|=0<1.$$

Следовательно, для всех $p\in P$ и $|t|\leqslant T'$

$$|\chi_p(s)-1|<1. \tag{13}$$

Нам понадобится еще одна оценка. Пусть

$$\chi_p(s)=1-\frac{1-g(p)}{N(p)^s}+q_p(s); \tag{14}$$

$$q_p(s)=-\frac{g(p)}{N(p)^{2s}}+\left(1-\frac{1}{N(p)^s}\right)\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{g(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha s}}$$

и

$$|q_p(s)|\leqslant\frac{1}{N(p)^{2s}}+\left(1-\frac{1}{N(p)^s}\right)\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{1}{N(p)^{\alpha s}}=\frac{2}{N(p)^{2s}}. \tag{15}$$

Так как $\chi_p(s)\neq 0$ в силу (13) при $s\geqslant\Theta$, то логарифмированием получаем

$$\ln\chi_p(s)=\frac{g(p)-1}{N(p)^s}+w_p(s), \tag{16}$$

где

$$w_p(s)=\ln\left\{1+\left(\chi_p(s)-1\right)\right\}-\frac{g(p)-1}{N(p)^s}.$$

Применяя (13) и (14), находим

$$w_p(s)=\chi_p(s)-1+B|\chi_p(s)-1|^2-\frac{g(p)-1}{N(p)^s}=q_p(s)+B\left|\frac{g(p)-1}{N(p)^s}+q_p(s)\right|^2.$$

Оценим $w_p(s)$ по (15)

$$|w_p(s)|=\frac{B}{N(p)^{2s}}. \tag{17}$$

Формула (9) в силу (16) принимает вид

$$\frac{1}{\zeta_G(s)}\sum_{m\in G}\frac{g(m)}{N(m)^s}=\exp\left\{\sum_{p\in P}\ln\chi_p(s)\right\}=\exp\left\{\sum_{p\in P}\frac{g(p)-1}{N(p)^s}\right\}\Psi(s),$$

где

$$\Psi(s)=\exp\left\{\sum_{p\in P}w_p(s)\right\}.$$

В силу (17) при $s\geqslant\Theta$ $\Psi(s)$ является непрерывной функцией.

Лемма доказана.

7. При доказательстве теоремы нам понадобятся еще следующие хорошо известные оценки:

$$|\sin A|\geqslant c_3|A|\quad\text{при}\quad|A|<1, \tag{18}$$

$$\left|\frac{\sin A}{A}\right|<c_4<1\quad\text{при}\quad|A|>c_5, \tag{19}$$

$$|\sin A-A|\leqslant\frac{|A|^3}{6}<\frac{A^2}{3}\quad\text{при}\quad|A|<2 \tag{20}$$

и

$$|e^{iu}-1-iu|\leqslant\frac{u^2}{2} \tag{21}$$

для любого вещественного u.

Переходим к доказательству аналога теоремы П. Эрдёша и А. Винтнера.

8. **Необходимость.** Пусть последовательность функций распределения

$$F_x(y)=\lambda_x\{f(m)<y\}$$

при $x\to\infty$ сходится к некоторой функции распределения $F(y)$ во всех ее точках непрерывности. Тогда по известной теореме теории вероятностей имеем, что последовательность характеристических функций

$$\varphi_x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}\,d\lambda_x\{f(m)<y\}=\frac{1}{\nu(x)}\sum_{N(m)\leqslant x} e^{itf(m)}\to\varphi(t)$$

равномерно для всех $|t|\leqslant T$.

Подберем $T=\min(2,\ T')$, где T' указан в формуле (6).

По формуле частичного суммирования получаем

$$\sum_{N(m)\leqslant x}\frac{e^{itf(m)}}{N(m)^s}=\frac{1}{x^s}\sum_{N(m)\leqslant x} e^{itf(m)}+s\int_1^x\sum_{N(m)\leqslant u} e^{itf(m)}\frac{du}{u^{s+1}}=$$

$$=\frac{1}{x^s}\,\nu(x)\Big(\varphi(t)+o(1)\Big)+s\int_1^x\frac{\nu(u)\Big(\varphi(t)+o(1)\Big)}{u^{s+1}}\,du=$$

$$=Cx^{\Theta-s}\Big(\varphi(t)+o(1)\Big)+Cs\int_1^x\frac{\varphi(t)+\rho(u)}{u^{s-\Theta+1}}\,du,$$

где $\rho(u)\to 0$ при $u\to\infty$. Предполагая $s>\Theta$ и устремляя x в ∞, имеем что

$$\sum_{m\in G}\frac{e^{itf(m)}}{N(m)^s}=\frac{Cs\varphi(t)}{s-\Theta}+CsI(s),$$

где

$$I(s)=\int_1^{\infty}\frac{\rho(u)}{u^{s-\Theta+1}}\,du.$$

Покажем, что

$$I(s)=o\left(\frac{1}{s-\Theta}\right)$$

при $s\to\Theta+0$. Существует, очевидно, такая константа c_6, что

$$\sup_{u\geqslant 1}|\rho(u)|\leqslant c_6.$$

Далее, для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое $x_0=x_0(\varepsilon)>1$ и такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что

$$\sup_{u\geqslant x_0}|\rho(u)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$1-\frac{1}{x_0^{s-\Theta}}<\frac{\varepsilon}{2c_6}$$

при $s-\Theta>\delta$. Имеем:

$$I(s)\leqslant c_6\int_1^{x_0}\frac{du}{u^{s-\Theta+1}}+\frac{\varepsilon}{2}\int_{x_0}^{\infty}\frac{du}{u^{s-\Theta+1}}=\frac{c_6}{s-\Theta}\left(1-\frac{1}{x_0^{s-\Theta}}\right)+\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{(s-\Theta)\,x_0^{s-\Theta}}<\frac{\varepsilon}{s-\Theta}$$

при $s-\Theta<\delta$. Таким образом,

$$\sum_{m\in G}\frac{e^{itf(m)}}{N(m)^s}=\frac{Cs\varphi(t)+o(1)}{s-\Theta}$$

при $s\to\Theta+0$.

Умножением (5) на наше тождество получаем

$$\frac{1}{\zeta_G(s)}\sum_{m\in G}\frac{e^{itf(m)}}{N(m)^s}=\varphi(t)+o(1) \tag{22}$$

при $s\to\Theta+0$.

В лемме 9 будем считать, что $g(m)=\exp\left(itf(m)\right)$ для всех $m\in G$. Тогда в силу (22) и леммы 9 ряд

$$\sum_{p\in P}\frac{e^{itf(p)}-1}{N(p)^s}$$

при $s>\Theta$ сходится. При этом его сумма должна сходиться к конечному пределу при $s\to\Theta+0$.

Положим в лемме 5

$$\alpha(z)=\sum_{\ln N(p)\leqslant z}\frac{e^{itf(p)}-1}{N(p)^{\Theta}}.$$

Тогда в силу (2)

$$\int_0^z u\,d\alpha(u)=B\sum_{N(p)\leqslant e^z}\frac{\ln N(p)}{N(p)^{\Theta}}=Bz.$$

Так как интеграл

$$\int_0^{\infty}e^{-yz}\,d\alpha(z)=\sum_{p\in P}\frac{e^{itf(p)}-1}{N(p)^{\Theta+y}}$$

сходится при $y\to+0$ к конечному пределу, то согласно лемме 5 должен сходиться ряд

$$\sum_{p\in P}\frac{e^{itf(p)}-1}{N(p)^{\Theta}}. \tag{23}$$

Из (23) имеем, что ряды

$$\sum_{p\in P}\frac{1-\cos tf(p)}{N(p)^{\Theta}}=2\sum_{p\in P}\frac{\sin^2\frac{tf(p)}{2}}{N(p)^{\Theta}}, \tag{24}$$

$$\sum_{p\in}\frac{\sin tf(p)}{N(p)^{\Theta}} \tag{25}$$

сходятся, а из (24) следует сходимость рядов

$$\sum_{|f(p)|<1}\frac{\sin^2\frac{tf(p)}{2}}{N(p)^{\Theta}} \tag{26}$$

и

$$\sum_{|f(p)|\geqslant 1}\frac{1-\cos tf(p)}{N(p)^{\Theta}}. \tag{27}$$

Для членов ряда (26) в силу неравенства $|t|\leqslant T\leqslant 2$ имеем, что

$$\left|\frac{tf(p)}{2}\right|<1,$$

следовательно, согласно (18),

$$\sin^2 \frac{tf(p)}{2} \geqslant c_7^2 \frac{t^2 f^2(p)}{4}.$$

Поэтому ряд

$$\sum_{|f(p)|<1} \frac{f^2(p)}{N(p)^\Theta} \tag{28}$$

сходится.

Очевидно, имеем

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1-\cos tf(p)}{N(p)^\Theta}\,dt = \frac{1}{N(p)^\Theta}\left\{1 - \frac{\sin Tf(p)}{Tf(p)}\right\},$$

а в силу (27) получаем, что ряд

$$\sum_{|f(p)|\geqslant 1} \frac{1}{N(p)^\Theta}\left\{1 - \frac{\sin Tf(p)}{Tf(p)}\right\}$$

сходится. В этом ряду $|Tf(p)| \geqslant T \geqslant c_8$, тогда из (19)

$$\left|\frac{\sin Tf(p)}{Tf(p)}\right| < c_9 < 1,$$

и поэтому наш ряд мажорирует ряд

$$\sum_{|f(p)|\geqslant 1} \frac{1}{N(p)^\Theta}, \tag{29}$$

который сходится, откуда следует сходимость ряда

$$\sum_{|f(p)|\geqslant 1} \frac{\sin tf(p)}{N(p)^\Theta},$$

а в силу (25) и ряда

$$\sum_{(p)|<1} \frac{\sin tf(p)}{N(p)^\Theta}. \tag{30}$$

В том случае $|tf(p)| < 2$ и по (20)

$$|\sin tf(p) - tf(p)| \leqslant \frac{t^2 f^2(p)}{3}.$$

Делением на $N(p)^\Theta$ и суммированием получаем

$$\sum_{|f(p)|<1} \left|\frac{\sin tf(p)}{N(p)^\Theta} - \frac{tf(p)}{N(p)^\Theta}\right| \leqslant \frac{t^2}{3} \sum_{f(p)|<1} \frac{f^2(p)}{N(p)^\Theta}.$$

Так как ряды (28) и (30) сходятся, то и ряд

$$\sum_{|f(p)|<} \frac{f(p)}{N(p)^\Theta} \tag{31}$$

сходится.

Наконец, из (29) и (31) имеем, что ряд

$$\sum_{p\in P} \frac{\|f(p)\|}{N(p)^\Theta} \tag{32}$$

сходится, и из (28) и (29) следует сходимость ряда

$$\sum \frac{\|f(p)\|^2}{N(p)^\Theta}. \tag{33}$$

9. Достаточность. Пусть ряды (32) и (33) сходятся. Нам надо доказать, что последовательность функций распределения

$$F_x(y)=\lambda_x\{f(m)<y\}$$

при $x\to\infty$ сходится к некоторой функции распределения $F(y)$ во всех ее точках непрерывности или

$$\varphi_x(t)=\frac{1}{\nu(x)}\sum_{N(m)\leqslant x} e^{itf(m)}\to\varphi(t)$$

равномерно для всех $|t|\leqslant T'$, где T' указан в формуле (6).

Из (32) и (33) следует, что ряды

$$\sum_{|f(p)|\geqslant 1}\frac{1}{N(p)^{\Theta}}, \tag{34}$$

$$\sum_{|f(p)|<1}\frac{f^2(p)}{N(p)^{\Theta}} \tag{35}$$

и

$$\sum_{|f(p)|<1}\frac{f(p)}{N(p)^{\Theta}} \tag{36}$$

сходятся. Так как $|1-\exp(itf(p))|\leqslant 2$, то в силу (34) ряд

$$\sum_{|f(p)|\geqslant 1}\frac{1-e^{itf(p)}}{N(p)^{\Theta}} \tag{37}$$

также сходится.

Применяя оценку (21), имеем

$$1-e^{itf(p)}=-itf(p)+\frac{A^2t^2f^2(p)}{2},$$

где $|A|\leqslant 1$, или

$$\sum_{|f(p)|<1}\frac{1-e^{itf(p)}}{N(p)^{\Theta}}=-it\sum_{|f(p)|<1}\frac{f(p)}{N(p)^{\Theta}}+\frac{A^2t^2}{2}\sum_{|f(p)|<1}\frac{f^2(p)}{N(p)^{\Theta}}.$$

Поэтому в силу (35) и (36) ряд

$$\sum_{|f(p)|<1}\frac{1-e^{itf(p)}}{N(p)^{\Theta}} \tag{38}$$

сходится. Из (37) и (38) следует сходимость ряда

$$\sum_{p\in P}\frac{1-e^{itf(p)}}{N(p)^{\Theta}}. \tag{39}$$

В силу леммы 8 существует такая функция $w(p)\to\infty$ при $N(p)\to\infty$, $w(p)\geqslant 0$, что ряд

$$\sum_{p\in P} w(p)\frac{1-\cos tf(p)}{N(p)^{\Theta}} \tag{40}$$

сходится.

10. Обозначим через E множество тех образующих элементов, для которых $N(p)\leqslant 2^{\frac{2}{\Theta}}$ или $N(p)>2^{\frac{2}{\Theta}}$ и $1-\cos tf(p)>\frac{1}{w(p)}$. В силу сходимости ряда (40) ряд

$$\sum_{p\in E}\frac{1}{N(p)^{\Theta}}, \tag{41}$$

очевидно, сходится.

11. Пусть $g(m)$ функция, удовлетворяющая условиям:

$$g(p^\alpha)=\begin{cases}\exp\Big(itf(p^\alpha)\Big), & \text{если } p\notin E,\\ 1, & \text{если } p\in E.\end{cases}$$

Очевидно, $g(m)$ является мультипликативной функцией.

Покажем, что

$$g(p)\to 1 \quad \text{при} \quad N(p)\to\infty. \tag{42}$$

Мы видим, что

$$1-\operatorname{Re}g(p)=\begin{cases}1-\cos tf(p), & \text{если } p\notin E,\\ 0, & \text{если } p\in E.\end{cases}$$

По определению E, если $p\notin E$, то $1-\cos tf(p)\leqslant\frac{1}{w(p)}$, где $w(p)\to\infty$ при $N(p)\to\infty$. Следовательно, $\operatorname{Re}g(p)\to 1$ при $N(p)\to\infty$. $|g(p)|=1$, потому $\operatorname{Im}g(p)\to 0$, а $g(p)\to 1$ при $N(p)\to\infty$.

По определению $g(p)$ элементарными преобразованиями получаем

$$\sum_{N(p)\leqslant x}\frac{1-g(p)}{N(p)^\Theta}=\sum_{\substack{N(p)\leqslant x\\ p\notin E}}\frac{1-e^{itf(p)}}{N(p)^\Theta}=\sum_{N(p)\leqslant x}\frac{1-e^{itf(p)}}{N(p)^\Theta}-\sum_{\substack{N(p)\leqslant x\\ p\in E}}\frac{1-e^{itf(p)}}{N(p)^\Theta}.$$

При $x\to\infty$ из (39) и (41) следует, что ряд

$$\sum_{p\in P}\frac{1-g(p)}{N(p)^\Theta} \tag{43}$$

сходится.

Функция $g(m)$ удовлетворяет условиям леммы 9. В силу (43) из (8) следует, что

$$\frac{1}{\zeta_G(s)}\sum_{m\in G}\frac{g(m)}{N(m)^s}\to\psi(t), \tag{44}$$

когда $s\to\Theta+0$ и $|t|\leqslant T'$.

Из доказательства леммы 9 знаем, что при $s>\Theta$ имеет место тождество

$$\frac{1}{\zeta_G(s)}\sum_{m\in G}\frac{g(m)}{N(m)^s}=\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{N(p)^s}\right)\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{g(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha s}},$$

поэтому в силу (44) при $s\to\Theta+0$, находим, что

$$\psi(t)=\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{N(p)^\Theta}\right)\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{g(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}}. \tag{45}$$

Умножением (44) и (4) получаем

$$\sum_{m\in G}\frac{g(m)}{N(m)^s}=\frac{C\Theta\psi(t)+o(1)}{s-\Theta}$$

при $s\to\Theta+0$. Применяя лемму 7, имеем, что

$$\sum_{N(m)\leqslant x}\frac{g(m)}{N(m)^\Theta}=\Big(C\Theta\psi(t)+o(1)\Big)\ln x \tag{46}$$

при $x\to\infty$.

Покажем, что можно найти такие числа $c_j^{(p)}(g)$, чтобы

$$g(m)\ln N(m)=\sum_{i}c_j^{(p)}(g)\,g\left(\frac{m}{p^j}\right)\ln N(p). \tag{47}$$

Так как $g(m)$ мультипликативная функция, достаточно показать, что существуют $c_j^{(p)}(g)$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=1}^{k} c_j^{(p)}(g)\,g(mp^{k-j})\ln N(p)=kg(mp^k)\ln N(p)$$

или

$$\sum_{j=k}^{k} c_j^{(p)}(g)\,g(p^{k-j})=kg(p^k). \tag{48}$$

Беря в (48) $k=1,\ 2,\ \ldots$, мы можем составить систему уравнений

$$\begin{cases} c_1^{(p)}(g)\,g(p^0)=g(p), \\ c_1^{(p)}(g)\,g(p)+c_2^{(p)}(g)\,g(p^0)=2g(p^2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

которая, очевидно, разрешима относительно $c_j^{(p)}(g)$.

Непосредственно видно, что

$$c_1^{(p)}(g)=g(p). \tag{49}$$

Если $p\in E$, то из (48)

$$\sum_{j=1}^{k} c_j^{(p)}(g)=k \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{k=1} c_j^{(p)}(g)=k-1,$$

откуда

$$c_k^{(p)}(g)=1 \tag{50}$$

для всех $p\in E$ и $k=1,\ 2,\ \ldots$.

При $k=1$ имеем

$$|c_1^{(p)}(g)|=|g(p)|=1.$$

Допустим, что неравенство

$$|c_k^{(p)}(g)|\leqslant 2^k-1 \tag{51}$$

верно для $\alpha-1$. В силу (48)

$$c_\alpha^{(p)}(g)=\alpha g(p^\alpha)-\sum_{l=1}^{\alpha-1} c_k^{(p)}(g)\,g(p^{\alpha-l})$$

и, следовательно,

$$|c_\alpha^{(p)}(g)|\leqslant\alpha+\sum_{l=1}^{\alpha-1}(2^l-1)=2^\alpha-1.$$

По принципу математической индукции неравенство (51) верно для всех $p\in P$ и всех целых положительных k.

Далее, из (47) легко получаем

$$\sum_{N(m)\leqslant x} g(m)\ln N(m)=\sum_{N(m)\leqslant x}\ \sum_{p^jn=m} c_j^{(p)}(g)\,g(n)\ln N(p),$$

или

$$\sum_{N(m)\leqslant x} g(m)\ln N(m)=\sum_{N(n)\leqslant x} g(n)\sum_{N(p)^j\leqslant\frac{x}{N(n)}} c_j^{(p)}(g)\ln N(p). \tag{52}$$

Обозначая внутреннюю сумму через $S(u)$, в силу (49) и (50) имеем:

$$S(u)=S_1+S_2+S_3,$$

где

$$S_1 = \sum_{N(p) \leqslant u} g(p) \ln N(p),$$

$$S_2 = \sum_{\substack{N(p)^j \leqslant u \\ j > 1,\ N(p) \leqslant 2^{\frac{2}{\Theta}}}} \ln N(p),$$

$$S_3 = \sum_{\substack{N(p)^j \leqslant u \\ j > 1,\ N(p) > 2^{\frac{2}{\Theta}}}} c_j^{(p)}(g) \ln N(p).$$

Оценим S_1, S_2 и S_3:

$$S_1 = \sum_{N(p) \leqslant u} \ln N(p) + \sum_{N(p) \leqslant u} \big(g(p) - 1\big) \ln N(p).$$

В силу (3) и (42)

$$S_1 = \frac{1}{\Theta} u^\Theta + o(u^\Theta) + Bu^\Theta o(1) = \frac{1}{\Theta} u^\Theta + o(u^\Theta).$$

Далее,

$$S_2 = \sum_{N(p) \leqslant 2^{\frac{2}{\Theta}}} \sum_{\substack{N(p)^j \leqslant u \\ j > 1}} \ln N(p) \leqslant \sum_{N(p) \leqslant 2^{\frac{2}{\Theta}}} \ln N(p) \frac{\ln u}{\ln N(p)} = B \ln u = o(u^\Theta),$$

$$S_3 = \sum_{2^{\frac{2}{\Theta}} < N(p) \leqslant \sqrt{u}} \sum_{1 < j \leqslant \frac{\ln u}{\ln N(p)}} c_j^{(p)}(g) \ln N(p).$$

Применяя (51), имеем:

$$|S_3| \leqslant \sum_{2^{\frac{2}{\Theta}} < N(p) \leqslant \sqrt{u}} \sum_{1 < j \leqslant \frac{\ln u}{\ln N(p)}} (2^j - 1) \ln N(p) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{2^{\frac{2}{\Theta}} < N(p) \leqslant \sqrt{u}} \ln N(p) \left\{ 2^{\frac{\ln u}{\ln N(p)} + 2} - 4 \right\} \leqslant 4 \sum_{2^{\frac{2}{\Theta}} < N(p) \leqslant 4^{\frac{2}{\Theta}}} u^{\frac{\ln 2}{\ln N(p)}} \ln N(p) +$$

$$+ 4 \sum_{4^{\frac{2}{\Theta}} < N(p) \leqslant \sqrt{u}} u^{\frac{\ln 2}{\ln N(p)}} \ln N(p) = Bu^{\frac{\Theta}{2}} + Bu^{\frac{\Theta}{4}} \sum_{4^{\frac{2}{\Theta}} < N(p) \leqslant \sqrt{u}} \ln N(p)$$

и в силу (3)

$$S_3 = Bu^{\frac{\Theta}{2}} + Bu^{\frac{3\Theta}{4}} = o(u^\Theta).$$

Собирая вместе все оценки, получаем, что

$$S(u) = \frac{1}{\Theta} u^\Theta + o(u^\Theta),$$

или

$$S\left(\frac{x}{N(n)}\right) = \frac{1}{\Theta} \frac{x^\Theta}{N(n)^\Theta} + o\left(\frac{x^\Theta}{N(n)^\Theta}\right). \tag{53}$$

Сумму (52) запишем в виде

$$\sum_{N(m)\leqslant x} g(m)\ln N(m)=\frac{1}{\Theta}x^{\Theta}\sum_{N(n)\leqslant x}\frac{g(n)}{N(n)^{\Theta}}+$$
$$+\sum_{N(n)\leqslant x} g(n)\left\{S\left(\frac{x}{N(n)}\right)-\frac{1}{\Theta}\frac{x^{\Theta}}{N(n)^{\Theta}}\right\}. \tag{54}$$

Последнюю сумму оценим при помощи (53) и (1):

$$\left|\sum_{N(n)\leqslant x} g(n)\left\{S\left(\frac{x}{N(n)}\right)-\frac{1}{\Theta}\frac{x^{\Theta}}{N(n)^{\Theta}}\right\}\right|\leqslant \sum_{N(n)\leqslant x}\left|S\left(\frac{x}{N(n)}\right)-\frac{1}{\Theta}\frac{x^{\Theta}}{N(n)^{\Theta}}\right|=$$
$$=o(x^{\Theta})\sum_{N(n)\leqslant x}\frac{1}{N(n)^{\Theta}}=o(x^{\Theta}\ln x).$$

Таким образом, (54) принимает вид

$$\sum_{N(m)\leqslant x} g(m)\ln N(m)=\frac{1}{\Theta}x^{\Theta}\sum_{N(n)\leqslant x}\frac{g(n)}{N(n)^{\Theta}}+o(x^{\Theta}\ln x).$$

В силу (46)

$$\sum_{N(m)\leqslant x} g(m)\ln N(m)=\Big(C\psi(t)+o(1)\Big)x^{\Theta}\ln x. \tag{55}$$

Обозначая

$$F(u)=\sum_{N(m)\leqslant u} g(m)$$

и применяя частичное суммирование, имеем

$$\sum_{N(m)\leqslant x} g(m)\ln N(m)=F(x)\ln x-\int_1^x F(u)\frac{du}{u}=$$
$$=F(x)\ln x+B\int_1^x\frac{\nu(u)\,du}{u}=F(x)\ln x+Bx^{\Theta}.$$

Из (55) получаем

$$\Big(C\psi(t)+o(1)\Big)x^{\Theta}\ln x=F(x)\ln x+Bx^{\Theta},$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{x^{\Theta}}\sum_{N(m)\leqslant x} g(m)=C\psi(t)+\rho(x), \tag{56}$$

где $\rho(x)\to 0$ при $x\to\infty$ равномерно для $|t|\leqslant T'$.

12. Введем мультипликативную функцию $h(m)$, которая определяется уравнениями:

$$h(p^{\alpha})=\exp\Big(itf(p^{\alpha})\Big)-\sum_{k=0}^{\alpha-1}h(p^k)g(p^{\alpha-k}), \tag{57}$$

для $\alpha=0,1,2,\ldots$. Отсюда, в частности,

$$h(1)=1,$$
$$h(p)=e^{itf(p)}-g(p). \tag{58}$$

Для $h(p^{\alpha})$ имеет место оценка

$$|h(p^{\alpha})|\leqslant 2^{\alpha}\qquad(\alpha=0,1,\ldots). \tag{59}$$

Очевидно, она верна для $\alpha=0$. Предположим ее справедливость для $\alpha=0, 1, \ldots, k$. Из (57) имеем

$$|h(p^{k+1})| \leqslant 1+\sum_{l=0}^{k} 2^l = 2^{k+1}.$$

Справедливость (59) для всех α следует по принципу математической индукции. Если $p \in \boldsymbol{E}$, то из (57) находим

$$h(p^\alpha)=\exp\left(itf(p^\alpha)\right)-\sum_{k=0}^{\alpha-1} h(p^k),$$

и, аналогично,

$$h(p^{\alpha-1})=\exp\left(itf(p^{\alpha-1})\right)-\sum_{k=0}^{\alpha-2} h(p^k).$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$h(p^\alpha)=\exp\left(itf(p^\alpha)\right)-\exp\left(itf(p^{\alpha-1})\right),$$

или

$$|h(p^\alpha)| \leqslant 2 \qquad (p \in E,\ \alpha=0,\ 1,\ \ldots). \tag{60}$$

Докажем теперь, что функции $f(m)$, $g(m)$ и $h(m)$ связаны соотношением

$$e^{itf(m)}=\sum_{d \backslash m} h(d)\, g\left(\frac{m}{d}\right). \tag{61}$$

Ввиду мультипликативности $\exp\left(itf(m)\right)$ и суммы

$$\sum_{d \backslash m} h(d)\, g\left(\frac{m}{d}\right)$$

как функции от m, достаточно доказать справедливость (61) для p^α. Имеем

$$\exp\left(itf(p^\alpha)\right)=\sum_{d \backslash p^\alpha} h(d)\, g\left(\frac{p^\alpha}{d}\right)=\sum_{\beta=0}^{\alpha} h(p^\beta)\, g(p^{\alpha-\beta}).$$

Но последнее равенство справедливо в силу (57).

Убедимся еще, что ряд

$$\sum_{m \in G} \frac{h(m)}{N(m)^\Theta} \tag{62}$$

сходится абсолютно. Нетрудно проверить, что

$$\sum_{N(m) \leqslant x} \frac{|h(m)|}{N(m)^\Theta} \leqslant \prod_{N(p) \leqslant x} \left(1+\sum_{N(p)^\alpha \leqslant x} \frac{|h(p^\alpha)|}{N(p)^{\alpha\Theta}}\right).$$

Теперь достаточно показать, что ряд

$$\sum_{p \in P,\ \alpha \geqslant 1} \frac{|h(p^\alpha)|}{N(p)^{\alpha\Theta}}$$

сходится.

Имеем:

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{|h(p^\alpha)|}{N(p)^{\alpha\Theta}}=\frac{|h(p)|}{N(p)^\Theta}+\sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{|h(p^\alpha)|}{N(p)^{\alpha\Theta}}.$$

При $N(p) > 2^{\frac{2}{\Theta}}$, применяя (58) и (59), получаем

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{|h(p^\alpha)|}{N(p)^{\alpha\Theta}} \leqslant \frac{|e^{itf(p)} - g(p)|}{N(p)^\Theta} + \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{2^\alpha}{N(p)^{\alpha\Theta}} =$$

$$= \frac{|e^{itf(p)} - g(p)|}{N(p)^\Theta} + \frac{4}{N(p)^\Theta \left(N(p)^\Theta - 2\right)}.$$

Если $N(p) \leqslant 2^{\frac{2}{\Theta}}$, то из (58) и (60) находим

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{|h(p^\alpha)|}{N(p)^{\alpha\Theta}} \leqslant \frac{|e^{itf(p)} - g(p)|}{N(p)^\Theta} + \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{2}{N(p)^{\alpha\Theta}} \leqslant c_{10}(p),$$

где $c_{10}(p)$ зависит от p для $N(p) \leqslant 2^{\frac{2}{\Theta}}$. Суммированием по p получаем

$$\sum_{p \in P} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{|h(p^\alpha)|}{N(p)^{\alpha\Theta}} \leqslant \sum_{N(p) \leqslant 2^{\frac{2}{\Theta}}} c_{10}(p) + \sum_{N(p) > 2^{\frac{2}{\Theta}}} \frac{4}{N(p)^\Theta \left(N(p)^\Theta - 2\right)} +$$

$$+ \sum_{N(p) > 2^{\frac{2}{\Theta}}} \frac{|e^{itf(p)} - g(p)|}{N(p)^\Theta} = c_{11} + \sum_{\substack{N(p) > 2^{\frac{2}{\Theta}} \\ p \in E}} \frac{|e^{itf(p)} - 1|}{N(p)^\Theta} \leqslant c_{11} + 2 \sum_{p \in E} \frac{1}{N(p)^\Theta},$$

а из (41) знаем, что последний ряд сходится, откуда и следует сходимость ряда (62).

Очевидно, ряд

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{g(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}}$$

сходится абсолютно, а из (59) и (60) следует абсолютная сходимость ряда

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{h(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}}.$$

Тогда

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{h(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}} \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{g(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}}\right) =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}} \left\{ h(p^0) g(p^\alpha) + h(p) g(p^{\alpha-1}) + \ldots + h(p^\alpha) g(p^0) \right\},$$

а в силу (57)

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{h(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{g(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\exp\left(itf(p^\alpha)\right)}{N(p)^{\alpha\Theta}}. \tag{63}$$

Так как ряд (62) абсолютно сходится, то

$$\sum_{d \in G} \frac{h(d)}{N(d)^\Theta} = \prod_{p \in P} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{h(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}},$$

а из (63) следует

$$\sum_{d \in G} \frac{h(d)}{N(d)^{\Theta}} = \prod_{p \in P} \frac{\sum\limits_{\alpha=0}^{\infty} N(p)^{-\alpha\Theta} \exp\left(itf(p^{\alpha})\right)}{\sum\limits_{\alpha=0}^{\infty} N(p)^{-\alpha\Theta} g(p^{\alpha})}. \tag{64}$$

Из (61) имеем

$$\varphi_x(t) = \frac{1}{\nu(x)} \sum_{N(m) \leqslant x} e^{itf(m)} = \frac{1}{\nu(x)} \sum_{N(m) \leqslant x} \sum_{d \backslash m} h(d) g\left(\frac{m}{d}\right).$$

После обращения порядка суммирования получаем

$$\varphi_x(t) = \frac{1}{\nu(x)} \sum_{N(d) \leqslant x} \sum_{\substack{N(m) \leqslant x \\ d \backslash m}} h(d) g\left(\frac{m}{d}\right) = \frac{1}{\nu(x)} \sum_{N(d) \leqslant x} h(d) \sum_{N(n) \leqslant \frac{x}{N(d)}} g(n),$$

а из (56) следует

$$\varphi_x(t) = \frac{x^{\Theta}}{\nu(x)} \left\{ C\psi(t) \sum_{N(d) \leqslant x} \frac{h(d)}{N(d)^{\Theta}} + \sum_{N(d) \leqslant x} \frac{h(d)}{N(d)^{\Theta}} \rho\left(\frac{x}{N(d)}\right) \right\}. \tag{65}$$

В силу (56) для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $x_{\varepsilon} > 1$, что

$$|\rho(x)| < \varepsilon$$

при $x \geqslant x_{\varepsilon}$. Кроме того, для всех x

$$|\rho(x)| \leqslant c_{12}.$$

При $x \geqslant x_{\varepsilon}$ будем иметь:

$$\left| \sum_{N(d) \leqslant x} \frac{h(d)}{N(d)^{\Theta}} \rho\left(\frac{x}{N(d)}\right) \right| \leqslant \sum_{N(d) \frac{x}{x_{\varepsilon}}} \left| \frac{h(d)}{N(d)^{\Theta}} \rho\left(\frac{x}{N(d)}\right) \right| +$$

$$+ \sum_{\frac{x}{x_{\varepsilon}} < N(d) \leqslant x} \left| \frac{h(d)}{N(d)^{\Theta}} \rho\left(\frac{x}{N(d)}\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{N(d) \leqslant \frac{x}{x_{\varepsilon}}} \frac{|h(d)|}{N(d)^{\Theta}} + c_{12} \sum_{\frac{x}{x_{\varepsilon}} < N(d) \leqslant x} \frac{|h(d)|}{N(d)^{\Theta}}.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \left| \sum_{N(d) \leqslant x} \frac{h(d)}{N(d)^{\Theta}} \rho\left(\frac{x}{N(d)}\right) \right| \leqslant \varepsilon \sum_{d \in G} \frac{|h(d)|}{N(d)^{\Theta}},$$

или

$$\sum_{N(d) \leqslant x} \frac{h(d)}{N(d)^{\Theta}} \rho\left(\frac{x}{N(d)}\right) = o(1) \sum_{N(d) \leqslant x} \frac{h(d)}{N(d)^{\Theta}}.$$

Тогда (65) принимает вид

$$\varphi_x(t) = \frac{x^{\Theta}}{\nu(x)} \left(C\psi(t) + o(1)\right) \sum_{N(d) \leqslant x} \frac{h(d)}{N(d)^{\Theta}} = \left(\psi(t) + o(1)\right) \sum_{N(d) \leqslant x} \frac{h(d)}{N(d)^{\Theta}}.$$

Отсюда в силу (62) получаем

$$\varphi_x(t) \to \psi(t) \sum_{d \in G} \frac{h(d)}{N(d)^{\Theta}}.$$

Используя (64), находим

$$\varphi_x(t) \to \psi(t) \prod_{p\in P} \frac{\sum\limits_{\alpha=0}^{\infty} N(p)^{-\alpha\Theta} \exp\left(itf(p^\alpha)\right)}{\sum\limits_{\alpha=0}^{\infty} N(p)^{-\alpha\Theta} g(p^\alpha)},$$

а из (45) имеем

$$\varphi_x(t) \to \prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{N(p)^\Theta}\right)\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\exp\left(itf(p^\alpha)\right)}{N(p)^{\alpha\Theta}}=\varphi(t).$$

Теорема доказана.

13. Приведем несколько примеров полугрупп (см. [1]).

1°. Пусть элементы полугруппы G — положительные вещественные числа $\delta \geqslant 1$, причем логарифмы образующих элементов линейно независимы. В этом случае систему образующих элементов назовем базой полугруппы G.

Если положим $N(\delta)=\delta$, то теорема П. Эрдёша и А. Винтнера будет справедлива для такой полугруппы. Например, в качестве полугруппы G можно взять множество чисел вида $p^{\Theta^{-1}}$, где $n=1, 2, \ldots$ и $\Theta>0$. Очевидно, для полугруппы G

$$\nu(x)=\sum_{n^{\Theta^{-1}}\leqslant x} 1 = x^\Theta + B.$$

Базой полугруппы G будет множество чисел вида $p^{\Theta^{-1}}$, где p пробегает множество простых рациональных чисел. При $\Theta=1$ получаем теорему П. Эрдёша и А. Винтнера на множестве натуральных чисел.

2°. Рассмотрим множество целых комплексных чисел. Мы достигнем полной однозначности, беря полугруппу G целых комплексных чисел z с базой, состоящей из простых гауссовых чисел $z_1, z_2, \ldots$ первого квадранта. Полагая $N(z)=|z|$, имеем [3]

$$\nu(x)=\frac{1}{4}\pi x^2+Bx^{\Theta_1},$$

где $\Theta_1<\frac{2}{3}$. Следовательно, наша теорема будет справедлива при $\Theta=2$.

3°. Рассмотрим конечное расширение K поля рациональных чисел степени n. Множество G целых отличных от нуля идеалов $\mathfrak{a}$ поля K будет полугруппой с базой, состоящей из простых идеалов $\mathfrak{p}$. Если нормой элемента $\mathfrak{a}$ будем считать норму идеала $\mathfrak{a}$, то [2]

$$\nu(x)=\mu h x + Bx^{1-\frac{1}{n}},$$

и теорема П. Эрдёша и А. Винтнера будет справедлива при $\Theta=1$.

В заключение выражаю искреннюю благодарность И. Кубилюсу за внимание к работе и советы.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
19.XII.1963.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Бредихин. Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями, Матем. сб., 1958, **46(2)**, стр. 143—158.
2. Г. Вейль. Алгебраическая теория чисел, Москва, ИЛ, 1947.
3. И. М. Виноградов. О числе целых точек внутри круга, Изв. АН СССР, сер. физ.-матем., 1932, № 3, 313—326.
4. Г. Харди. Расходящиеся ряды. Москва, Издат. иностр. лит., 1951.
5. H. Delange. Sur les functions arithmétiques multiplicatives, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 1961, **78**, 273—304.
6. P. Erdos. On the density of some sequences of numbers, J. London Math. Soc., 1938, **13**, 119—127.
7. P. Erdos, A. Wintner. Additive arithmetical functions and statistical independence, Amer. J. Math., 1939, **61**, 713—721.

P. ERDIOŠO IR A. VINTNERIO TEOREMA SUTVARKYTUOSE PUSGRUPIUOSE SU REGULIARIU NORMAVIMU

Z. JUŠKYS

(Reziumė)

Tegul G — multiplikatyvinis pusgrupis su suskaitytine sistema P begalinės eilės generuojančių elementų. Taigi, kiekvienas elementas $m \in G$ vienareikšmiškai užrašomas pavidalu $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots$, kur $p_i \in P$ ir α_i — sveiki neneigiami skaičiai. Toliau, N — pusgrupio G homomorfizmas į multiplikatyvinį teigiamų skaičių pusgrupį; $N(m)$ — elemento $m \in G$ vaizdas, norma. Mes tiriame pusgrupį, kuriam

$$\sum_{N(m)\leqslant x} 1 = Cx^{\Theta} + O(x^{\Theta_1}),$$

kur C, Θ, Θ_1 — konstantos, $C>0$, $0\leqslant\Theta_1<\Theta$, ir jį vadiname sutvarkytu pusgrupiu su reguliariu normavimu.

Pažymėsime $f(m)$ realią adityvinę funkciją, kuri apibrėžiama visiems m, $n \in G$ savybe

$$f(mn)=f(m)+f(n),$$

kai m ir n tarpusavy pirminiai. Tegul, toliau, $\lambda_x\{f(m)<y\}$ yra pusgrupio elementų, kuriems $N(m)\leqslant x$, $f(m)<y$, dažnumas.

Šiame darbe yra įrodoma ši teorema:

Pasiskirstymo funkcijos

$$\lambda_x\{f(m)<y\},$$

kai $x\to\infty$, konverguoja į ribinį pasiskirstymo dėsnį tada ir tik tada, kai eilutės

$$\sum_{p\in P}\frac{\|f(p)\|}{N(p)^{\Theta}} \quad \text{ir} \quad \sum_{p\in P}\frac{\|f(p)\|^2}{N(p)^{\Theta}},$$

kur

$$\|f(p)\|=\begin{cases} f(p), & \text{jei } |f(p)|<1, \\ 1, & \text{jei } |f(p)|\geqslant 1, \end{cases}$$

konverguoja. Jei ribinis dėsnis egzistuoja, tai jo charakteringoji funkcija yra

$$\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{N(p)^{\Theta}}\right)\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\exp\left(itf(p^{\alpha})\right)}{N(p)^{\alpha\Theta}}.$$

ERDÖS-WINTNERSCHE SATZ FÜR DIE GEORDNETEN HALBGRUPPEN MIT REGULÄRER NORMIERUNG

Z. JUŠKYS

(Zusammenfassung)

Es sei G eine multiplikative Halbgruppe mit abzählbar vielen erzeugenden E lemente unendlichen Ordnungs. Es sei N – ein Homomorphismus der Halbgruppe G in die multiplikative Halbgruppe der positiven Zahlen. Man nennt das homomorphe Bild $N(m)$ die Norm des Elementes m. Wir annehmen, dass die Anzahl der Elementen der Halbgruppe G mit $N(m) \leqslant x$ gleich $Cx^{\Theta}+O(x^{\Theta_1})$ ist; C, Θ, Θ_1 sind Konstanten, $C>0$, $0 \leqslant \Theta_1 < \Theta$.

Wir betrachten eine reelle Funktion $f(m)$, die auf G definiert ist und für jedes Paar teilerfremden Elementen m, n die Bedingung

$$f(mn)=f(m)+f(n)$$

genügt.

Im vorliegenden Artikel wird der folgende Satz bewiesen.

Es sei $\lambda_x\{f(m)<y\}$ die Häufigkeit der Elementen $m \in G$ für die $N(m) \leqslant x$ und $f(m)<y$ ist. Für die Konvergenz der Verteilungsfunktion $\lambda_x\{f(m)<y\}$ $(x \to \infty)$ gegen eine Verteilungsfunktion $F(y)$ an jeder Stetigkeitsstelle von $F(y)$ ist notwendig und hinreichend, dass ie Reihen

$$\sum_p \frac{\|f(p)\|}{N(p)^{\Theta}} \quad \text{und} \quad \sum_p \frac{\|f(p)\|^2}{N(p)^{\Theta}},$$

wo über alle erzeugenden Elementen p summiert wird, konvergieren. Hier bezeichnet man

$$\|f(p)\|=\begin{cases} f(p) & \text{für } |f(p)|<1, \\ 1 & \text{für } |f(p)| \geqslant 1. \end{cases}$$

Die charakteristische Funktion des Grenzverteilungssatzes, falls er existiert, ist gleich

$$\prod_p \left(1-\frac{1}{N(p)^{\Theta}}\right) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\exp\left(itf(p^{\alpha})\right)}{N(p)^{\alpha\Theta}}.$$