ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
IV LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4

1964

О ВЗАИМНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ ПРОСТЫХ ГАУССОВЫХ ЧИСЕЛ НА ПЛОСКОСТИ

И. ВАЙТКЯВИЧУС

1. В области изучения рационального поля много работ посвящено исследованию вопросов, связанных с взаимным расположением простых чисел в натуральном ряду. Это вопросы, касающиеся простых чисел-близнецов (так называемых простых чисел y-близнецов), изолированных простых чисел и ряд других вопросов. Мы здесь не будем касаться полученных результатов, которые можно найти в работах [1], [2], [3], [4]. Представляет некоторый интерес исследование подобных вопросов и в других числовых полях, в частности, в поле гауссовых чисел, о котором в дальнейшем и будет идти речь. В настоящей заметке, введя подходящим образом соответствующие понятия, мы получаем некоторые результаты о взаимном расположении гауссовых чисел на плоскости. В доказательствах используются элементарные средства, основанные на методе решета.

В дальнейшем числа гауссова поля будем называть просто числами и не будем делать никакого различия между целыми гауссовыми числами и точками плоскости с целыми координатами, так что целые или простые числа часто будем называть целыми, соответственно простыми точками.

Исследуя таблицу распределения простых точек в круге с центром в начале координат, несмотря на их беспорядочное, на первый взгляд, расположение, можно заметить некоторые группы простых точек, обладающие определенным свойством и, следовательно, можно произвести некоторую классификацию всех простых точек в зависимости от их взаимного расположения. Детальной такой классификации мы здесь не будем проводить, но отметим несколько характерных групп простых точек.

Пусть ξ – комплексное переменное.

Простую точку $\mathfrak{p}$ назовем изолированной, если существует такое действительное число $\delta > \sqrt{2}$, что в круге с центром в точке $\mathfrak{p}$ и радиусом δ, т. е. в круге

$$|\xi - \mathfrak{p}| \leqslant \delta$$

не существует других простых точек, отличных от $\mathfrak{p}$. Величину δ можно назвать радиусом изоляции. Эта величина может принимать значения $\delta = \sqrt{m}$, где m – натуральное число, частное от деления которого на наибольший полный квадрат не имеет простых рациональных делителей вида

$4k+3$, $k=0, 1, 2, \ldots$ Примерами таких изолированных точек могут быть точки $\mathfrak{p}=46+5i$ с нормой 2141 или $\mathfrak{p}=58+47i$ с нормой 5573, для которых $\delta=\sqrt{10}$.

Все остальные простые точки объединяются в группы, которые можно назвать цепочками. Точнее, последовательность простых точек $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_s$ назовем цепочкой длины s, если для любой точки $\mathfrak{p}_j$, $j=1, 2, \ldots, s$, существует по меньшей мере одна простая точка $\mathfrak{p}_k$, $1 \leqslant k \leqslant s$, $k \neq j$, такая, что

$$|\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_k| = \sqrt{2}., \quad k \neq j$$

(расстояние между двумя простыми точками, исключая точку $1+i$, не может быть меньшим, чем $\sqrt{2}$).

Если $s=2$, то пару простых точек $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, составляющих цепочку, будем называть простыми точками-близнецами. Имеются также цепочки длиной $s=3$, такие, что все точки $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ расположены в трех вершинах одного и того же квадрата со стороной длины $\sqrt{2}$. Такие простые точки можно назвать простыми тройками. Аналогично определим и простые четверки, как, например, точки $24+5i$, $25+4i$, $25+6i$, $26+5i$ или $45+14i$, $44+15i$ $45+16i$, $44+15i$. Другие цепочки имеют разную длину $s \geqslant 3$ и разные формы.

В отношении простых изолированных точек, простых близнецов, тро ек, четверок можно поставить ряд разнообразных вопросов, ответы на которые не следуют тривиальным образом.

Вместе с тем, даже в небольшом круге $|\xi| \leqslant 75$, встречаются сравнительно большие области, в которых не существует ни одного простого числа. При удалении от начала координат будут существовать сколь угодно большие выпуклые области, не содержащие ни одной простой точки. Построить такие области нетрудно. Известно, что для всякого натурального числа m все числа $m!+2$, $m!+3, \ldots, m!+m$ являются составными. Поэтому в круговом кольце с центром в начале координат, внутренним радиусом $r=\sqrt{m!+2}$ и внешним радиусом $R=\sqrt{m!+m}$ мы не найдем ни одной простой точки (исключая, может быть, координатные оси).

Можно так же построить круги сколь угодно большого радиуса без простых точек. Для этой цели через точку $(1, 0)$ проведем окружность радиуса $R>1$, не содержащую других комплексных единиц, т. е. точек с координатами $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. Пусть $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_s$ обозначают все целые точки, находящиеся в полученном круге. Составим произведение

$$\mathfrak{P} = \prod_{j=1}^{s} \mathfrak{a}_j$$

и возьмем числа

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P} + \mathfrak{a}_1, \quad \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P} + \mathfrak{a}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{P}_s = \mathfrak{P} + \mathfrak{a}_s.$$

Ясно, что все эти числа являются составными. Кроме того, все точки $\mathfrak{P}_j$, $j=1, 2, \ldots, s$ будут расположены в круге того же радиуса R, граница которого будет проходить через точку $\mathfrak{P}$. Таким образом мы получили круг радиуса R, в котором нет ни одной простой точки.

2. Все целые точки, находящиеся в некоторой области мы в дальнейшем будем располагать в последовательности по возрастающим нормам,

а если нормы равны, то по возрастающим аргументам. Так, последовательность

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n, \ldots$$

означает, что

$$N(\mathfrak{a}_1) \leqslant N(\mathfrak{a}_2) \leqslant \ldots \leqslant N(\mathfrak{a}_n) \leqslant \ldots$$

и если, например, $N(\mathfrak{a}_j) = N(\mathfrak{a}_{j+1})$, то полагаем

$$\arg \mathfrak{a}_j < \arg \mathfrak{a}_{j+1}.$$

Здесь и в дальнейшем $N(\mathfrak{a})$ означает норму числа $\mathfrak{a}$. Тоже самое относится и к последовательностям простых чисел.

Для любой целой точки $\mathfrak{m}$ определим функцию

$$\rho(\mathfrak{m}) = \min_{\mathfrak{p}_j \neq \mathfrak{m}} (\mathfrak{m} - \mathfrak{p}_j).$$

Если $\mathfrak{m}$ не является простой точкой, то значение функции $\rho(\mathfrak{m})$ дает нам радиус круга, в котором не существует простых точек. Если $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$, то значение функции $\rho(\mathfrak{p})$ совпадает с радиусом изоляции точки $\mathfrak{p}$, причем для неизолированных простых точек $\rho(\mathfrak{p}) = \sqrt{2}$. В случаях, когда рассматриваются целые точки, принадлежащие некоторой области Ω, для функции $\rho(\mathfrak{m})$ будем употреблять символ $\rho(\mathfrak{m}, \Omega)$, причем запись $\rho(\mathfrak{m})$ всегда содержит условие $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{p}$.

Изучение распределения значений функций $\rho(\mathfrak{m})$ и $\rho(\mathfrak{p})$ представляет те же трудности, что и изучение распределения разностей между двумя последовательными простыми рациональными числами или изолированными простыми числами. Тем не менее, элементарными средствами, используемыми в рациональном случае, можно получить некоторые результаты относительно введенных функций.

В поле рациональных чисел известен следующий результать:

пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ означает возрастающую последовательность всех простых рациональных чисел; при $n \to \infty$ существует бесконечно много простых чисел p_n $(n > 1)$, что

$$p_n - p_{n-1} > c_1 \ln p_n \cdot \frac{\ln \ln p_n \cdot \ln \ln \ln \ln p_n}{(\ln \ln \ln p_n)^2},$$

где $c_1 > 0$ некотороя от p_n не зависящая постоянная. (См. [1], теорема V. 5. 1.)

Мы докажем аналогичный результат для функции $\rho(\mathfrak{m})$.

Теорема 1. *Пусть последовательность $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ означает последовательность всех простых гауссовых чисел до n-го, так что*

$$N(\mathfrak{p}_1) \leqslant N(\mathfrak{p}_2) \leqslant \cdots \leqslant N(\mathfrak{p}_n) \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \arg \mathfrak{p}_j < \frac{\pi}{2}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Существует бесконечно много целых чисел $\mathfrak{m}$ таких, что

$$\rho(\mathfrak{m}) = \min_{\mathfrak{p}_j \neq \mathfrak{m}} |\mathfrak{m} - \mathfrak{p}_j| > c_2 \ln N(\mathfrak{p}_n) \cdot \frac{\ln \ln N(\mathfrak{p}_n) \cdot \ln \ln \ln \ln N(\mathfrak{p}_n)}{(\ln \ln \ln N(\mathfrak{p}))^2}, \tag{1}$$

где $c_2 > 0$ постоянная, не зависящая от $\mathfrak{p}_n$ и $\mathfrak{m}$.

Для доказательства этой теоремы нам будут необходимы две предварительные леммы.

Лемма 1. *Пусть M означает множество целых гауссовых чисел, состоящее из N элементов, причем все числа принадлежат первому квадранту плоскости без мнимой оси. Пусть, далее, $\mathfrak{q}_j$, $j=1, 2, \ldots, z$ различные простые гауссовые числа, ни одно из которых не является делителем чисел множества M, $0 \leqslant \arg \mathfrak{q}_j < \frac{\pi}{2}$, $j=1, 2, \ldots, z$. Тогда для каждого $\mathfrak{q}_j$ существует такое целое $\mathfrak{r}_j$, $0 < N(\mathfrak{r}_j) < N(\mathfrak{q}_j)$, $j=1, 2, \ldots, z$, что*

$$N(\mathfrak{m} \in M; \quad \mathfrak{m} \not\equiv \mathfrak{r}_j \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{q}_j), \quad j=1, 2, \ldots, z) \leqslant N \prod_{1 \leqslant j \leqslant z} \frac{N(\mathfrak{q}_j)-2}{N(\mathfrak{q}_j)-1}.$$

Доказательство. По каждому модулю $\mathfrak{q}_j$ существует $N(\mathfrak{q}_j)-1$ классов вычетов, и существует по меньшей мере одно токое $\mathfrak{r}_1$, для которого

$$N\Big(\mathfrak{m} \in M; \quad \mathfrak{m} \equiv \mathfrak{r}_1 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{q}_1)\Big) \geqslant \frac{N}{N(\mathfrak{q}_1)-1};$$

тогда

$$N\Big(\mathfrak{m} \in M; \quad \mathfrak{m} \not\equiv \mathfrak{r}_1 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{q}_1)\Big) \leqslant N - \frac{N}{N(\mathfrak{q}_1)-1} \leqslant N \frac{N(\mathfrak{q}_1)-2}{N(\mathfrak{q}_1)-1}.$$

Выбрасывая из множества M все эти числа $\mathfrak{m}$. для числа $\mathfrak{q}_2 \neq \mathfrak{q}_1$, рассуждая аналогично, получим:

$$N\Big(\mathfrak{m} \in M; \quad \mathfrak{m} \not\equiv \mathfrak{r}_1 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{q}_1), \quad \mathfrak{m} \not\equiv \mathfrak{r}_2 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{q}_2)\Big) \leqslant$$
$$\leqslant N_1 \frac{N(\mathfrak{q}_2)-2}{N(\mathfrak{q}_2)-1} \leqslant N \frac{\big(N(\mathfrak{q}_1)-2\big)\big(N(\mathfrak{q}_2)-2\big)}{\big(N(\mathfrak{q}_1)-1\big)\big(N(\mathfrak{q}_2)-1\big)},$$

где

$$N_1 = N - N\Big(\mathfrak{m} \in M; \quad \mathfrak{m} \not\equiv \mathfrak{r}_1 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{q}_1)\Big).$$

Продолжая такое рассуждение для числа $\mathfrak{q}_3 \neq \mathfrak{q}_2 \neq \mathfrak{q}_1$ и т. д. получим утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть $N(x, y)$ означает число тех гауссовых чисел, нормы которых не превосходят числа x и которые содержат только простые делители с нормами $\leqslant y$. Тогда для $y \leqslant x$*

$$N(x, y) < x \exp\left\{ -\frac{\ln\ln\ln y}{\ln y} \ln x + \ln\ln y + O\left(\frac{\ln\ln y}{\ln\ln\ln y}\right)\right\}, \tag{2}$$
$$y = y(x) \to \infty \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Доказательство. Будем рассматривать только неассоциированные целые числа. Пусть в дальнейшем Σ' означает суммирование по всем числам, нормы простых множителей которых $\leqslant y$.

Пусть $\eta > 0$ любое действительное число. Если $N(\mathfrak{n}) \leqslant x$, то $1 \leqslant \frac{x}{N(\mathfrak{n})}$ и тогда имеем:

$$N(x, y) = \sum_{N(\mathfrak{n}) \leqslant x}{}' 1 \leqslant \sum_{N(\mathfrak{n}) \leqslant x}{}' \left(\frac{x}{N(\mathfrak{n})}\right)^{\eta} = x^{\eta} \sum_{N(\mathfrak{n}) \leqslant x}{}' \frac{1}{N(\mathfrak{n})^{\eta}} \leqslant$$
$$\leqslant x^{\eta} \sum_{\mathfrak{n}}{}' \frac{1}{N(\mathfrak{n})^{\eta}} = x^{\eta} \prod_{N(\mathfrak{p}) \leqslant y} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^{\eta}}\right)^{-1} = x^{\eta} P. \tag{3}$$

Положим теперь $\eta > \frac{1}{2}$. Суммируя по частям найдем:

$$\ln P = \sum_{N(\mathfrak{p}) \leqslant y} \ln \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^\eta}\right)^{-1} = \pi(y) \ln \left(1 - \frac{1}{y^\eta}\right)^{-1} + \eta \int_2^y \frac{\pi(\xi)\, d\xi}{(\xi^\eta - 1) \ln^2 \xi} =$$

$$= O\left(\frac{y^{1-\eta}}{\ln y}\right) + \eta \int_2^y \frac{d\xi}{(\xi^\eta - 1) \ln \xi} + O\left(\eta \int_2^y \frac{d\xi}{(\xi^\eta - 1) \ln^2 \xi}\right), \tag{4}$$

так как

$$\pi(\xi) = \frac{\xi}{\ln \xi} + O\left(\frac{\xi}{\ln^2 \xi}\right).$$

($\pi(x)$ означает число простых неассоциированных гауссовых чисел $\mathfrak{p}$ с $N(\mathfrak{p}) \leqslant x$.)

Положим в правой части равенства (4) $1 - \eta = \delta = \frac{\ln \ln \ln y}{\ln y}$. Тогда

$$\frac{y^{1-\eta}}{\ln y} = \frac{e^{\delta \ln y}}{\ln y} = \frac{\ln \ln y}{\ln y};$$

далее для $y \to \infty$ имеем

$$\eta \int_2^y \frac{d\xi}{(\xi^\eta - 1) \ln \xi} = (1 - \delta) \left\{ \int_2^y \frac{d\xi}{\xi^\eta \ln \xi} + O(1) \right\},$$

$$(1 - \delta) \int_2^y \frac{d\xi}{\xi^\eta \ln \xi} = (1 - \delta) \int_{\delta \ln 2}^{\delta \ln y} e^u \frac{du}{u} = (1 - \delta) \left(\int_{\delta \ln 2}^{1} + \int_1^{\delta \ln y} \right) e^u \frac{du}{u} =$$

$$= (1 - \delta) \left\{ \ln \frac{1}{\delta} + O(1) + \frac{e^{\delta \ln y}}{\delta \ln y} + O\left(\frac{e^{\delta \ln y}}{(\delta \ln y)^2}\right) \right\},$$

так как

$$\int_{\delta \ln 2}^{1} (e^u - 1) \frac{du}{u} = O(\delta).$$

$$\int_1^{\ln z} \frac{e^u}{u}\, du = \int_e^z \frac{d\xi}{\ln \xi} = \frac{z}{\ln z} + O(1) + \int_2^z \frac{d\xi}{\ln^2 \xi} = \frac{z}{\ln z} + O\left(\frac{z}{\ln^2 z}\right).$$

Поэтому для $y \to \infty$ получаем

$$\eta \int_2^y \frac{d\xi}{(\xi^\eta - 1) \ln \xi} = \left(1 - \frac{\ln \ln \ln y}{\ln y}\right) \left\{ \ln \ln y - \ln \ln \ln \ln y + O(1) + \right.$$

$$\left. + \frac{\ln \ln y}{\ln \ln \ln y} + O\left(\frac{\ln \ln y}{(\ln \ln \ln y)^2}\right) \right\} = \ln \ln y + O\left(\frac{\ln \ln y}{\ln \ln \ln y}\right).$$

Наконец имеем:

$$\eta \int_2^y \frac{d\xi}{(\xi^\eta - 1) \ln^2 \xi} = O\left(\int_2^y \frac{d\xi}{\xi^\eta \ln^2 \xi}\right),$$

$$\int_2^y \frac{d\xi}{\xi^\eta \ln^2 \xi} = \delta \left(\int_{\delta \ln 2}^{1} + \int_1^{\delta \ln y} \right) e^u \frac{du}{u^2} = \delta \left\{ O\left(\frac{1}{\delta \ln 2}\right) + O\left(\frac{e^{\delta \ln y}}{(\delta \ln y)^2}\right) \right\}.$$

Отсюда и по определению числа δ

$$\eta \int_2^y \frac{d\xi}{(\xi^\eta - 1) \ln^2 \xi} = O(1), \qquad (y \to \infty).$$

Подставляя последнее в (4), получим

$$\ln P=\ln\ln y+O\left(\frac{\ln\ln y}{\ln\ln\ln y}\right). \qquad (y\to\infty),$$

что доказывает лемму для

$$\eta=1-\frac{\ln\ln\ln y}{\ln y}.$$

3. Доказательство теоремы 1. Через точку с координатами $(1, 0)$ проведем любую окружность радиуса $\sqrt{U}$, где U — некоторое действительное число >0, причем эта окружность не содержит точек i, -1, $-i$. Пусть все целые числа, находящиеся в полученном круге, расположены в последовательности $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_r$, где $r=r(U)$ — некоторое натуральное число.

Докажем сначала, что для достаточно большого n существует такое целое число $\mathfrak{n}\ (=\mathfrak{n}(n))$ с условием $0<N(\mathfrak{n})\leqslant N(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n)$ и такое действительное число $U>0$, что все числа

$$\mathfrak{n}+\mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{n}+\mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{n}+\mathfrak{b}_r$$

являются составными ($\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ — простые числа, определены в формулировке теоремы).

Заметим, что для любых целых $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ система сравнений

$$z\equiv\mathfrak{r}_1 \pmod{\mathfrak{p}_1}, \quad z\equiv\mathfrak{r}_2 \pmod{\mathfrak{p}_2}, \ldots, z\equiv\mathfrak{r}_n \pmod{\mathfrak{p}_n} \tag{5}$$

разрешима и имеет единственное решение $\mathfrak{n}$, удовлетворяющее условию

$$0<N(\mathfrak{n})\leqslant N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_n), \tag{6}$$

Поэтому задача сводится к тому, чтобы найти число $\mathfrak{n}$ с условием (6) и возможно бóльшее число U, для которого все числа $\mathfrak{n}+\mathfrak{b}_1, \mathfrak{n}+\mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{n}+\mathfrak{b}_r$ делились хотя бы на одно простое число $\mathfrak{p}_j$, $j=1, 2, \ldots, n$, причем $\mathfrak{p}_j$ не должен быть тривиальным делителем чисел $\mathfrak{n}+\mathfrak{b}_j$.

Пусть сначала U — любое действительное число с условием $U>N(\mathfrak{p}_n)$, а числа X, Y, Z, V удовлетворяют неравенствам

$$0<X<Y<Z<N(\mathfrak{p}_n)<V=2U+1. \tag{7}$$

Определим в плоскости пять круговых колец следующим образом:

$$|\xi|\leqslant\sqrt{X}, \quad \sqrt{X}<|\xi|\leqslant\sqrt{Y}, \quad \sqrt{Y}<|\xi|\leqslant\sqrt{Z},$$

$$\sqrt{Z}<|\xi|\leqslant\sqrt{N(\mathfrak{p}_n)}, \quad \sqrt{N(\mathfrak{p}_n)}<|\xi|\leqslant\sqrt{V}.$$

Обозначим эти области соответственно K_1, K_2, K_3, K_4, K_5. Множество целых чисел $\mathfrak{b}_j$, $1\leqslant j\leqslant r$ разобъем на пять подмножеств M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, полагая, что число $\mathfrak{b}_j$ принадлежит множеству M_k, $k=1, 2, 3, 4, 5$, если оно делится на простое число $\mathfrak{p}_j=\mathfrak{p}_j^{(k)}$, $j=1, \ldots, n$, $\mathfrak{p}_j^{(k)}\in K_k$. Множества M_k, $k=1, \ldots, 5$ могут и пересекаться, причем для простого числа из $\mathfrak{p}_j^{(k)}\in K_k$ следует $\mathfrak{p}_j^{(k)}\in M_k$. Для числа $\mathfrak{n}$ потребуем сначала, чтобы выполнялись условия

$$\mathfrak{n}\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_j^{(1)}}, \quad \mathfrak{n}\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_j^{(3)}} \tag{8}$$

для всех $\mathfrak{p}_j^{(1)}\in K_1$ и $\mathfrak{p}_j^{(3)}\in K_3$. Положим $\mathfrak{p}_j^{(k)}=\mathfrak{p}^{(k)}$.

В таком случае для всех чисел $\mathfrak{b}_j\in M_1+M_3$ имеем, что $\mathfrak{n}+\mathfrak{b}_j$ являются составными числами.

Пусть теперь $\mathfrak{b}_j \bar{\in} M_1 + M_3$. Подберем X, Z и U такие, чтобы множества M_2 и $M_4 + M_5$ не имели бы общих элементов. Для этого достаточно взять

$$XZ > V, \qquad (V = 2U + 1). \tag{9}$$

Отсюда следует, что для $\mathfrak{b}_j$ с условиями $\mathfrak{p}^{(2)} \mid \mathfrak{b}_j$, $\mathfrak{p}^{(4)} \mid \mathfrak{b}_j$ должно быть $N(\mathfrak{b}_j) \geqslant N(\mathfrak{p}^{(2)})\, N(\mathfrak{p}^{(4)}) > XZ > V$ и с другой стороны $N(\mathfrak{b}_j) \leqslant V$. Тогда из (9) получаем, что такие $\mathfrak{b}_j$ должны иметь простой делитель $\mathfrak{p} \in K_4 + K_5$. Следовательно, любое $\mathfrak{b}_j \bar{\in} M_1 + M_3$ удовлетворяет одному из условий:

1) $\mathfrak{b}_j \in M_2$ и имеет простые делители, принадлежащие только K_2;

2) $\mathfrak{b}_j \in M_4 + M_5$ и является простым.

Обозначим множество этих простых чисел $\mathfrak{b}_j \in M_4 + M_5$ через P и воспользуемся леммой 1, полагая в ней $\mathfrak{q}_j = \mathfrak{p}^{(2)}$ и $M = P$. Тогда, очевидно, $N = \pi(V) - \pi(Z)$. По той же лемме для каждого простого числа $\mathfrak{p}^{(2)}$ существует такое $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\mathfrak{p}^{(2)})$, $0 < N\Big(\mathfrak{r}(\mathfrak{p}^{(2)})\Big) < N(\mathfrak{p}^{(2)})$, удовлетворяющее условию: исключая не более чем число

$$A < \{\pi(V) - \pi(Z)\} \prod_{\mathfrak{p}^{(2)} \in K_2} \frac{N(\mathfrak{p}^{(2)}) - 2}{N(\mathfrak{p}^{(2)}) - 1} \tag{10}$$

чисел $\mathfrak{b}_j$, $1 \leqslant j \leqslant A$, для каждого числа $\mathfrak{b}_j \in P$ существует число $\mathfrak{p}^{(2)}$ с условием

$$\mathfrak{b}_j \equiv \mathfrak{r}\,(\mathfrak{p}^{(2)} \,(\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}^{(2)}).$$

Потребуем теперь от числа $\mathfrak{n}$, чтобы выполнялись условия

$$\mathfrak{n} \equiv -\mathfrak{r}\,(\mathfrak{p}^{(2)})\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}^{(2)}) \tag{11}$$

для всех $\mathfrak{p}^{(2)} \in K_2$. Отсюда и из (8) следует, что для чисел $\mathfrak{b}_j \in M_1 + M_3$ и чисел $\mathfrak{b}_j \in M_4 + M_5$, $\mathfrak{b}_j \neq \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_A$, числа $\mathfrak{n} + \mathfrak{b}_j$ являются составными. Таким образом, мы однозначно определили число $\mathfrak{n}$ по модулю

$$\prod_{\mathfrak{p} \in M_1 + M_3 + M_5} \mathfrak{p}.$$

Обозначим теперь все числа $\mathfrak{b}_j \in M_2$, $\mathfrak{b}_j \bar{\in} M_1 + M_3$ и числа $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_A$ через $\mathfrak{b}'_1, \mathfrak{b}'_2, \ldots, \mathfrak{b}'_m$. Подбирая подходящим образом X, Y, Z, V мы можем достигнуть того, что число m будет меньше числа простых чисел $\mathfrak{p}^{(4)}\Big(Z < N(\mathfrak{p}^{(4)}) \leqslant N(\mathfrak{p}_n)\Big)$. Выберем теперь различные простые числа $\mathfrak{p}_1^{(4)}$, $\mathfrak{p}_2^{(4)}, \ldots, \mathfrak{p}_m^{(4)}$, $Z < N(\mathfrak{p}_1^{(4)}) \leqslant N(\mathfrak{p}_2^{(4)}) \leqslant \ldots \leqslant N(\mathfrak{p}_m^{(4)})$ так, чтобы сравнения $\mathfrak{n} + \mathfrak{b}'_j \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}_j^{(4)})$, $j = 1, 2, \ldots, m$ и сравнения (8), (10) имели бы точно одно решение по модулю

$$\prod_{j=1}^{m} \mathfrak{p}_j^{(4)} \prod_{\mathfrak{p} \in M_1 + M_3 + M_5} \mathfrak{p}.$$

Для такого $\mathfrak{n}$ числа $\mathfrak{n} + \mathfrak{b}_i$ для всех $\mathfrak{b}_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$ будут составными, если только выполняется условие,

$$N\Big(\prod_{Y < N(\mathfrak{p}) \leqslant Z} \mathfrak{p}\Big) = N\Big(\prod_{\mathfrak{p} \in M_3} \mathfrak{p}\Big) > V. \tag{12}$$

так как тогда $\mathfrak{n} + \mathfrak{b}'_j$ не может равняться простому числу $\mathfrak{p}_j^{(u)}$ по условию (8).

Таким образом число $\mathfrak{n}$, удовлетворяющее условию, что все числа $\mathfrak{n}+\mathfrak{b}_j$, $j=1, 2, \ldots, r$ являются составными, подобрано, и остается только подобрать числа X, Y, Z, V так, чтобы выполнялись условия (9), (12) и условие

$$\pi\left(N(\mathfrak{p}_n)\right)-\pi(Z)>m=A+N\{\mathfrak{b}_j,\ N(\mathfrak{b}_j)\leqslant V,\ \mathfrak{b}_j\in M_2,\ \mathfrak{b}_j\bar{\in} M_1+M_3\}. \tag{13}$$

Положим

$$X=\ln N(\mathfrak{p}_n),\qquad V=\delta N(\mathfrak{p}_n)\frac{\ln N(\mathfrak{p}_n)\cdot\ln\ln\ln N(\mathfrak{p}_n)}{\left(\ln\ln N(\mathfrak{p}_n)\right)^2},\qquad Z=\frac{1}{2}N(\mathfrak{p}),$$

$$Y=\exp\left\{\alpha\frac{\ln V\cdot\ln\ln\ln V}{\ln\ln V}\right\}=\exp\left\{\alpha\frac{\ln N(\mathfrak{p}_n)\cdot\ln\ln\ln N(\mathfrak{p}_n)}{\ln\ln N(\mathfrak{p}_n)}\left(1+0(1)\right)\right\}$$

для $N(\mathfrak{p}_n)\to\infty$ и положительных δ, α. Точнее δ и α определим в конце доказательства. Для чисел $\mathfrak{p}_n$ с достаточно большой нормой условия (9) и (12) выполняются. Далее, из асимптотического закона распределения простых гауссовых чисел имеем

$$\pi\left(N(\mathfrak{p}_n)\right)-\pi(Z)\sim\frac{N(\mathfrak{p}_n)}{2\ln N(\mathfrak{p}_n)},\quad N(\mathfrak{p}_n)\to\infty. \tag{14}$$

Неравенство (10) при фиксированных δ, α и $N(\mathfrak{p}_n)\to\infty$ дает

$$A\leqslant\pi(V)\prod_{\mathfrak{p}\in M_1}\frac{N(\mathfrak{p})-2}{N(\mathfrak{p})-1}<c_3\frac{V}{\ln V}\prod_{X<N(\mathfrak{p})\leqslant Y}\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})-1}\right)\leqslant$$

$$\leqslant c_3\frac{V}{\ln V}\prod_{X<N(\mathfrak{p})\leqslant Y}\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)<c_4\frac{V\ln X}{\ln V\cdot\ln Y}=\frac{c_4\delta}{\alpha}\left(1+o(1)\right)\frac{N(\mathfrak{p}_n)}{\ln N(\mathfrak{p}_n)}. \tag{15}$$

Наконец по лемме 2 получаем

$$\begin{gathered}N\left(\mathfrak{b}_j,\ N(\mathfrak{b}_j)\leqslant V,\ \mathfrak{b}_j \text{ имеет только простые множители } \in M_2\right)<\\ <V\exp\left\{-\frac{\ln V}{\ln Y}\ln\ln\ln Y+\ln\ln Y+o(\ln\ln Y)\right\}<\\ <c_5\delta N(\mathfrak{p}_n)\frac{\ln N(\mathfrak{p}_n)\cdot\ln\ln\ln N(\mathfrak{p}_n)}{\left(\ln\ln N(\mathfrak{p}_n)\right)^2}\exp\left\{-\left(\frac{1}{\alpha}-1+o(1)\right)\ln\ln N(\mathfrak{p}_n)\right\}.\end{gathered} \tag{16}$$

Если подберем α такое, чтобы было $\frac{1}{\alpha}-1>2$ и после этого подберем $\delta=\delta(\alpha)$ такое, чтобы выполнялось условие $\frac{\delta}{\alpha}<\frac{1}{2}$, то из (14), (15) и (16) получим условие (13).

Для завершения доказательства выберем число n так, чтобы выполнялось неравенство $N(\mathfrak{p}_n)\leqslant\frac{1}{2}\ln x<N(\mathfrak{p}_{n+1})$. Тогда

$$N(\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_n)=e^{\delta\left(\frac{1}{2}\ln x\right)}<x.$$

Из асимптотического закона следует, что $\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\ln x<N(\mathfrak{p}_n)\leqslant\frac{1}{2}\ln x$, поэтому

$$c_6N(\mathfrak{p}_n)\frac{\ln N(\mathfrak{p}_n)\cdot\ln\ln\ln N(\mathfrak{p}_n)}{\left(\ln\ln N(\mathfrak{p}_n)\right)^2}>c_7\ln x\cdot\frac{\ln\ln x\cdot\ln\ln\ln\ln x}{(\ln\ln\ln x)^2},$$

т. е. из определения числа V следует, что

$$V>c_7\ln x\cdot\frac{\ln\ln x\cdot\ln\ln\ln\ln x}{(\ln\ln\ln x)^2}.$$

Так как $V=2U+1$, то

$$U=\frac{V}{2}-\frac{1}{2}>c_8\ln x\cdot\frac{\ln\ln x\cdot\ln\ln\ln\ln x}{(\ln\ln\ln x)^2}>$$
$$>c_9\ln N(\mathfrak{p}_n)\cdot\frac{\ln\ln N(\mathfrak{p}_n)\cdot\ln\ln\ln\ln N(\mathfrak{p}_n)}{\left(\ln\ln\ln N(\mathfrak{p}_n)\right)^2}. \qquad (17)$$

Таким образом, мы доказали существование такого целого числа $\mathfrak{n}$, для которого в круге, проходящем через точку $\mathfrak{n}$ с радиусом $\sqrt{U}$ не существует ни одного простого числа. Бесконечность таких чисел $\mathfrak{n}$ следует из того, что $N(\mathfrak{p}_n)\sim N(\mathfrak{p}_{n-1})$ при $n\to\infty$ и условия $N(\mathfrak{p}_n)\leqslant\frac{1}{2}\ln x<N(\mathfrak{p}_{n+1})$, если заставить x стремиться к бесконечности.

Если теперь обозначим через $\mathfrak{m}$ центр полученного круга, если этот центр совпадает с целой точкой, или с ближайшей к центру целой точкой, или если он не совпадает с целым числом, то окончательно получим утверждение теоремы.

4. Обратимся теперь к простым изолированным точкам.

Некоторое представление о распределении значений функции $\rho(\mathfrak{p})$ можно получить из асимптотического закона распределения простых гауссовых чисел. Обозначим $T(x, \Omega)$ и $\pi(x, \Omega)$ число целых, соответственно простых точек, принадлежащих некоторому сектору Ω [с вершиной в начале координат, и радиусом $R\leqslant\sqrt{x}$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ и $x>x_0(\varepsilon)$ имеем:

$$(1-\varepsilon)(\varphi_2-\varphi_1)\pi x<T(x, \Omega)<(1+\varepsilon)(\varphi_2-\varphi_1)\pi x, \qquad (18)$$

$$(1-\varepsilon)\frac{2}{\pi}(\varphi_2-\varphi_1)\frac{x}{\ln x}<\pi(x, \Omega)<(1+\varepsilon)\frac{2}{\pi}(\varphi_2-\varphi_1)\frac{x}{\ln x}, \qquad (19)$$

где $0<\varphi_2-\varphi_1<\frac{\pi}{2}$.

Нетрудно показать, что

$$\sum_{N(\mathfrak{p})\leqslant x}\rho(\mathfrak{p}, \Omega)=\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\Omega,\ \mathfrak{p}_j\in\Omega\\ N(\mathfrak{p})\leqslant x}}\min_{\mathfrak{p}_j\neq\mathfrak{p}}|\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_j|\leqslant c_{10}(\varphi_2-\varphi_1)x, \qquad (20)$$

где $c_{10}>0$ постоянная, независящая от x и $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_j$. Действительно, пусть все целые точки сектора Ω с нормами $\leqslant x$ расположены в последовательность $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_t$. Тогда, очевидно,

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\Omega\\ N(\mathfrak{a})\leqslant x}}\min_{\mathfrak{a}_j\neq\mathfrak{a}}|\mathfrak{a}-\mathfrak{a}_j|\leqslant c_{11}(\varphi_2-\varphi_1)x.$$

Так как

$$\sum_{N(\mathfrak{p})\leqslant x}\rho(\mathfrak{p}, \Omega)\leqslant\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in\Omega\\ N(\mathfrak{a})\leqslant x}}\min_{\mathfrak{a}_j\neq\mathfrak{a}}|\mathfrak{a}-\mathfrak{a}_j|,$$

то отсюда и следует неравенство (20).

Пусть $N\left(N(\mathfrak{p})\leqslant x, \rho(\mathfrak{p}, \Omega)>c_{12}\ln x\right)$ означает число простых точек $\mathfrak{p}\in\Omega$, $N(\mathfrak{p})\leqslant x$, для которых $\rho(\mathfrak{p}, \Omega)\geqslant c_{12}\ln x$, $c_{12}>0$. Тогда из (20) получим:

$$N\left(N(\mathfrak{p})\leqslant x, \rho(\mathfrak{p}, \Omega)\geqslant c_{12}\ln x\right)\leqslant c_{13}(\varphi_2-\varphi_1)\frac{x}{\ln x}, \qquad (21)$$

где $c_{13}=\frac{c_{10}}{c_{12}}$. Если, далее, возьмем c_{12} настолько большое и ε настолько малое, чтобы было $1-\varepsilon-\frac{1}{c_{12}}=c_{14}>0$, то из (19) получим, что

$$N\left(N(\mathfrak{p})\leqslant x,\ \rho(\mathfrak{p},\Omega)<c_{12}\ln x\right)\geqslant c_{14}(\varphi_2-\varphi_1)\frac{x}{\ln x}. \tag{22}$$

Для более точных результатов нам будут необходимы следующие две леммы.

Лемма 3. *Пусть A означает множество целых гауссовых чисел $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2, \ldots, \mathfrak{n}_X$, где $X>1$ — натуральное число. Пусть, далее, $N\left(\mathfrak{n}\in A;\ \mathfrak{p}\nmid\mathfrak{n},\ N(\mathfrak{p})\leqslant z\right)$ означает число тех чисел $\mathfrak{n}\in A$, которые не делятся ни на одно простое гауссовое число $\mathfrak{p}$ с $N(\mathfrak{p})\leqslant z$, где $z\geqslant 2$ действительное число. Обозначим*

$$S_{\mathfrak{d}}=\sum_{\mathfrak{n},\ \mathfrak{d}/\mathfrak{n}} 1-\frac{\omega(\mathfrak{d})}{N(\mathfrak{d})}X+R_{\mathfrak{d}}, \qquad |R_{\mathfrak{d}}|\leqslant|\omega(\mathfrak{d})|,$$

где суммируется по всем тем числам $\mathfrak{n}\in A$, которые делятся на данное целое число $\mathfrak{d}$, $\omega(\mathfrak{d})$ — действительная мультипликативная функция. Если введем еще обозначения

$$f(\mathfrak{d})=\frac{N(\mathfrak{d})}{\omega(\mathfrak{d})},$$

$$f_1(\mathfrak{r})=\sum_{\mathfrak{d}/\mathfrak{r}}\mu(\mathfrak{d})f\left(\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{d}}\right), \tag{23}$$

$$Z=\sum_{N(\mathfrak{r})\leqslant z}\frac{\mu^2(\mathfrak{r})}{f_1(\mathfrak{r})}, \tag{24}$$

$\left(\mu(\mathfrak{d})\right.$ — функция Мёбиуса$\left.\right)$, *то тогда*

$$N\left(\mathfrak{n}\in A;\ \mathfrak{p}\nmid\mathfrak{n},\ N(\mathfrak{p})\leqslant z\right)\leqslant\frac{X}{Z}+O\left(\sum_{N(\mathfrak{d}_1),\ N(\mathfrak{d}_2)\leqslant z}|\lambda_{\mathfrak{d}_1}\lambda_{\mathfrak{d}_2}R_{[\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2]}|\right), \tag{25}$$

где

$$\lambda_{\mathfrak{d}}=\frac{\mu(\mathfrak{d})}{Z}\prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{d}}\left(1-\frac{1}{f(\mathfrak{p})}\right)^{-1}\sum_{\substack{N(\mathfrak{r})\leqslant\frac{z}{N(\mathfrak{d})}\\(\mathfrak{r},\mathfrak{d})=1}}\frac{\mu^2(\mathfrak{r})}{f_1(\mathfrak{r})}, \tag{26}$$

$[\ldots]$ означает общее наименьшее кратное чисел, стояших в скобках.

Доказательство проводится методом Сельберга, и его можно найти в работе [6], теорема 1'.

Лемма 4. *Пусть $B(z)$ означает множество целых гауссовых чисел $\mathfrak{m}$, для которых*

$$N\left(\prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{m}}\mathfrak{p}\right)\leqslant z$$

и

$$\mathfrak{m}=\prod_{/\mathfrak{m}}\mathfrak{p}^{m_{\mathfrak{p}}},$$

где $m_{\mathfrak{p}}$ — натуральное число. Тогда с обозначениями леммы 3 справедливо равенство

$$Z=\sum_{\mathfrak{m}\in B(z)}\frac{1}{N(\mathfrak{m})}\prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{m}}\omega^{m_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p}). \tag{27}$$

Если, далее, для всех целых гауссовых чисел $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$

$$|R_{\mathfrak{d}}| \leqslant \omega(\mathfrak{d}), \qquad \omega\Big([\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]\Big) \leqslant \omega(\mathfrak{d}_1)\,\omega(\mathfrak{d}_2), \tag{28}$$

то

$$R = \sum_{N(\mathfrak{d}_1),\, N(\mathfrak{d}) \leqslant z} |\lambda_{\mathfrak{d}_1}\lambda_{\mathfrak{d}_2} R_{[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]}| \leqslant z^2 \prod_{N(\mathfrak{p}) \leqslant z} \left(1 - \frac{\omega(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}\right)^{-2}, \tag{29}$$

Доказательство без каких либо изменений совпадает с доказательством аналогичной леммы в книге [1], стр. 154 и поэтому здесь не приводится.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_s, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_s$ *любые целые числа гауссова поля,* $\mathfrak{a}_j \neq 0$, $(\mathfrak{a}_j, \mathfrak{b}_j) = 1$ *для всех* $j = 1, 2, \ldots, s$, *кроме того* $\mathfrak{a}_j\mathfrak{b}_k - \mathfrak{a}_k\mathfrak{b}_j \neq 0$ *при* $1 \leqslant j < k \leqslant s$. *Пусть* $\omega(\mathfrak{p})$ *означает число решений сравнения*

$$\prod_{j=1}^{s} (\mathfrak{a}_j\mathfrak{m} - \mathfrak{b}_j) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \tag{30}$$

относительно $\mathfrak{m}$. *Обозначим*

$$\mathfrak{P} = \prod_{j=1}^{s} \mathfrak{a}_j \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant s} (\mathfrak{a}_j\mathfrak{b}_k - \mathfrak{a}_k\mathfrak{b}_j).$$

Тогда для любого действительного числа $x \geqslant 2$ *имеет место неравенство*

$$N\Big(N(\mathfrak{m}) \leqslant x;\quad \mathfrak{a}_j\mathfrak{m} - \mathfrak{b}_j = \mathfrak{p}_j,\ j = 1, 2, \ldots, s\Big) <$$

$$< c(s)\frac{x}{\ln^s x} \prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{P}} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^{-(s - \omega(\mathfrak{p}))}, \tag{31}$$

где постоянная $c(s)$ *зависит только от* s.

Доказательство. Воспользуемся методом, изложенным в книге [1] при доказательстве теоремы II.4.2, стр. 45.

Положим в лемме 3

$$\mathfrak{n} = \prod_{1 \leqslant j \leqslant s} (\mathfrak{a}_j\mathfrak{m} - \mathfrak{b}_j),$$

а в лемме 4 пусть $\mathfrak{m}$ суть целые числа, удовлетворяющие условиям

$$1 \leqslant N(\mathfrak{m}) \leqslant x, \qquad \mathfrak{a}_j\mathfrak{m} - \mathfrak{b}_j \neq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, s.$$

Положим, что в 3 и 4 леммах введенная мультипликативная функция в данном случае равна числу различных по $\mathrm{mod}\,\mathfrak{d}$ решений сравнения

$$\prod_{1 \leqslant j \leqslant s} (\mathfrak{a}_j\mathfrak{m} - \mathfrak{b}_j) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{d}}. \tag{32}$$

Тогда все условия 3 и 4 удовлетворяются и поэтому получаем:

$$N\Big(N(\mathfrak{m}) \leqslant x,\ \ \mathfrak{p} \not\mid \prod_{1 \leqslant j \leqslant s} (\mathfrak{a}_j\mathfrak{m} - \mathfrak{b}_j),\ \ N(\mathfrak{p}) \leqslant z\Big) < \frac{x}{Z} + O(R), \tag{33}$$

где

$$Z \geqslant \sum_{N(\mathfrak{m}) \leqslant z} \frac{1}{N(\mathfrak{m})} \prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{m}} \omega^{m_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p}), \tag{34}$$

$$R \leqslant z^2 \prod_{N(\mathfrak{p}) \leqslant z} \left(1 - \frac{\omega(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}\right)^{-2} \qquad (z \geqslant 2). \tag{35}$$

Заметим, что если для любого натурального r $d_r(\mathfrak{m})$ означает число разложений числа $\mathfrak{m}$ в виде

$$\mathfrak{m}=\prod_{j=1}^{r}\mathfrak{m}_j, \quad 1\leqslant N(\mathfrak{m}_j)\leqslant N(\mathfrak{m}), \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ r,$$

причем два разложения

$$\mathfrak{m}=\prod_{j=1}^{r} m_j' \quad \text{и} \quad \mathfrak{m}=\prod_{j=1}^{r}\mathfrak{m}_j''$$

считаются одинаковыми, тогда и только тогда, когда $\mathfrak{m}_1'=\mathfrak{m}_2''$, $\ldots$, $\mathfrak{m}_r'=\mathfrak{m}_r''$, то функция $d_r(\mathfrak{m})$ мультипликативна. Далее, если $\mathfrak{p}\not|\mathfrak{P}$, то каждое из сравнений

$$\mathfrak{a}_j\mathfrak{m}-\mathfrak{b}_j\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}), \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ s \tag{36}$$

в виду того, что из $\mathfrak{p}\not|\mathfrak{P}$ следует $(\mathfrak{a}_j,\ \mathfrak{p})=1$, имеет одно и только одно решение $\mathrm{mod}\,\mathfrak{p}$. Кроме того, решения всех сравнений (36) по $\mathrm{mod}\,\mathfrak{p}$ различны. Действительно, если для некоторых j и k, $j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ s$, $j\neq k$, было бы

$$\mathfrak{a}_j\mathfrak{m}-\mathfrak{b}_j\equiv\mathfrak{a}_k\mathfrak{m}-\mathfrak{b}_k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}),$$

то отсюда следовало бы, что для $k\neq j$

$$\mathfrak{a}_j\mathfrak{b}_k\mathfrak{m}\equiv\mathfrak{a}_k\mathfrak{b}_j\mathfrak{m}\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}), \quad N(\mathfrak{m})<N(\mathfrak{p}), \quad (\mathfrak{m},\ \mathfrak{p})=1,$$

или что $\mathfrak{a}_j\mathfrak{b}_k-\mathfrak{a}_k\mathfrak{b}_j=0\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p})$, что противоречит условию $\mathfrak{p}\not|\mathfrak{P}$. Таким образом имеем, что для любого $\mathfrak{p}\not|\mathfrak{P}$ сравнение (7) имеет s различных решений $\mathrm{mod}\,\mathfrak{p}$, т. е. $\omega(\mathfrak{p})=s$. В других случаях $\omega(\mathfrak{p})<s$.

Далее, любое целое число $\mathfrak{m}$ можно выразить в виде

$$\mathfrak{m}=\prod_{j=0}^{s}\mathfrak{m}^{(j)},$$

где $\mathfrak{m}^{(j)}$ означает такой делитель числа $\mathfrak{m}$, в который входит простое число $\mathfrak{p}/\mathfrak{m}$ с условием $\omega(\mathfrak{p})=j$. Положим $\mathfrak{m}^{(j)}=1$, если таких делителей нет. Введя обозначение

$$\mathfrak{P}_k=\prod_{\omega(\mathfrak{p})=k}\mathfrak{p}, \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s-1,$$

получаем, что $\mathfrak{P}_k/\mathfrak{P}$ и $(\mathfrak{P}_k,\ \mathfrak{P}_j)=1$ для $k\neq j$. Далее имеем

$$\sum_{N(\mathfrak{m})\leqslant z}\frac{1}{N(\mathfrak{m})}\prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{m}}\omega^{m_\mathfrak{p}}(\mathfrak{p})=\sum_{N(\mathfrak{m})\leqslant z}\frac{1}{N(\mathfrak{m})}\prod_{k=0}^{s}\prod_{\substack{\omega(\mathfrak{p})>k\\ \mathfrak{p}/\mathfrak{m}}}\omega^{m_\mathfrak{p}}(\mathfrak{p})=$$

$$=\sum_{N(\mathfrak{m})\leqslant z}\frac{1}{N(\mathfrak{m})}\prod_{k=0}^{s}\prod_{\substack{\omega(\mathfrak{p})=k\\ \mathfrak{p}/\mathfrak{m}}}k^{m_\mathfrak{p}}\geqslant\sum_{N(\mathfrak{m})\leqslant z}\frac{1}{N(\mathfrak{m})}\prod_{l=0}^{s}d_l(\mathfrak{m}^{(l)}) \tag{37}$$

в виду мультипликативности функции $d_l(\mathfrak{m})$ и неравенства $s^\alpha\geqslant d_s(\mathfrak{p}^\alpha)$ для $\alpha\geqslant 0$. Далее:

$$\sum_{N(\mathfrak{m})\leqslant z}\frac{1}{N(\mathfrak{m})}\prod_{l=0}^{s}d_l(\mathfrak{m}^{(l)})\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{\substack{1\leqslant N(\mathfrak{m}_1)\leqslant z^{\frac{1}{s}}\\ (\mathfrak{m}_1,\ \mathfrak{P}_0)=1}}\frac{1}{N(\mathfrak{m})_1}\sum_{\substack{1\leqslant N(\mathfrak{m}_2)\leqslant z^{\frac{1}{s}}\\ (\mathfrak{m}_2,\ \mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_1)=1}}\frac{1}{N(\mathfrak{m}_2)}\ \cdots\sum_{\substack{1\leqslant N(\mathfrak{m}_s)\leqslant z^{\frac{1}{s}}\\ (\mathfrak{m}_s,\ \mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_1\ldots\mathfrak{P}_{s-1})\leqslant 1}}\frac{1}{N(\mathfrak{m}_s)}. \tag{38}$$

В произведение всех сумм вида $\sum \frac{1}{N(\mathfrak{m}_j)}$, $j=1, 2, \ldots, s$ входят только члены $\frac{1}{N(\mathfrak{m})}$ с $N(\mathfrak{m}) = N(\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \ldots \mathfrak{m}_s) \leqslant z$. Пусть теперь

$$\begin{array}{llllll} \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_1^{(1)} & \mathfrak{m}_1^{(2)} & \mathfrak{m}_1^{(3)} & \ldots & \mathfrak{m}_1^{(s)}, \\ \mathfrak{m}_2 = & \mathfrak{m}_2^{(2)} & \mathfrak{m}_2^{(3)} & \ldots & \mathfrak{m}_2^{(s)}, \\ \mathfrak{m}_3 = & & \mathfrak{m}_3^{(3)} & \ldots & \mathfrak{m}_3^{(s)}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \mathfrak{m}_s = & & & & \mathfrak{m}_s^{(s)}. \end{array}$$

Тогда

$$\mathfrak{m} = \prod_{j=1}^{s} \mathfrak{m}_j = \mathfrak{m}_1^{(1)} \mathfrak{m}_1^{(2)} \ldots \mathfrak{m}_1^{(s)} \cdot \mathfrak{m}_2^{(2)} \ldots \mathfrak{m}_2^{(s)} \cdot \mathfrak{m}_3^{(3)} \ldots \mathfrak{m}_3^{(s)} \ldots \mathfrak{m}_s^{(s)} =$$
$$= \mathfrak{m}_1^{(1)} (\mathfrak{m}_1^{(2)} \mathfrak{m}_2^{(2)}) (\mathfrak{m}_1^{(3)} \mathfrak{m}_2^{(3)} \mathfrak{m}_3^{(3)}) \ldots (\mathfrak{m}_1^{(s)} \mathfrak{m}_2^{(s)} \ldots \mathfrak{m}_s^{(s)}) =$$
$$= \mathfrak{m}^{(1)} \mathfrak{m}^{(2)} \mathfrak{m}^{(2)} \ldots \mathfrak{m}^{(s)},$$

где

$$\mathfrak{m}^{(j)} = \mathfrak{m}_1^{(j)} \mathfrak{m}_2^{(j)} \ldots \mathfrak{m}_j^{(j)}, \qquad j = 1, 2, \ldots, s$$

есть ранее установленное разложение числа $\mathfrak{m}^{(j)}$ и число таких разложений есть $d_j(\mathfrak{m}^{(j)})$, $j=1, 2, \ldots, s$. Отсюда следует, что если развернуть произведение (38), то каждый член $\frac{1}{N(\mathfrak{m})}$ будет входить в полученное выражение не более чем $d_0(\mathfrak{m}^{(0)}) d_1(\mathfrak{m}^{(1)}) \ldots d_s(\mathfrak{m}^{(s)})$ раз.

Полагая теперь $z \geqslant 2^s$ из (34), (35) и неравенства $s^\alpha \geqslant d_s(\mathfrak{p}^\alpha)$ получим

$$Z > c_{15} \prod_{j=1}^{s} \left(\frac{\varphi(\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_{j-1})}{N(\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_{j-1})} \ln z^{\frac{1}{s}} \right),$$

где c_{15} зависит только от s и $\varphi(\mathfrak{P})$ — функция Эйлера. Далее имеем

$$Z > c_{16} \frac{\varphi^s(\mathfrak{P}_0) \varphi^{s-1}(\mathfrak{P}_1) \ldots \varphi(\mathfrak{P}_{s-1})}{N(\mathfrak{P}_0)^s N(\mathfrak{P}_1)^{s-1} \ldots N(\mathfrak{P}_{s-1})} \ln^s z.$$

Теперь, используя формулу для функции Эйлера и определение чисел $\mathfrak{P}_j$, получим

$$Z > c_{16} \prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{P}} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{k})}\right)^{s-\omega(\mathfrak{p})} \ln^s z \geqslant 1. \tag{39}$$

Так как $\omega(\mathfrak{p}) \leqslant s$, то для R получаем оценку

$$R \leqslant c_{17} z^2 \prod_{N(\mathfrak{p}) \leqslant z} \left(1 - \frac{s}{N(\mathfrak{k})}\right)^{-2} = O(z^2 \ln^{2s} z). \tag{40}$$

Подставляя (39) и (40) в (33), получаем:

$$N\left(N(\mathfrak{m}) \leqslant x;\ \ \mathfrak{p} \not\times \prod_{1 \leqslant j \leqslant s} (\mathfrak{a}_j \mathfrak{m} - \mathfrak{b}_j) \ \ N(\mathfrak{p}) \leqslant z\right) <$$
$$< c_{18} \frac{x}{\ln^s z} \prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{P}} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{k})}\right)^{-(s-\omega(\mathfrak{p}))} + O(z^2 \ln^{2s} z). \tag{41}$$

Пусть теперь $z = \sqrt{x} \ln^{-2s} x$. Тогда при $x > x_0(s)$ имеем:

$$z \geqslant 2^s, \quad c_{19} \ln x < \ln z < \ln x,$$
$$z^2 \ln^{2s} z = O(x \ln^{-2s} x).$$

Подставляя эти оценки в (41), получаем оценку теоремы 2 для числа

$$N\left(N(\mathfrak{m}) \leqslant x;\ \ \mathfrak{p} \not\times \prod_{1 \leqslant j \leqslant s} (\mathfrak{a}_j \mathfrak{m} - \mathfrak{b}_j),\ \ N(\mathfrak{p}) \leqslant z\right).$$

Для завершения доказательства заметим, что если

$$\mathfrak{p} \not| \prod_{1 \leqslant j \leqslant s} (\mathfrak{a}_j \mathfrak{m} - \mathfrak{b}_j),$$

то и

$$N(\mathfrak{p}) \not| N\Big(\prod_{1 \leqslant j \leqslant s} (\mathfrak{a}_j \mathfrak{m} - \mathfrak{b}_j) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant s} N(\mathfrak{a}_j \mathfrak{m} - \mathfrak{b}_j).$$

С другой стороны, если $\mathfrak{a}_j \mathfrak{m} - \mathfrak{b}_j = \mathfrak{p}_j$, то $N(\mathfrak{a}_j \mathfrak{m} - \mathfrak{b}_j) = N(\mathfrak{p}_j)$, $j = 1, 2, \ldots, s$. Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} N\Big(N(\mathfrak{m}) \leqslant x;\ \ N(\mathfrak{a}_j \mathfrak{m} - \mathfrak{b}_j) = N(\mathfrak{p}_j),\ \ j = 1, 2, \ldots, s\Big) &\leqslant \\ \leqslant N\Big(N(\mathfrak{m}) \leqslant x;\ \ N(\mathfrak{p}) \not| \prod_{1 \leqslant j \leqslant s} N(\mathfrak{a}_j \mathfrak{m} - \mathfrak{b}_j),\ \ N(\mathfrak{p}) \leqslant z\Big) &+ \\ + N\Big(N(\mathfrak{m}) \leqslant x;\ \ \min_{1 \leqslant j \leqslant s} N(\mathfrak{a}_j \mathfrak{m} - \mathfrak{b}_j) \leqslant z\Big). \end{aligned} \tag{42}$$

Но,

$$N\Big(N(\mathfrak{m}) \leqslant x;\ \ \min_{1 \leqslant j \leqslant s} N(\mathfrak{a}_j \mathfrak{m} - \mathfrak{b}_j) \leqslant z\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{s} N\Big(N(\mathfrak{m}) \leqslant x;\ \ N(\mathfrak{a}_j \mathfrak{m} - \mathfrak{b}_j) \leqslant z\Big).$$

Кроме того для каждого j справедливо неравенство

$$N\Big(N(\mathfrak{m}) \leqslant x;\ \ N(\mathfrak{a}_j \mathfrak{m} - \mathfrak{b}_j) \leqslant z\Big) \leqslant \frac{2z}{N(\mathfrak{a}_j)} + 1 = O(z)$$

и так как $N(\mathfrak{a}_j) \geqslant 1$, то константа в символе O не зависит от s. Поэтому

$$N\Big(N(\mathfrak{m}) \leqslant x;\ \ \min_{1 \leqslant j \leqslant s} N(\mathfrak{a}_j \mathfrak{m} - \mathfrak{b}_j) \leqslant z\Big) = O(sz) = O(x^{\frac{1}{2}}),$$

что вместе с (42) и доказывает теорему.

5. Из теоремы 2 можно получить некоторые следствия о распределении значений функции $\rho(\mathfrak{p})$.

Теорема 3. *Пусть* $\delta = \sqrt{n}$, *где* n — *натуральное число, частное которого от деления на наибольший полный квадрат не имеет простых множителей вида* $4k+3$. *Тогда*

$$N\Big(N(\mathfrak{p}) \leqslant x,\ \ \rho(\mathfrak{p}) = \delta\Big) < c_{20} \frac{x}{\ln^2 x} \prod_{\mathfrak{p}, N(\mathfrak{p}) | n} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^{-1},$$

где $c_{20} > 0$ *не зависит от* n.

Доказательство. Положим в теореме 2 $s = 2$, $\mathfrak{a}_1 = 1$, $\mathfrak{a}_2 = 1$, $\mathfrak{b}_1 = 0$, $\mathfrak{b}_2$ — некоторое гауссовое число с $N(\mathfrak{b}_2) = n$. Тогда

$$\mathfrak{B} = \prod_{1 \leqslant j \leqslant 2} \mathfrak{a}_j \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant 2} (\mathfrak{a}_j \mathfrak{b}_k - \mathfrak{a}_k \mathfrak{b}_j) = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_1) = \mathfrak{b}_2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} N\Big(N(\mathfrak{m}) \leqslant x,\ \ \mathfrak{m} = \mathfrak{p}_1,\ \ \mathfrak{m} - \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{p}_2\Big) = N\Big(N(\mathfrak{p}_1) \leqslant x,\ \ \mathfrak{p}_1 - \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{p}_2\Big) &< \\ < c_{20} \frac{x}{\ln^2 x} \prod_{\mathfrak{p} / \mathfrak{b}_2} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^{-(2 - \omega(\mathfrak{p}))}. \end{aligned}$$

Сравнение (30) в этом случае переходит в сравнение

$$\mathfrak{p}_1 (\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{b}_2) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

следовательно, $\omega(\mathfrak{p})=1$ для любого $\mathfrak{p}$. Тогда

$$N\left(N(\mathfrak{p}_2)\leqslant x,\ \mathfrak{p}_1-\mathfrak{b}_2=\mathfrak{p}_2\right)<c_{21}\frac{x}{\ln^2 x}\prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{b}_2}\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^{-1}.$$

Пусть $\rho(\mathfrak{p})=\delta$. Тогда

$$N\left(N(\mathfrak{p})\leqslant x,\quad \rho(\mathfrak{p})=\delta\right)\leqslant N\left(N(\mathfrak{p})\leqslant x,\quad |\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_2|=\delta\right)\leqslant$$

$$\leqslant N\left(N(\mathfrak{p})\leqslant x,\quad \mathfrak{p}-\mathfrak{p}_2=\mathfrak{b}_2,\ N(\mathfrak{b}_2)=n\right)<c_{21}\frac{x}{\ln^2 x}\prod_{N(\mathfrak{p})/n}\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^{-1},$$

что и доказывает теорему.

Если в последней теореме положить $n=2$, то тогда

$$N\left(N(\mathfrak{p})\leqslant x,\quad \rho(\mathfrak{p})=\sqrt{2}\right)<2c_{21}\frac{x}{\ln^2 x},$$

т. е. получаем оценку для числа простых точек-близнецов.

Заметим, что для простых троек и четверок эта теорема ничего не дает. Если, следуя Вальфишу, простую точку $\mathfrak{p}$ с

$$\rho(\mathfrak{p})>\frac{\ln N(\mathfrak{p})}{\left(\ln\ln\ln N(\mathfrak{p})\right)^2}$$

назовем сильно изолированной, то, проведя в точности рассуждения работы [1], получим, что почти все простые гауссовые числа являются сильно изолированными.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
15.III.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. А. З. Вальфиш. Изолированные простые числа, ДАН СССР, XC, 1953, № 5, 711–713.
2. K. Prachar. Primzahlverteilung, 1957.
3. K. Prachar. Über Primzahldifferenzen, Mh. Math. Phys., **56**, 1952, 305–306.
4. K. Prachar. Über ein Resultat von A. Walfisz, Mh. J. Math., **58**, 1954, 114–116.
5. R. A. Rankin. The difference between consecutive prime numbers, J. Lond. math. Soc., **13**, 1938, 242–247.
6. G. J. Rieger. Verallgemeinerung der Siebmethode von A. Selberg auf algebraische Zahlkörper, **11**, Journal für Mathematik, Bd. 201, 157–171.

APIE GAUSO PIRMINIŲ SKAIČIŲ TARPUSAVIO IŠSIDĖSTYMĄ PLOKŠTUMOJE

J. VAITKEVIČIUS

(Reziumė)

Straipsnyje nagrinėjama funkcija

$$\rho(\mathfrak{m})=\min_{\mathfrak{p}_j\neq\mathfrak{m}}|\mathfrak{m}-\mathfrak{p}_j|,$$

kur $\mathfrak{m}$ – bet kuris sveikas, $\mathfrak{p}_j$ – pirminis Gauso skaičius. Elementariais metodais įrodoma, kad egzistuoja be galo daug sveikų Gauso skaičių $\mathfrak{m}$, kuriems

$$\rho(\mathfrak{m})>c,\quad \ln N(\mathfrak{p}_n)\cdot\frac{\ln\ln N(\mathfrak{p}_n)\cdot\ln\ln\ln\ln N(\mathfrak{p}_n)}{\left(\ln\ln\ln N(\mathfrak{p}_n)\right)^2},$$

kur $c_1>0$ konstanta, nepriklausanti nuo $\mathfrak{p}_n$ ir $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ yra seka visų pirminių Gauso skaičių su $N(\mathfrak{p}_1) \leqslant N(\mathfrak{p}_2) \leqslant \ldots \leqslant N(\mathfrak{p}_n)$, $0 \leqslant \arg \mathfrak{p}_j < \frac{\pi}{2}$ visiems $j=1, 2, \ldots, n$.

Toliau įrodoma, kad jei $\mathfrak{m}=\mathfrak{p}$, $\rho(\mathfrak{p})=\delta=\sqrt{n}>\sqrt{2}$, n — natūrinis ir

$$N\left(N(\mathfrak{p}) \leqslant x, \quad \rho(\mathfrak{p})=\delta\right), \quad x>1$$

reiškia skaičių pirminių Gauso skaičių, tenkinančių skliaustuose nurodytas sąlygas, tai

$$N\left(N(\mathfrak{p}) \leqslant x, \quad \rho(\mathfrak{p})=\delta\right)<c_2 \frac{x}{\ln^2 x} \prod_{\mathfrak{p}, N(\mathfrak{p})/n}\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^{-1},$$

kur $c_2>0$ nepriklauso nuo n ir x.

ÜBER DIE VERTEILUNG DIE GAUSSISCHEN PRIMZAHLEN

J. VAITKEVIČIUS

(Zusammenfassung)

Es werden im gegebenen Artikel die Funktion

$$\rho(\mathfrak{m})=\min_{\mathfrak{p}_j \neq \mathfrak{m}} |\mathfrak{m}-\mathfrak{p}_j|$$

betrachtet, wo $\mathfrak{m}$ — beliebige ganze Zahl, $\mathfrak{p}_j$ — Primzahl im gaussischen Zahlkörper sind. Es wird nach der Methode von A. Selberg die folgende Sätze bewiesen:

1. Es gibt unendlich viele ganzen gaussischen Zahlen $\mathfrak{m}$, für welche

$$\rho(\mathfrak{m})>c_1 \ln N(\mathfrak{p}_n) \cdot \frac{\ln \ln N(\mathfrak{p}_n) \cdot \ln \ln \ln \ln N(\mathfrak{p}_n)}{\left(\ln \ln \ln N(\mathfrak{p}_n)\right)^2},$$

wo die Konstante $c_1>0$ unabhängig von $\mathfrak{p}_n$ und $\mathfrak{m}$ ist, $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ die Folge aller ganzen gaussischen Primzahlen, welche die Bedingungen $N(\mathfrak{p}_1) \leqslant N(\mathfrak{p}_2) \leqslant \ldots \leqslant N(\mathfrak{p}_n)$, $0 \leqslant \arg \mathfrak{p} < \frac{\pi}{2}$ für alle $j=1, 2, \ldots, n$ erfüllen, ist.

2. Wenn $\mathfrak{m}=\mathfrak{p}$, $\rho(\mathfrak{p})=\delta=\sqrt{n}>2$, n — natürliche Zahl ist und

$$N\left(N(\mathfrak{p}) \leqslant x, \quad \rho(\mathfrak{p})=\delta\right), \quad x>1$$

die Anzahl gaussischen Primzahlen $\mathfrak{p}$, welche die Bedingungen $N(\mathfrak{p}) \leqslant x$, $\rho(\mathfrak{p})=\delta$ erfüllen, dann ist

$$N\left(N(\mathfrak{p}) \leqslant x, \quad \rho(\mathfrak{p})=\delta\right)<c_2 \frac{x}{\ln^2 x} \prod_{\mathfrak{p}, N(\mathfrak{p})/n}\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)^{-1}.$$

Die positive Konstante c_2 ist unabhängig von n und x.