IV ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1964

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУГРУППАХ С РЕГУЛЯРНОЙ НОРМИРОВКОЙ

З. ЮШКИС

Анализ методов применения теоретико-вероятностных соображений к изучению аддитивных арифметических функций, определенных на множестве натуральных чисел, показывает, что они используют в основном лишь мультипликативные и порядковые свойства натуральных чисел [5]. Это обстоятельство наводит на мысль, что результаты вероятностной теории чисел можно распространить на аддитивные функции, определенные на мультипликативных полугруппах с регулярной нормировкой [1], являющихся обобщением натуральных чисел. Цель настоящей работы — показать, что это в самом деле возможно. При этом мы, конечно, сталкиваемся с некоторыми трудностями, вызванными отсутствием операции сложения. Эти трудности, однако, удается сравнительно просто преодолеть.

§ 1. Обозначения и определения

В дальнейшем мы будем придерживаться следующих обозначений и определений.

$c, c_1, c_2, \ldots$ — положительные постоянные; B — ограниченная по модулю константа, зависящая от параметров, указанных в формулировках лемм или теорем; x — большое вещественное число.

Далее, мы будем пользоваться определениями, принятыми в работе Б. М. Бредихина [1]. Пусть G — мультипликативно записанная свободная коммутативная полугруппа со счетной системой P образующих элементов, причем все образующие элементы бесконечного порядка. Таким образом, каждый элемент $m\in G$ однозначно записывается в форме $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots$, где $p_j\in P$ и α_j — целые неотрицательные числа, причем только конечное число $\alpha_j\neq 0$. В частности, если все $\alpha_j=0$, имеем единичный элемент, который обозначим символом $\bar{e}$.

Пусть N — гомоморфизм G на мультипликативную полугруппу положительных чисел. Образ $N(m)$ элемента $m\in G$ будем называть его нормой. Кроме того, будем считать, что гомоморфизм обладает еще следующими свойствами: в полугруппе G имеется только конечное число элементов m с $N(m)\leqslant x$ при любом $x>0$, $N(p_j)>1$. Элементы полугруппы G упорядочиваются по их возрастающим нормам. Из указанных выше свойств гомоморфизма следует, что $N(mn)=N(m)\,N(n)$, если $m,\ n\in G$; $N(\bar{e})=1$; $N(m)\geqslant 1$.

Если

$$\nu(x)=\sum_{N(m)\leqslant x} 1=Cx^{\Theta}+Bx^{\Theta_1},$$

где C, Θ, Θ_1 — константы, $C>0$, $0\leqslant\Theta_1<\Theta$, то такую полугруппу будем называть упорядоченной полугруппой с регулярной нормировкой или, коротко, полугруппой G.

Обозначим еще: m, n, d — элементы полугруппы G; p, q — образующие элементы полугруппы G; p_0 — образующий элемент с наименьшей нормой; $n\mid m$ или $m\equiv 0 \bmod n$ означает, что m делится на n, т. е. существует $d\in G$ такой, что $m=nd$; $p^{\alpha}\parallel m$ означает, что $p^{\alpha}\mid m$, $p^{\alpha+1}\nmid m$; $\alpha_p(m)$ — целое неотрицательное число такое, что $p^{\alpha_p(m)}\parallel m$; если $m=\prod\limits_{p\mid m} p^{\alpha_p(m)}$, $n=\prod\limits_{p\mid n} p^{\alpha_p(n)}$, то

$$(m,\ n)=\prod_{p\mid mn} p^{\min\left(\alpha_p(m),\ \alpha_p(n)\right)} \quad \text{и} \quad [m,\ n]=\prod_{p\mid mn} p^{\max\left(\alpha_p(m),\ \alpha_p(n)\right)};$$

$M_x\{\ldots\}$ означает число всех элементов $m\in G$, $N(m)\leqslant x$, удовлетворяющих условиям, которые каждый раз будут указываться в скобках; $\lambda_x\{\ldots\}=$ $=\frac{1}{\nu(x)}M_x\{\ldots\}$ — частота всех элементов $m\in G$, $N(m)\leqslant x$, подчиненных в скобках указанным условиям; $r=r(x)>1$ — некоторая функция от x, которая каждый раз определяется точнее;

$$\gamma_p=\left[\frac{\ln r}{\ln N(p)}\right];$$

$$\delta(p^{\alpha})=\begin{cases}\dfrac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}\left(1-\dfrac{1}{N(p)^{\Theta}}\right), & \text{если} \quad 0\leqslant\alpha<\gamma_p,\\[2mm] \dfrac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}, & \text{если} \quad \alpha=\gamma_p;\end{cases}$$

$$\rho(p^{\alpha})=\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}\left(1-\frac{1}{N(p)^{\Theta}}\right);$$

$\beta_p(m)=\min\left(\alpha_p(m),\ \gamma_p\right)$; $f(m)$ — аддитивная функция, определенная на полугруппе G;

$$f^{(p)}(m)=f\left(p^{\beta_p(m)}\right);\quad f(m)_r=\sum_{N(p)\leqslant r} f^{(p)}(m);$$

$$A(u)=\sum_{N(p)\leqslant u}\frac{f(p)}{N(p)^{\Theta}};\quad B^2(u)=\sum_{N(p)\leqslant u}\frac{|f^2(p)|}{N(p)^{\Theta}};\quad D^2(u)=\sum_{N(p)^{\alpha}\leqslant u}\frac{|f^2(p^{\alpha})|}{N(p)^{\alpha\Theta}};$$

$\omega(m)$ — число различных образующих элементов, которые делят m; $\Omega(m)$ — число всех образующих элементов, которые делят m, причем кратные делители считаются столько раз, какова их кратность; $\tau_k(m)$ — число представлений m в виде произведения k множителей, причем порядок множителей учитывается;

$$\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)du.$$

Оценим при помощи символов B, o, $\sim$, $\asymp$ относятся в основном к x.

Под асимптотической плотностью множества элементов E мы будем подразумевать предел $\lim\limits_{x\to\infty}\lambda_x\{m\in E\}$, если этот предел существует.

Вещественная или комплексная функция $f(m)$ $\big($соответственно $g(m)\big)$, определенная на полугруппе G, называется **аддитивной** (соответственно **мультипликативной**) функцией, если

$$f(m_1 m_2)=f(m_1)+f(m_2) \qquad \big(g(m_1 m_2)=g(m_1)\,g(m_2)\big)$$

для любой пары m_1 и $m_2 \in G$ с $(m_1, m_2)=\bar{e}$. Отсюда непосредственно следует, что $f(\bar{e})=0$ и, если $g(m)\not\equiv 0$, то $g(\bar{e})=1$. Далее, аддитивную и мультипликативную функцию, очевидно, можно представить в виде

$$f(m)=\sum_{p^\alpha \| m} f(p^\alpha), \qquad g(m)=\prod_{p^\alpha \| m} g(p^\alpha),$$

откуда следует, что аддитивные и мультипликативные функции вполне определяются значениями $f(p^\alpha)$, $g(p^\alpha)$ для $\alpha=1, 2, \ldots$ Если значения функций $f(m)$ и $g(m)$ совпадают для всех целых положительных степеней образующих элементов, т. е. $f(p^\alpha)=f(p)$, $g(p^\alpha)=g(p)$ для всех $p\in P$ и всех $\alpha=2, 3, \ldots$, то их называют соответственно **сильно аддитивной** и **сильно мультипликативной**.

§ 2. Некоторые оценки на полугруппе G

Для доказательства предельных теорем и других предложений нам понадобятся некоторые оценки сумм по нормам элементов полугруппы G и по нормам образующих элементов.

Для полугруппы G введем функции Мангольдта

$$\Lambda(m)=\begin{cases} \ln N(p), & \text{если } m=p^k,\\ 0, & \text{если } m\neq p^k,\end{cases}$$

и Мёбиуса

$$\mu(m)=\begin{cases} 1, & \text{если } m=\bar{e},\\ (-1)^k, & \text{если } m=p_1\ldots p_k,\\ 0, & \text{если } p^2\,|\,m.\end{cases}$$

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{d|m}\mu(d)=\prod_{p|m}\big(1+\mu(p)\big)=\begin{cases} 1, & \text{если } m=\bar{e},\\ 0, & \text{если } m\neq\bar{e}.\end{cases} \tag{1}$$

Лемма 1. *(Формула обращения.) Если $U(x)$ произвольная функция и*

$$V(m)=\sum_{d|m} U(d),$$

то

$$\sum_{n|m}\mu(n)\,V\left(\frac{m}{n}\right)=U(m). \tag{2}$$

Доказательство. Очевидными преобразованиями получаем

$$\sum_{n|m}\mu(n)\,V\left(\frac{m}{n}\right)=\sum_{n|m}\mu(n)\sum_{d\,\left|\,\frac{m}{n}\right.}U(d)=\sum_{d|m}U(d)\sum_{n\,\left|\,\frac{m}{d}\right.}\mu(n)=U(m).$$

Лемма 2. *Справедлива оценка*

$$\psi(x)=\sum_{N(m)\leqslant x}\Lambda(m)=Bx^{\Theta}. \tag{3}$$

Доказательство. Сначала дадим пару вспомогательных оценок. Применяя формулу частичного суммирования, имеем, что

$$\sum_{N(m)\leqslant x} \frac{1}{N(m)^{\Theta}} = \frac{\nu(x)}{x^{\Theta}} + \Theta \int\limits_1^x \frac{\nu(u)\,du}{u^{\Theta+1}} = C\Theta \ln x + B. \tag{4}$$

Пусть

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \geqslant 1, \\ 0, & \text{если} \quad x < 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\rho(x) = \sum_{N(m)\leqslant x} \sum_{d|m} \mu(d) = \sum_{N(d)\leqslant x} \nu\left(\frac{x}{N(d)}\right)\mu(d).$$

При $x \geqslant 1$ находим, что

$$1 = Cx^{\Theta} \sum_{N(m)\leqslant x} \frac{\mu(m)}{N(m)^{\Theta}} + Bx^{\Theta_1} \sum_{N(m)\leqslant x} \frac{\mu(m)}{N(m)^{\Theta_1}},$$

а по формуле частичного суммирования получаем

$$Cx^{\Theta} \sum_{N(m)\leqslant x} \frac{\mu(m)}{N(m)^{\Theta}} = 1 + Bx^{\Theta_1} \sum_{N(m)\leqslant x} \frac{1}{N(m)^{\Theta_1}} = 1 + Bx^{\Theta} + Bx^{\Theta_1} \int\limits_1^x u^{\Theta-\Theta_1-1}\,du = Bx^{\Theta}.$$

Отсюда следует оценка

$$\sum_{N(m)\leqslant x} \frac{\mu(m)}{N(m)^{\Theta}} = B. \tag{5}$$

Переходим к доказательству (3). Так как

$$\ln N(m) = \sum_{d|m} \Lambda(d),$$

то в силу (2) и (1) имеем

$$\Lambda(m) = \sum_{d|m} \mu(d) \ln \frac{N(m)}{N(d)} = -\sum_{d|m} \mu(d) \ln N(d).$$

Применяя это равенство, получаем, что

$$\psi(x) = \sum_{N(m)\leqslant x} \Lambda(m) = \sum_{N(m)\leqslant x} \sum_{d|m} \mu(d) \ln \frac{x}{N(d)} - \ln x \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{N(d)\leqslant x} \nu\left(\frac{x}{N(d)}\right) \mu(d) \ln \frac{x}{N(d)} = Cx^{\Theta} \sum_{N(d)\leqslant x} \frac{\mu(d)}{N(d)^{\Theta}} \ln \frac{x}{N(d)} \times$$

$$\times Bx^{\Theta_1} \sum_{N(d)\leqslant x} \frac{1}{N(d)^{\Theta_1}} \ln \frac{x}{N(d)},$$

а в силу (4) и (5)

$$\psi(x) = Cx^{\Theta} \sum_{N(m)\leqslant x} \frac{\mu(m)}{N(m)^{\Theta}} \left\{ \frac{1}{C\Theta} \sum_{N(n)\leqslant \frac{1}{N(m)}} \frac{1}{N(n)^{\Theta}} + B \right\} + Bx^{\Theta} =$$

$$= \frac{1}{\Theta} x^{\Theta} \left\{ \sum_{N(m)\leqslant x} \frac{1}{N(m)^{\Theta}} \sum_{d|m} \mu(d) + B \sum_{N(m)\leqslant x} \frac{\mu(m)}{N(m)^{\Theta}} \right\} + Bx^{\Theta} = Bx^{\Theta}.$$

Лемма 3. *Справедливы следующие оценки сумм по нормам образующих элементов:*

$$\sum_{N(p)\leqslant x} 1 = \frac{Bx^{\Theta}}{\ln x}, \tag{6}$$

$$\sum_{N(p)\leq x} \frac{\ln N(p)}{N(p)^{\Theta}} = B \ln x, \tag{7}$$

$$\sum_{N(p)\leq x} \frac{1}{N(p)^{\Theta}} = \ln \ln x + c_1 + \frac{B}{\ln x}. \tag{8}$$

Доказательство. Введем функцию

$$\vartheta(x) = \sum_{N(p)\leq x} \ln N(p).$$

Она связана с функцией $\psi(x)$ леммы 2 соотношением

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{\frac{1}{2}}) + \vartheta(x^{\frac{1}{3}}) + \dots$$

Так как $\vartheta(x) \geqslant 0$, то из (3) следует

$$\vartheta(x) \leqslant \psi(x) = Bx^{\Theta}. \tag{9}$$

Обозначая

$$\pi(x) = \sum_{N(p)\leq x} 1,$$

легко получаем

$$\{\pi(x) - \pi(\sqrt{x})\} \ln \sqrt{x} \leqslant \sum_{\sqrt{x} < N(p) \leq x} \ln N(p) \leqslant \vartheta(x),$$

а в силу (9) и

$$\pi(\sqrt{x}) \ln \sqrt{x} = Bx^{\frac{1}{2}\Theta} \ln x = Bx^{\Theta}$$

имеем

$$\pi(x) = \frac{Bx^{\Theta}}{\ln x}.$$

Теперь докажем (7). Суммируя по частям, получаем

$$\sum_{N(m)\leq x} \ln N(m) = \nu(x) \ln x - \int_1^x \frac{\nu(u)\,du}{u} = Cx^{\Theta} \ln x + Bx^{\Theta}. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что

$$\prod_{N(m)\leq x} N(m) = \prod_{N(p)\leq x} N(p)^{\nu\left(\frac{x}{N(p)}\right) + \nu\left(\frac{x}{N(p)^2}\right) + \dots},$$

или

$$\sum_{N(m)\leq x} \ln N(m) = Cx^{\Theta} \sum_{N(p)\leq x} \frac{\ln N(p)}{N(p)^{\Theta}} + Bx^{\Theta_1} \sum_{N(p)\leq x} \frac{\ln N(p)}{N(p)^{\Theta_1}} + Bx^{\Theta} \sum_{N(p)\leq x} \frac{\ln N(p)}{N(p)^{2\Theta}}.$$

Для второго члена, применяя формулу частичного суммирования и оценку (9), имеем

$$\sum_{N(m)\leq x} \ln N(m) = Cx^{\Theta} \sum_{N(p)\leq x} \frac{\ln N(p)}{N(p)^{\Theta}} + B\vartheta(x) + Bx^{\Theta_1} \int_1^x \frac{\vartheta(u)\,du}{u^{\Theta_1+1}} + Bx^{\Theta} =$$

$$= Cx^{\Theta} \sum_{N(p)\leq x} \frac{\ln N(p)}{N(p)^{\Theta}} + Bx^{\Theta}.$$

Тогда из (10) получаем, что

$$\sum_{N(p)\leq x} \frac{\ln N(p)}{N(p)^{\Theta}} = \ln x + B, \tag{11}$$

откуда следует (7).

По формуле частичного суммирования в силу (11) находим оценку (8):

$$\sum_{N(p)\leqslant x}\frac{1}{N(p)^{\Theta}}=\frac{1}{\ln x}\sum_{N(p)\leqslant x}\frac{\ln N(p)}{N(p)^{\Theta}}+\int\limits_{N(p_0)}^{x}\sum_{N(p)\leqslant u}\frac{\ln N(p)}{N(p)^{\Theta}}\frac{du}{u\ln^2 u}=$$

$$=1+\frac{B}{\ln x}+\int\limits_{N(p_0)}^{x}\frac{du}{u\ln u}+B\int\limits_{N(p_0)}^{x}\frac{du}{u\ln^2 u}=\ln\ln x+c_1+\frac{B}{\ln x}.$$

Лемма 4. *Справедливы следующие оценки:*

$$\sum_{N(p)^{\alpha}\leqslant x}1=\frac{Bx^{\Theta}}{\ln x},\tag{12}$$

$$\sum_{\substack{N(p)^{\alpha}\leqslant x\\ \alpha>1}}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}\leqslant c_2,\tag{13}$$

$$\sum_{N(p)^{\alpha}\leqslant x}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}=\ln\ln x+c_3+\frac{B}{\ln x},\tag{14}$$

$$\sum_{N(p)^{\alpha}\leqslant x}\frac{\ln N(p)^{\alpha}}{N(p)^{\alpha\Theta}}=B\ln x,\tag{15}$$

$$\sum_{N(p)^{\alpha}\leqslant x}\frac{\ln^l N(p)^{\alpha}}{N(p)^{\alpha\Theta}}=B\ln^l x\qquad (l\geqslant 1).\tag{16}$$

Доказательство. Имеем, очевидно, что

$$\sum_{\substack{N(p)^{\alpha}\leqslant x\\ \alpha>1}}1=\sum_{N(p)\leqslant\sqrt{x}}\;\sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\frac{\ln x}{\ln N(p)}}1=B\sum_{N(p)\leqslant\sqrt{x}}\ln x=Bx^{\frac{\Theta}{2}};$$

откуда, согласно (6), получаем оценку (12). Ряд

$$\sum_{N(p)^{\alpha},\,\alpha>1}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}=\sum_{p\in P}\frac{1}{N(p)^{\Theta}\left(N(p)^{\Theta}-1\right)}$$

сходится (см. [1]). Обозначая его сумму через c_2, имеем (13). Кроме того,

$$c_2-\sum_{\substack{N(p)^{\alpha}\leqslant x\\ \alpha>1}}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}=\sum_{N(p)\leqslant\sqrt{x}}\;\sum_{\alpha\geqslant\frac{\ln x}{\ln N(p)}}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}+\sum_{N(p)>\sqrt{x}}\;\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}=$$

$$=B\sum_{N(p)\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{x^{\Theta}}+B\sum_{N(p)>\sqrt{x}}\frac{1}{N(p)^{2\Theta}}=\frac{B}{x^{\frac{1}{2}\Theta}}+B\sum_{N(m)>\sqrt{x}}\frac{1}{N(m)^{2\Theta}}=\frac{B}{x^{\frac{1}{2}\Theta}}.$$

Тогда из (8) заключаем:

$$\sum_{N(p)^{\alpha}\leqslant x}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}=\ln\ln x+c_3+\frac{B}{\ln x}.$$

Применяя (13), получаем

$$\sum_{\substack{N(p)^{\alpha}\leqslant x\\ \alpha>1}}\frac{\ln N(p)^{\alpha}}{N(p)^{\alpha\Theta}}\leqslant\ln x\sum_{\substack{N(p)^{\alpha}\leqslant x\\ \alpha>1}}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}=B\ln x.$$

Отсюда, согласно (7), имеем оценку (15). В силу (15) для любого $l\geqslant 1$

$$\sum_{N(p)^{\alpha}\leqslant x}\frac{\ln^l N(p)^{\alpha}}{N(p)^{\alpha\Theta}}\leqslant(\ln x)^{l-1}\sum_{N(p)^{\alpha}\leqslant x}\frac{\ln N(p)^{\alpha}}{N(p)^{\alpha\Theta}}=B\ln^l x.$$

§ 3. Вспомогательные леммы

Лемма 5. *Пусть* $r \geqslant N(p_0)$ *и для всякого элемента* $m \in G$

$$m_r = \prod_{p|m} p^{\beta_p(m)}.$$

Тогда для любого целого положительного l

$$\sum_{N(m)\leqslant x} \ln^l N(m_r) \leqslant \nu(x)(c_4 l \ln r)^l.$$

Лемма 6. *В обозначениях леммы* 5 *при* $u \geqslant N(p_0)$

$$M_x\{N(m_r) \geqslant u\} \leqslant e\nu(x)\exp\left\{-c_5 \frac{\ln u}{\ln r}\right\}, \qquad c_5 = \frac{1}{c_4 e}.$$

Лемма 7. *Пусть* Q — *любое множество образующих элементов, нормы которых не превосходят* $r \geqslant N(p_0)$; D — *множество всех бесквадратных элементов* G, *делящихся только на образующие элементы из* Q; $\bar{e} \in D$; $g(d)$ — *положительная мультипликативная функция, определенная на* D, *причем* $g(p) \leqslant \frac{c_6}{N(p)^\Theta}$, $p \in Q$. *Тогда для любого целого положительного* l

$$\sum_{d\in D} g(d)\ln^l N(d) \leqslant (c_7 l \ln r)^l \prod_{p\in Q}\Big(1+g(p)\Big). \tag{17}$$

Доказательство лемм 5, 6 и 7 проводится аналогично доказательству лемм 1.1, 1.2 и 1.3 работы [5], стр. 21—25.

Лемма 8. *Пусть* $r = r(x) \geqslant N(p_0)$, $\ln r = o(\ln x)$; Q *и* D *имеют те же значения, как и в лемме* 7. *Пусть, далее,* $a(m)$ ($m \in G$) — *элементы* G, *причем число всех* $a(m)$, $N(m) \leqslant x$, *делящихся на элемент* d *из* D, *равно* $\nu(x)h(d) + R(d)$, *где* $h(d)$ — *мультипликативная функция, определенная на* D,

$$0 \leqslant h(d) < 1 \quad \text{для} \quad d \neq \bar{e},$$

$$h(p) \leqslant \frac{c_8}{c_8 + N(p)^\Theta} \quad \text{для} \quad p \in Q,$$

$$|R(d)| \leqslant c_9 x^{\Theta_1} N(d)^\Theta h(d).$$

Тогда число элементов $a(m)$, $N(m) \leqslant x$, *не делящихся ни на один элемент из* Q, *равно*

$$\nu(x)\prod_{p\in Q}\Big(1-h(p)\Big)\cdot\left\{1 + B\exp\left(-c_{10}\frac{\ln x}{\ln r}\right)\right\}.$$

Следуя за И. Кубилюсом [5], мы докажем лемму при помощи решета А. Сельберга [8]. Отметим, что для большинства дальнейших теорем достаточны менее точные результаты по сравнению с доказываемыми здесь.

Доказательство. 1. Оцениваемое число обозначим через W. Пусть Q_1 — множество образующих элементов $p \in Q$, для которых $h(p) \neq 0$, D_1 — множество всех бесквадратных элементов G, которые делятся только на образующие элементы множества Q_1, $\bar{e} \in D_1$. В дальнейшем d, d_1, d_2, m, n означают элементы из множества D_1. Пусть, еще, z — некоторое вещественное число, $\ln z > c_{11}\ln r$, где c_{11} — достаточно большое постоянное.

Введем вещественную функцию $\lambda(d)$, подчиненную пока единственному условию $\lambda(\bar{e}) = 1$. Так как сумма

$$\sum_{\substack{N(d)\leqslant z\\ d\,|\,a(m)}} \lambda(d)$$

равна 1, если $a(m)$ не делится ни на один d, $d \neq \bar{e}$, т. е. ни на один $p \in Q_1$, а в противном случае ее квадрат неотрицателен, то

$$W \leqslant \sum_{N(m) \leqslant x} \Big(\sum_{\substack{N(d) \leqslant z \\ d \mid a(m)}} \lambda(d) \Big)^2 .$$

Меняя порядок суммирования, получаем

$$W \leqslant \sum_{\substack{N(d_1) \leqslant z \\ N(d_2) \leqslant z}} \lambda(d_1) \lambda(d_2) \sum_{\substack{N(m) \leqslant x \\ a(m) \equiv \operatorname{mod} d_1 \\ a(m) \equiv \operatorname{mod} d_2}} 1,$$

или согласно условиям леммы

$$W \leqslant \nu(x) \sum_{\substack{N(d_1) \leqslant z \\ N(d_2) \leqslant z}} \lambda(d_1) \lambda(d_2) h\Big([d_1, d_2]\Big) +$$

$$+ \sum_{\substack{N(d_1) \leqslant z \\ N(d_2) \leqslant z}} \lambda(d_1) \lambda(d_2) R\Big([d_1, d_2]\Big) = \nu(x) U + V. \tag{18}$$

На полугруппе G, очевидно, справедливо равенство

$$[d_1, d_2] = \frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)} .$$

Отсюда следует, что

$$h\Big([d_1, d_2]\Big) = \prod_{p \mid [d_1, d_2]} h(p) = \frac{\prod\limits_{p \mid d_1} h(p) \prod\limits_{p \mid d_2} h(p)}{\prod\limits_{p \mid (d_1, d_2)} h(p)} = \frac{h(d_1) h(d_2)}{h\Big((d_1, d_2)\Big)} .$$

Тогда

$$U = \sum_{\substack{N(d_1) \leqslant z \\ N(d_2) \leqslant z}} \frac{h(d_1) h(d_2)}{h\Big((d_1, d_2)\Big)} \lambda(d_1) \lambda(d_2).$$

Приведем полученную квадратичную форму U относительно $\lambda(d)$ к сумме квадратов. Для этого введем функцию

$$\vartheta(d) = \prod_{p \mid d} \left(\frac{1}{h(p)} - 1 \right). \tag{19}$$

В силу очевидных преобразований

$$\vartheta(d_1 d_2) = \prod_{p \mid d_1} \left(\frac{1}{h(p)} - 1 \right) \prod_{p \mid d_2} \left(\frac{1}{h(p)} - 1 \right) = \vartheta(d_1) \vartheta(d_2),$$

справедливых при $(d_1, d_2) = \bar{e}$, имеем, что $\vartheta(d)$ является мультипликативной функцией. Согласно условиям леммы

$$0 \leqslant h(p) \leqslant \frac{c_8}{c_8 + N(p)^{\Theta}} \quad \text{для} \quad p \in Q \quad \text{и} \quad h(p) \neq 0 \quad \text{для} \quad p \in Q_1 .$$

Из формулы (19) получаем, что $\vartheta(d) > 0$ и

$$\vartheta(p) = \frac{1}{h(p)} - 1. \tag{20}$$

Применяя последнюю формулу, находим, что

$$\frac{1}{h(d)} = \prod_{p \mid d} \frac{1}{h(p)} = \prod_{p \mid d} \Big(1 + \vartheta(p)\Big) = \sum_{n \mid d} \vartheta(n).$$

Тогда квадратичная форма U принимает вид

$$U=\sum_{\substack{N(d_1)\leqslant z\\ N(d_2)\leqslant z}} h(d_1)\,h(d_2)\,\lambda(d_1)\,\lambda(d_2)\sum_{d\mid(d_1,\,d_2)}\vartheta(d)=\sum_{N(d)\leqslant z}\vartheta(d)\,y_d^2,$$

где

$$y_d=\sum_{\substack{N(n)\leqslant z\\ n\equiv 0 \bmod d}} h(n)\,\lambda(n). \tag{21}$$

Подберем теперь значения $\lambda(d)$ так, чтобы квадратичная форма U была наименьшей при условии $\lambda(\bar e)=1$. Для нахождения этого минимума заменим условие $\lambda(\bar e)=1$ другим из него вытекающим. Из (21) в силу (1) получаем, что

$$\sum_{N(d)\leqslant z}\mu(d)\,y_d=\sum_{N(d)\leqslant z}\mu(d)\sum_{\substack{N(n)\leqslant z\\ n\equiv 0 \bmod d}} h(n)\,\lambda(n)=$$

$$=\sum_{N(n)\leqslant z} h(n)\,\lambda(n)\sum_{d\mid n}\mu(d)=h(\bar e)\,\lambda(\bar e)=1. \tag{22}$$

Следовательно, нам нужно найти минимум квадратичной формы U при условии (22).

Рассмотрим новую функцию

$$F=\sum_{N(d)\leqslant z}\vartheta(d)\,y_d^2-2u\sum_{N(d)\leqslant z}\mu(d)\,y_d,$$

где u — некоторая вещественная величина. По условию (22)

$$F=\sum_{N(d)\leqslant z}\vartheta(d)\,y_d^2-2u. \tag{23}$$

Функцию F можно представить в виде

$$F=\sum_{N(d)\leqslant z}\vartheta(d)\left(y_d-u\frac{\mu(d)}{\vartheta(d)}\right)^2-u^2\sum_{N(d)\leqslant z}\frac{\mu^2(d)}{\vartheta(d)}.$$

Отсюда заключаем, что F достигает минимума, когда выполняется равенство

$$y_d=\max u\cdot\frac{\mu(d)}{\vartheta(d)}, \tag{24}$$

где $\max u$ берется при условии (22). Следовательно,

$$\min F=-(\max u)^2\sum_{N(d)\leqslant z}\frac{\mu^2(d)}{\vartheta(d)}. \tag{25}$$

Подставляя (24) в (22), найдем

$$\max u=\left(\sum_{N(d)\leqslant z}\frac{\mu^2(d)}{\vartheta(d)}\right)^{-1}. \tag{26}$$

Сопоставляя равенства (23), (25) и (26), получаем

$$\min\left(\sum_{N(d)\leqslant z}\vartheta(d)\,y_d^2\right)=\min F+2\max u=-(\max u)^2\sum_{N(d)\leqslant z}\frac{\mu^2(d)}{\vartheta(d)}+2\max u=$$

$$=-\left(\sum_{N(d)\leqslant z}\frac{\mu^2(d)}{\vartheta(d)}\right)^{-1}+2\left(\sum_{N(d)\leqslant z}\frac{\mu^2(d)}{\vartheta(d)}\right)^{-1}=\left(\sum_{N(d)\leqslant z}\frac{\mu^2(d)}{\vartheta(d)}\right)^{-1}.$$

Так как для бесквадратных элементов d $\mu^2(d)=1$, то форма U принимает значение

$$U=\Big(\sum_{N(d)\leqslant z}\frac{1}{\vartheta(d)}\Big)^{-1}. \tag{27}$$

Нетрудно вывести равенство

$$P=\prod_{p\in Q_1}\big(1-h(p)\big)^{-1}=\prod_{p\in Q_1}\Big(1+\frac{1}{\vartheta(p)}\Big)=\sum_{d}\frac{1}{\vartheta(d)},$$

которое справедливо ввиду (20) и мультипликативности $\vartheta(d)$.

Оценим разность

$$Z=P-U^{-1}=\sum_{N(d)>z}\frac{1}{\vartheta(d)}\leqslant\sum_{d}\frac{1}{\vartheta(d)}\Big(\frac{\ln N(d)}{\ln z}\Big)^{l},$$

где l — любое положительное число. Согласно (20) и условиям леммы

$$\frac{1}{\vartheta(p)}=\frac{h(p)}{1-h(p)}\leqslant\frac{c_8}{N(p)^{\Theta}},$$

а в силу (17) для любого целого положительного l

$$Z\leqslant P\Big(\frac{c_{12}\,l\ln r}{\ln z}\Big)^{l}.$$

Подбирая

$$l=\Big[\frac{\ln z}{c_{12}\,e\ln r}\Big],$$

имеем, что $l\geqslant 1$ при $c_{11}\geqslant c_{12}e$ и

$$Z\leqslant eP\exp\Big(-\frac{\ln z}{c_{12}\,e\ln r}\Big).$$

Ввиду (27) получаем, что

$$U=\prod_{p\in Q}\big(1-h(p)\big)\cdot\Big\{1+B\exp\Big(-c_{13}\frac{\ln z}{\ln r}\Big)\Big\}. \tag{28}$$

В равенстве (21) положим $d=d_1d_2$

$$y_{d_1d_2}=\sum_{\substack{N(n)\leqslant z\\ n\equiv 0 \bmod d_1d_2}}h(n)\lambda(n).$$

Умножая последнее равенство на $\mu(d_2)$ и суммируя по $N(d_2)\leqslant\frac{z}{N(d_1)}$, $(d_1,\ d_2)=\bar{e}$, получаем

$$\sum_{\substack{N(d_2)\leqslant\frac{z}{N(d_1)}\\ (d_1,d_2)=\bar{e}}}\mu(d_2)y_{d_1d_2}=\sum_{\substack{N(d_2)\leqslant\frac{z}{N(d_1)}\\ (d_1,d_2)=\bar{e}}}\mu(d_2)\sum_{\substack{N(n)\leqslant z\\ n\equiv 0 \bmod d_1d_2}}h(n)\lambda(n)=$$

$$=\sum_{\substack{N(d_2)\leqslant\frac{z}{N(d_1)}\\ (m,d_2)=\bar{e}}}\mu(d_2)\sum_{\substack{N(m)\leqslant\frac{z}{N(d_1)}\\ d_2\mid m\\ (d_1,m)=\bar{e}}}h(md_1)\lambda(md_1).$$

В силу (2) и (1) имеем

$$\sum_{\substack{N(d_2)\leqslant\frac{z}{N(d_1)}\\ (d_1,d_2)=\bar{e}}}\mu(d_2)y_{d_1d_2}=\sum_{N(m)\leqslant\frac{z}{N(d_1)}}h(md_1)\lambda(md_1)\sum_{d_2\mid m}\mu(d_2)=$$

$$=h(d_1)\lambda(d_1).$$

Отсюда

$$\lambda(d_1)=\frac{1}{h(d_1)}\sum_{\substack{N(d_2)\leqslant\frac{z}{N(d_1)}\\(d_1,\,d_2)=\bar e}}\mu(d_2)\,y_{d_1d_2}.$$

Подставим в (24) $\max u$ из (26):

$$y_d=\frac{\mu(d)}{\vartheta(d)}\left(\sum_{N(m)\leqslant z}\frac{\mu^2(m)}{\vartheta(m)}\right)^{-1}.$$

Тогда имеем, что

$$\lambda(d_1)=\frac{\mu(d_1)}{h(d_1)\,\vartheta(d_1)}\left(\sum_{N(m)\leqslant z}\frac{\mu^2(m)}{\vartheta(m)}\right)^{-2}\sum_{\substack{N(d_2)\leqslant\frac{z}{N(d_1)}\\(d_1,\,d_2)=\bar e}}\frac{\mu^2(d_2)}{\vartheta(d_2)}.$$

Из этого равенства, очевидно, следует

$$|\lambda(d)|\leqslant\frac{1}{h(d)\,\vartheta(d)},$$

а в силу (19), условий леммы и (8)

$$|\lambda(d)|\leqslant\prod_{p\mid d}\bigl(1-h(p)\bigr)^{-1}\leqslant\prod_{p\mid d}\left(1+\frac{c_8}{N(p)^{\Theta}}\right)\leqslant\exp\left\{\sum_{N(p)\leqslant N(d)}\ln\left(1+\frac{c_8}{N(p)^{\Theta}}\right)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left\{c_{14}\sum_{N(p)\leqslant N(d)}\frac{1}{N(p)^{\Theta}}\right\}\leqslant\exp\{c_{14}\ln\ln N(d)+c_{15}\}=B\ln^{c_{16}}N(d).$$

Согласно (18) получаем оценку

$$V=B\ln^{c_{16}}z\sum_{\substack{N(d_1)\leqslant z\\N(d_2)\leqslant z}}\Bigl|R\bigl([d_1,\ d_2]\bigr)\Bigr|.$$

Подставляя эту оценку и (28) в (18), находим, что

$$W\leqslant\nu(x)\prod_{p\in Q}\bigl(1-h(p)\bigr)\cdot\left\{1+B\exp\left(-c_{13}\frac{\ln z}{\ln r}\right)\right\}+$$

$$+B\ln^{c_{16}}z\sum_{\substack{N(d_1)\leqslant z\\N(d_2)\leqslant z}}\Bigl|R\bigl([d_1,\ d_2]\bigr)\Bigr|.\qquad(29)$$

В силу условий леммы грубо оценим последний член и получим

$$W\leqslant\nu(x)\prod_{p\in Q}\bigl(1-h(p)\bigr)\cdot\left\{1+B\exp\left(-c_{13}\frac{\ln z}{\ln r}\right)\right\}+Bx^{\Theta_1}z^{c_{17}}.\qquad(30)$$

2. Теперь найдем оценку для W снизу. Элементы множества Q обозначим через $p_1,\ \ldots,\ p_k$ так, чтобы $N(p_1)\leqslant\ldots\leqslant N(p_k)$. Нетрудно видеть, что элементы $a(m)$, $N(m)\leqslant x$, не делящиеся ни на один из элементов $p_1,\ \ldots,\ p_k$, получим отбрасывая те $a(m)$, которые делятся на p_1; затем те $a(m)$, которые делятся на p_2, но не делятся на p_1; далее те, которые делятся на p_3, но не делятся на p_1, p_2 и т. д. Тогда

$$W=\nu(x)-\sum_{j=1}^{k}\sum_{\substack{N(m)\leqslant x\\a(m)\equiv 0\bmod p_j\\(a(m),\,p_1\ldots p_{j-1})=\bar e}}1.\qquad(31)$$

Внутреннюю сумму оценим сверху. Применяя формулу (29) к элементам $a(m)$, делящимся на p_j, видим, что в этом случае роль числа $\nu(x)$ играет $\nu_1(x)=\nu(x)h(p_j)+R(p_j)$, роль множества Q — множество $\{p_1, \ldots, p_{j-1}\}$, а в качестве r можно взять $N(p_j)$. Число элементов $a(m)$, делящихся на p_j и на d, $(d, p_j)=\bar e$, равно

$$\nu(x)h(dp_j)+R(dp_j)=\Big(\nu(x)h(p_j)+R(p_j)\Big)h(d)+$$
$$+R(dp_j)-h(d)R(p_j)=\nu_1(x)h(d)+R'(d),$$

где

$$R'(d)=R(dp_j)-h(d)R(p_j).$$

Тогда внутренняя сумма (31) оценивается следующим образом:

$$\sum_{\substack{N(m)\leqslant x\\ a(m)\equiv 0 \bmod p_j\\ (a(m),\, p_1\ldots p_{j-1})=\bar e}} 1\leqslant \nu_1(x)\prod_{i=1}^{j-1}\Big(1-h(p_i)\Big)\cdot\left\{1+B\exp\Big(-c_{13}\frac{\ln z}{\ln N(p_j)}\Big)\right\}+$$
$$+B\ln^{c_{14}} z\sum_{\substack{N(d_1)\leqslant z\\ N(d_2)\leqslant z\\ [d_1,\, d_2]\mid p_1\ldots p_{j-1}}}\Big|R'\Big([d_1,\ d_2]\Big)\Big|=$$
$$=\nu(x)h(p_j)\prod_{i=1}^{j-1}\Big(1-h(p_i)\Big)\cdot\left\{1+B\exp\Big(-c_{13}\frac{\ln z}{\ln N(p_j)}\Big)\right\}+B\,|R(p_j)|+$$
$$+B\ln^{c_{14}} z\sum_{\substack{N(d_1)\leqslant z\\ N(d_2)\leqslant z\\ [d_1,\, d_2]\mid p_1\ldots p_{j-1}}}\left\{\Big|R\Big([d_1,\ d_2]\Big)\Big|+|R(p_j)|\right\}=$$
$$=\nu(x)h(p_j)\prod_{i=1}^{j-1}\Big(1-h(p_i)\Big)\cdot\left\{1+B\exp\Big(-c_{13}\frac{\ln z}{\ln N(p_j)}\Big)\right\}+$$
$$+B\ln^{c_{14}} z\sum_{\substack{N(d_1)\leqslant z\\ N(d_2)\leqslant z\\ [d_1,\, d_2]\mid p_1\ldots p_{j-1}}}\Big|R\Big([d_1,\ d_2]p_j\Big)\Big|.$$

Подставляя эту оценку в (31), получаем, что

$$W\geqslant \nu(x)-\nu(x)\sum_{j=1}^{k}h(p_j)\prod_{i=1}^{j-1}\Big(1-h(p_i)\Big)\cdot\left\{1+B\exp\Big(-c_{13}\frac{\ln z}{\ln N(p_j)}\Big)\right\}+$$
$$+B\ln^{c_{14}} z\sum_{j=1}^{k}\sum_{\substack{N(d_1)\leqslant z\\ N(d_2)\leqslant z\\ [d_1,\, d_2]\mid p_1\ldots p_{j-1}}}\Big|R\Big([d_1,\ d_2]p_j\Big)\Big|.$$

(Применяя легко проверяемое тождество

$$1-\sum_{j=1}^{k}h(p_j)\prod_{i=1}^{j-1}\Big(1-h(p_i)\Big)=\prod_{p\in Q}\Big(1-h(p)\Big),$$

находим, что

$$W\geqslant \nu(x)\prod_{p\in Q}\Big(1-h(p)\Big)(1+BS)+BT, \tag{32}$$

где

$$S=\sum_{j=1}^{k} h(p_j)\exp\left(-c_{13}\frac{\ln z}{\ln N(p_j)}\right)\prod_{i=j}^{k}\left(1-h(p_j)\right)^{-1},$$

$$T=\ln^{c_{16}} z\sum_{j=1}^{k}\sum_{\substack{N(d_1)\leqslant z\\ N(d_2)\leqslant z\\ [d_1,\, d_2]\mid p_1\dots p_{j-1}}}\left|R\left([d_1,\ d_2]p_j\right)\right|.$$

Оценим S. В силу свойств функции $h(p)$

$$S\leqslant c_8\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{N(p_j)^{\Theta}}\exp\left(-c_{13}\frac{\ln z}{\ln N(p_j)}\right)\prod_{i=j}^{k}\left(1+\frac{c_8}{N(p_i)}\right)=$$

$$=B\sum_{N(p)\leqslant r}\frac{1}{N(p)^{\Theta}}\exp\left(-c_{13}\frac{\ln z}{\ln N(p)}\right)\prod_{N(p)\leqslant N(q)\leqslant r}\left(1+\frac{c_8}{N(q)^{\Theta}}\right),$$

а согласно (8)

$$\prod_{N(p)\leqslant N(q)\leqslant r}\left(1+\frac{c_8}{N(q)^{\Theta}}\right)=\exp\left\{\sum_{N(p)\leqslant N(q)\leqslant r}\ln\left(1+\frac{c_8}{N(q)^{\Theta}}\right)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left\{c_{18}\sum_{N(p)\leqslant N(q)\leqslant r}\frac{1}{N(q)^{\Theta}}\right\}=\exp\left(c_{18}\ln\frac{\ln r}{\ln N(p)}+B\right)=B\left(\frac{\ln r}{\ln N(p)}\right)^{c_{18}}.$$

Следовательно,

$$S=B\sum_{N(p)\leqslant r}\frac{1}{N(p)^{\Theta}}\left(\frac{\ln r}{\ln N(p)}\right)^{c_{18}}\exp\left(-c_{13}\frac{\ln z}{\ln N(p)}\right).$$

Введем вспомогательную функцию

$$\psi(u)=\frac{1}{u^{\Theta}}(\ln u)^{-c_{18}}\exp\left(-c_{13}\frac{\ln z}{\ln u}\right).$$

Применяя частичное суммирование, имеем

$$S=B\ln^{c_{18}} r\left\{\psi(r)\sum_{N(p)\leqslant r}1-\int_{N(p_0)}^{r}\psi'(u)\sum_{N(p)\leqslant u}1\,du\right\}.$$

Так как

$$\psi'(u)=-\left(\Theta+\frac{c_{18}}{\ln u}-\frac{c_{13}\ln z}{\ln^2 u}\right)\frac{1}{u^{\Theta+1}\ln^{c_{18}} u}\exp\left(-c_{13}\frac{\ln z}{\ln u}\right),$$

то в силу (6)

$$S=B\ln^{c_{18}} r\left\{\frac{r^{\Theta}\psi(r)}{\ln r}+\int_{N(p_0)}^{r}\frac{u^{\Theta}}{\ln u}\cdot\frac{1}{u^{\Theta+1}\ln^{c_{18}} u}\exp\left(-c_{13}\frac{\ln z}{\ln u}\right)du\right\}=$$

$$=\frac{B}{\ln r}\exp\left(-c_{13}\frac{\ln z}{\ln r}\right)+B\ln^{c_{18}} r\int_{N(p_0)}^{r}\frac{1}{u(\ln u)^{c_{18}+1}}\exp\left(-c_{13}\frac{\ln z}{\ln u}\right)du.$$

В последнем интеграле произведя замену переменного $t=\frac{\ln z}{\ln u}$, получаем:

$$S=B\exp\left(-c_{13}\frac{\ln z}{\ln r}\right)+B\left(\frac{\ln r}{\ln z}\right)^{c_{18}}\int_{\frac{\ln z}{\ln r}}^{\frac{\ln z}{\ln N(p_0)}}e^{-c_{13}t}\,t^{c_{18}-1}\,dt.$$

При $t \geqslant \frac{1+c_{18}}{c_{18}}$ функция $e^{-c_{13}t} t^{c_{16}+1}$ является убывающей, поэтому при достаточно большом c_{11}

$$S = B \exp\left(-c_{13}\frac{\ln z}{\ln r}\right) + B\left(\frac{\ln r}{\ln z}\right)^{c_{16}}\left(\frac{\ln z}{\ln r}\right)^{c_{16}+1} \exp\left(-c_{13}\frac{\ln z}{\ln r}\right)\int\limits_{\frac{\ln z}{\ln r}}^{\infty}\frac{dt}{t^2} =$$

$$= B\exp\left(-c_{13}\frac{\ln z}{\ln r}\right). \tag{33}$$

Теперь грубо оценим T:

$$T = Bx^{\Theta_1}\ln^{c_{16}} z \sum_{j=1}^{k} N(p_j)^{\Theta} \sum_{\substack{N(d_1)\leqslant z\\ N(d_2)\leqslant z}} N\left([d_1,\ d_2]\right)^{\Theta} =$$

$$= Bx^{\Theta_1} r^{2\Theta} z^{2\Theta}\ln^{c_{16}} z = \sum_{N(d)\leqslant z^3} N(d)^{\Theta} = Bx^{\Theta_1} r^{2\Theta} z^{8\Theta}\ln^{c_{16}} z = Bx^{\Theta_1} z^{c_{19}}.$$

Подставляя T и (33) в (32) находим, что

$$W \geqslant \nu(x)\prod_{p\in Q}\left(1-h(p)\right)\cdot\left\{1+B\exp\left(-c_{13}\frac{\ln z}{\ln r}\right)\right\}+Bx^{\Theta_1} z^{c_{19}}.$$

Из последней оценки и из (30) получаем:

$$W = \nu(x)\prod_{p\in Q}\left(1-h(p)\right)\cdot\left\{1+B\exp\left(-c_{13}\frac{\ln z}{\ln r}\right)\right\}+Bx^{\Theta_1} z^{c_{20}}.$$

И, наконец, в силу условий леммы и (8)

$$\prod_{p\in Q}\frac{1}{1-h(p)} \leqslant \prod_{p\in Q}\left(1+\frac{c_8}{N(p)^{\Theta}}\right) = \exp\left\{\sum_{N(p)\leqslant r}\ln\left(1+\frac{c_8}{N(p)^{\Theta}}\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(c_{21}\sum_{N(p)\leqslant r}\frac{1}{N(p)^{\Theta}}\right) = \exp(c_{21}\ln\ln r + B) = B\ln^{c_{21}} r.$$

Тогда

$$W = \nu(x)\prod_{p\in Q}\left(1-h(p)\right)\cdot\left\{1+B\exp\left(-c_{13}\frac{\ln z}{\ln r}\right)+Bx^{\Theta_1-\Theta} z^{c_{22}}\right\}.$$

Подбирая $z = x^{c_{23}}$, где c_{23} достаточно малая положительная постоянная, получаем лемму.

Лемма 9. *Пусть $r = r(x)$ — функция от x, подчиненная условиям $r \geqslant N(p_0)$, $\ln r = o(\ln x)$; n_1, n_2 — элементы полугруппы G; $N(n_1, n_2) < \sqrt{x}$; Q — любое множество образующих элементов, нормы которых не превосходят r. Тогда число элементов $m \in G$, удовлетворяющих условиям $N(m) \leqslant x$, $n_1 n_2 \mid m$ и $n_1 p \nmid m$ для всех $p \in Q$, равно*

$$\frac{\nu(x)}{N(n_1 n_2)^{\Theta}}\prod_{p\in Q}\left(1-h(p)\right)\cdot\left\{1+B\exp\left(-c_{24}\frac{\ln x}{\ln r}\right)\right\},$$

где

$$h(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \mid n_1 \\ \frac{1}{N(p)^{\Theta}}, & \text{если } p \nmid n_1; \end{cases}$$

причем оценка равномерна относительно Q, n_1, n_2 с $N(n_1 n_2) < \sqrt{x}$.

Доказательство. Обозначим оцениваемое число через M. Пусть Q_1 — множество образующих элементов, которое получается из Q, если отбросить те образующие элементы p, которые делят n_1. Число элементов

m, удовлетворяющих условиям $n_1 n_2 | m$, $N(m) \leqslant x$, равно $\nu\left(\frac{x}{N(n_1 n_2)}\right)$. Тогда искомое число M равно числу указанных выше элементов m, для которых $p \nmid m$, $p \in Q_1$.

Пусть d — бесквадратные элементы полугруппы G, которые делятся только на образующие элементы $p \in Q_1$. Нетрудно подсчитать, что число элементов полугруппы G, удовлетворяющих условиям $N(m) \leqslant x$, $n_1 n_2 | m$ и делящихся на элемент d, равно

$$\nu\left(\frac{x}{N(n_1 n_2 d)}\right) = \nu\left(\frac{x}{N(n_1 n_2)}\right) \frac{1}{N(d)^\Theta} + Bx^{\Theta_1}.$$

Мы будем применять лемму 8, в которой роль $\nu(x)$ будет играть $\nu\left(\frac{x}{N(n_1 n_2)}\right)$. Тогда $h(d) = \frac{1}{N(d)^\Theta}$ и $R(d) = Bx^{\Theta_1}$. Очевидно,

$$h(d) = \prod_{p|d} \frac{1}{N(p)^\Theta}, \quad h(p) = \frac{1}{N(p)^\Theta}.$$

$$|R(d)| = |Bx^{\Theta_1}| \leqslant c_{25} x^{\Theta_1} = c_{25} x^{\Theta_1} N(d)^\Theta h(d).$$

Следовательно, условия леммы 8 выполнены и мы имеем

$$M = \nu\left(\frac{x}{N(n_1 n_2)}\right) \prod_{p \in Q_1} \left(1 - \frac{1}{N(p)^\Theta}\right) \cdot \left\{1 + B \exp\left(-c_{24} \frac{\ln x}{\ln r}\right)\right\} =$$

$$= \frac{\nu(x)}{N(n_1 n_2)^\Theta} \left(1 + Bx^{\frac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta)}\right) \prod_{p \in Q} \left(1 - h(p)\right) \cdot \left\{1 + B \exp\left(-c_{24} \frac{\ln x}{\ln r}\right)\right\} =$$

$$= \frac{\nu(x)}{N(n_1 n_2)^\Theta} \prod_{p \in Q} \left(1 - h(p)\right) \cdot \left\{1 + B \exp\left(-c_{24} \frac{\ln x}{\ln r}\right)\right\}.$$

Лемма доказана.

§ 4. Вероятностная интерпретация

Мы будем применять предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. Задачу изучения распределения значений аддитивных функций, определенных на полугруппе G, можно связать с теорией суммирования независимых случайных величин аналогичным образом, как это делает И. Кубилюс [5] в случае аддитивных арифметических функций на множестве натуральных чисел.

Пользуясь аксиоматикой А. Н. Колмогорова теории вероятностей [4], подберем в качестве поля элементарных событий конечное множество $E = \{m\colon m \in G, N(m) \leqslant x\}$. Пусть функция $r = r(x)$ удовлетворяет условиям леммы 9. Обозначим через $E(p^\alpha)$ $\left(N(p) \leqslant r;\ \alpha = 0, 1, \ldots, \gamma_p\right)$ множество всех элементов $m \in G$, удовлетворяющих условиям $N(m) \leqslant x$, $\beta_p(m) = \alpha$, а через $\mathfrak{F}$ — наименьшую алгебру множеств, содержащую все $E(p^\alpha)$. Алгебра множеств $\mathfrak{F}$ совместно с функцией множества $\lambda_x\{m \in E\}$ образуют конечное поле вероятностей, а функции $f^{(p)}(m)$ $\left(N(p) \leqslant r\right)$ являются случайными величинами относительно этого поля.

Очевидно, что множества $E(p^\alpha)$ для различных α не пересекаются и

$$\bigcup_{\alpha=0}^{\gamma_p} E(p^\alpha) = E.$$

Множества алгебры $\mathfrak{F}$ можно представить в виде сумм множеств вида

$$E_n = \bigcup_{N(p)\leqslant r} E(p^{\alpha_p(n)}),$$

где элементы n имеют вид

$$n = \prod_{N(p)\leqslant r} p^{\alpha_p}, \qquad 0 \leqslant \alpha_p \leqslant \gamma_p.$$

Нетрудно видеть, что множества E_n не имеют общих элементов при различных n.

Подсчитаем теперь частоту λ_x для множества A. Можем записать, что

$$A = {\bigcup_n}' E_n,$$

где объединение берется по некоторым n. Считая, что n различны между собой, получаем:

$$\lambda_x\{m \in A\} = {\sum_n}' \lambda_x\{m \in E_n\}.$$

Если $N(n) < \sqrt{x}$, то согласно лемме 9

$$\lambda_x\{m \in E_n\} = \prod_{N(p)\leqslant r} \delta(p^{\alpha_p(n)}) \cdot (1 + BR),$$

где

$$R = \exp\left(-c\frac{\ln x}{\ln r}\right), \qquad c = \min\left(\frac{1}{2}c_5,\ c_{24}\right).$$

В силу леммы 6

$$\sum_{N(n)\geqslant\sqrt{x}} \lambda_x\{m \in E_n\} \leqslant \lambda_x\left\{m \in \bigcup_{N(n)\geqslant\sqrt{x}} E_n\right\} = BR,$$

где оценка равномерна по $A \in \mathfrak{F}$. Следовательно,

$$\lambda_x\{m \in A\} = {\sum_{N(n)\leqslant x}}' \sum_{N(p)\leqslant r} \delta(p^{\alpha_p(n)}) \cdot (1 + BR) + BR.$$

Из леммы 9 следует, что $R \to 0$ при $x \to \infty$. Это значит, что асимптотическая плотность множества элементов $m \in G$, удовлетворяющих условиям $\beta_p(m) = \alpha_p(n)$ для всех $N(p) \leqslant r$, равна

$$\prod_{N(p)\leqslant r} \delta(p^{\alpha_p(n)}),$$

а сумма

$$\sum_{N(n)\geqslant\sqrt{x}} \prod_{N(p)\leqslant r} \delta(p^{\alpha_p(n)})$$

является асимптотической плотностью всех элементов $m \in G$, для которых $\beta_p(m) = \alpha_p(n)$ для всех p с $N(p) \leqslant r$ и хотя бы для одного n с $N(n) \geqslant \sqrt{x}$. Согласно лемме 6 эта плотность равна BR. Тогда

$$\lambda_x\{m \in A\} = {\sum_n}' \prod_{N(p)\leqslant r} \delta(p^{\alpha_p(n)}) + BR,$$

где оценка BR, как видно из доказательства, равномерна по всем $A \in \mathfrak{F}$.

Легко получаем тождество

$$\sum_{\alpha=0}^{\gamma_p}\delta(p^{\alpha_p})=\sum_{\alpha=0}^{\gamma_p-1}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}\left(1-\frac{1}{N(p)^{\Theta}}\right)+\frac{1}{N(p)^{\gamma_p\Theta}}=1.$$

Тогда сумма по всем возможным n

$$\sum_n\prod_{N(p)\leq r}\delta(p^{\alpha_p(n)})=\prod_{N(p)\leq r}\prod_{\alpha=0}^{\gamma_p}\delta(p^{\alpha_p})=1.$$

Для множеств

$$A=\bigcup_n{}' E_n$$

системы $\mathfrak{F}$ введем другую вероятностную меру

$$P(A)=\sum_n{}'\prod_{N(p)\leq r}\delta(p^{\alpha_p(n)}).$$

Из предыдущих предложений ясно, что для множеств $A\in\mathfrak{F}$

$$\lambda_x\{m\in A\}-P(A)=B\exp\left(-c\frac{\ln x}{\ln r}\right),$$

где оценка равномерна по всем A.

Мы будем полагать $\xi_p=\xi_p(m)=f^{(p)}(m)$, для p с $N(p)\leq r$. Тогда ξ_p является случайной величиной относительно меры P и она принимает значения $f(p^\alpha)$ $(\alpha=0,\ 1,\ \ldots,\ \gamma_p)$ с вероятностями $\delta(p^\alpha)$ соответственно. Нетрудно видеть, что совместное распределение случайных величин ξ_p равно произведению одномерных распределений случайных величин ξ_p. Из этого следует, что распределение случайной величины

$$f(m)_r=\sum_{N(p)\leq r}f^{(p)}(m)$$

относительно меры λ_x лишь на величину $B\exp\left(-c\frac{\ln x}{\ln r}\right)$ отличается от распределения суммы независимых случайных величин

$$\sum_{N(p)\leq r}\xi_p$$

относительно P.

Мы знаем, что в случае сильно аддитивных функций $f(p^\alpha)=f(p)$ для $\alpha=2,\ 3,\ \ldots$ Поэтому в этом случае ξ_p $\left(N(p)\leq r\right)$ принимает лишь два значения: 0 и $f(p)$ с вероятностями $1-\frac{1}{N(p)^\Theta}$ и $\frac{1}{N(p)^\Theta}$ соответственно.

§ 5. Закон больших чисел

Из § 4 ясно, что изучение асимптотического распределения „урезанных" аддитивных функций $f(m)_r$, определенных на полугруппе G, сводится к изучению предельного поведения распределения сумм независимых случайных величин. Нас будут интересовать не урезанные функции $f(m)_r$, а сами $f(m)$. Оказывается, что законы распределения для $f(m)$ можно часто получить из законов для $f(m)_r$. Для перехода от одних функций к другим нам понадобится некоторый аналог теоретико-вероятностного закона больших чисел.

Лемма 10. *Пусть $f(m)$ — любая комплексная аддитивная функция, определенная на полугруппе G. Тогда*

$$\sum_{N(m)\leqslant x}\left|f(m)-A(x)\right|^2=B\nu(x)\,D^2(x).$$

Доказательство. Обозначим оцениваемую сумму через S. Для любых комплексных чисел a, b справедливо неравенство $|a+b|^2\leqslant 2|a|^2+ +2|b|^2$. Тогда

$$S\leqslant 2\sum_{N(m)\leqslant x}\left|f(m)-K(x)\right|^2+2\nu(x)\left|K(x)-A(x)\right|^2,$$

где

$$K(x)=\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\rho(p^\alpha)f(p^\alpha). \tag{34}$$

Согласно неравенству Коши и (13)

$$\left|\sum_{\substack{N(p)^\alpha\leqslant x\\ \alpha>1}}\frac{f(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}}\right|\leqslant\left(\sum_{\substack{N(p)^\alpha\leqslant x\\ \alpha>1}}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}\cdot\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{|f^2(p^\alpha)|}{N(p)^{\alpha\Theta}}\right)^{\frac{1}{2}}=BD(x)$$

и аналогично

$$\left|\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{f(p^\alpha)}{N(p)^{(\alpha+1)\Theta}}\right|\leqslant\left(\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{1}{N(p)^{(\alpha+2)\Theta}}\cdot\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{|f^2(p^\alpha)|}{N(p)^{\alpha\Theta}}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=BD(x)\left(\sum_{p\in P}\frac{1}{N(p)^{3\Theta}}\right)^{\frac{1}{2}}=BD(x).$$

Поэтому

$$K(x)-A(x)=BD(x)$$

и оценка для S принимает вид

$$S\leqslant 2\sum_{N(m)\leqslant x}\Big(f(m)-K(x)\Big)\Big(\bar f(m)-\bar K(x)\Big)+B\nu(x)\,D^2(x), \tag{35}$$

где черточка обозначает комплексно-сопряженную величину.

Далее, имеем, что

$$\sum_{N(m)\leqslant x}f(m)=\sum_{N(m)\leqslant x}\sum_{p^\alpha\|m}f(p^\alpha)=\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}f(p^\alpha)\,M_x\{p^\alpha\|m\}.$$

Нетрудно заметить, что число элементов $m\in G$, $N(m)\leqslant x$, делящихся на p^α, но не делящихся на $p^{\alpha+1}$, равно $\nu\left(\frac{x}{N(p)^\alpha}\right)-\nu\left(\frac{x}{N(p)^{\alpha+1}}\right)$. Следовательно

$$M_x\{p^\alpha\|m\}=\nu(x)\,\rho(p^\alpha)+\frac{Bx^{\Theta_1}}{N(p)^{\alpha\Theta_1}}.$$

Тогда

$$\sum_{N(m)\leqslant x}f(m)=\nu(x)\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\rho(p^\alpha)f(p^\alpha)+Bx^{\Theta_1}\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{|f(p^\alpha)|}{N(p)^{\alpha\Theta_1}}.$$

В силу неравенства Коши

$$\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{|f(p^\alpha)|}{N(p)^{\alpha\Theta_1}}\leqslant\left(\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}N(p)^{\alpha(\Theta-2\Theta_1)}\cdot\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{|f^2(p^\alpha)|}{N(p)^{\alpha\Theta}}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=D(x)\left(\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}N(p)^{\alpha(\Theta-2\Theta_1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

и

$$\sum_{N(m)\leqslant x} f(m)=\nu(x)\,K(x)+BD(x)\,x^{\Theta_1}\Big(\sum_{N(p)^{\alpha}\leqslant x} N(p)^{\alpha(\Theta-2\Theta_1)}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Оценим последнюю сумму. При $\Theta\geqslant 2\Theta_1$, имеем, что $N(p)^{\alpha(\Theta-2\Theta_1)}\leqslant$ $\leqslant x^{\Theta-2\Theta_1}$, и в силу (12) получаем:

$$\sum_{N(p)^{\alpha}\leqslant x} N(p)^{\alpha(\Theta-2\Theta_1)}\leqslant x^{\Theta-2\Theta_1}\sum_{N(p)^{\alpha}\leqslant x} 1=\frac{Bx^{2(\Theta-\Theta_1)}}{\ln x}.$$

Если же $\Theta<2\Theta_1$, то

$$\sum_{N(p)^{\alpha}\leqslant x} N(p)^{\alpha(\Theta-2\Theta_1)}=\sum_{N(p)\leqslant x}\ \sum_{1\leqslant\alpha\leqslant\left[\frac{\ln x}{\ln N(p)}\right]} N(p)^{\alpha(\Theta-2\Theta_1)}=B\sum_{N(p)\leqslant x} N(p)^{\Theta-2\Theta_1}.$$

Применяя формулу частичного суммирования и оценку (6), имеем, что

$$\sum_{N(p)^{\alpha}\leqslant x} N(p)^{\alpha(\Theta-2\Theta_1)}=Bx^{\Theta-2\Theta_1}\sum_{N(p)\leqslant x} 1+B\int\limits_{N(p_0)}^{x}\sum_{N(p)\leqslant u} 1\cdot u^{\Theta-2\Theta_1-1}\,du=$$

$$=\frac{Bx^{2(\Theta-\Theta_1)}}{\ln x}+B\int\limits_{N(p_0)}^{x}\frac{(\Theta-\Theta_1)\,u^{2(\Theta-\Theta_1)-1}\,du}{\ln u}.$$

Очевидно, при $u\geqslant\exp\left(\frac{1}{\Theta-\Theta_1}\right)$

$$\Theta-\Theta_1\leqslant 2(\Theta-\Theta_1)-\frac{1}{\ln u}.$$

В силу этого, если $\exp\left(\frac{1}{\Theta-\Theta_1}\right)\leqslant N(p_0)$, то

$$\int\limits_{N(p_0)}^{x}\frac{(\Theta-\Theta_1)\,u^{2(\Theta-\Theta_1)-1}\,du}{\ln u}\leqslant\int\limits_{N(p_0)}^{x}\frac{\left\{2(\Theta-\Theta_1)-\frac{1}{\ln u}\right\}u^{2(\Theta-\Theta_1)-1}\,du}{\ln u}=$$

$$=\int\limits_{N(p_0)}^{x}\left(\frac{u^{2(\Theta-\Theta_1)}}{\ln u}\right)'du=\frac{Bx^{2(\Theta-\Theta_1)}}{\ln x}.$$

При $\exp\left(\frac{1}{\Theta-\Theta_1}\right)>N(p_0)$ имеем

$$\int\limits_{N(p_0)}^{x}\frac{(\Theta-\Theta_1)\,u^{2(\Theta-\Theta_1)-1}\,du}{\ln u}=\int\limits_{N(p_0)}^{\exp\left(\frac{1}{\Theta-\Theta_1}\right)}\frac{(\Theta-\Theta_1)\,u^{2(\Theta-\Theta_1)-1}\,du}{\ln u}+$$

$$+\int\limits_{\exp\left(\frac{1}{\Theta-\Theta_1}\right)}^{x}\frac{\left\{2(\Theta-\Theta_1)-\frac{1}{\ln u}\right\}u^{2(\Theta-\Theta_1)-1}\,du}{\ln u}+\frac{Bx^{2(\Theta-\Theta_1)}}{\ln x}.$$

Таким образом, всегда справедлива оценка

$$\sum_{N(p)^{\alpha}\leqslant x} N(p)^{\alpha(\Theta-2\Theta_1)}=\frac{Bx^{2(\Theta-\Theta_1)}}{\ln x},\tag{36}$$

а из того

$$\sum_{N(m)\leqslant x} f(m)=\nu(x)\,K(x)+\frac{Bx^{\Theta}\,D(x)}{\sqrt{\ln x}}=\nu(x)\,K(x)+\frac{B\nu(x)\,D(x)}{\sqrt{\ln x}}.\tag{37}$$

Рассмотрим теперь сумму

$$\sum_{N(m)\leqslant x} |f(m)|^2.$$

Имеем

$$\sum_{N(m)\leqslant x} |f(m)|^2 = \sum_{N(m)\leqslant x} \sum_{p^\alpha \| m} \sum_{p^\beta \| m} f(p^\alpha)\bar{f}(q^\beta) =$$

$$= \sum_{N(p)^\alpha \leqslant x} |f^2(p^\alpha)| M_x\{p^\alpha \| m\} + \sum_{\substack{N(p)^\alpha N(q)^\beta \leqslant x \\ p\neq q}} f(p^\alpha)\bar{f}(q^\beta) M_x\{p^\alpha \| m,\ q^\beta \| m\}.$$

Заметим, что при $p\neq q$

$$M_x\{p^\alpha \| m,\ q^\beta \| m\} = \nu\left(\frac{x}{N(p)^\alpha N(q)^\beta}\right) - \nu\left(\frac{x}{N(p)^{\alpha+1} N(q)^\beta}\right) -$$

$$-\nu\left(\frac{x}{N(p)^\alpha N(q)^{\beta+1}}\right) + \nu\left(\frac{x}{N(p)^{\alpha+1} N(q)^{\beta+1}}\right) = \frac{\nu(x)}{N(p)^{\alpha\Theta} N(q)^{\beta\Theta}} -$$

$$-\frac{\nu(x)}{N(p)^{(\alpha+1)\Theta} N(q)^{\beta\Theta}} - \frac{\nu(x)}{N(p)^{\alpha\Theta} N(q)^{(\beta+1)\Theta}} + \frac{\nu(x)}{N(p)^{(\alpha+1)\Theta} N(q)^{(\beta+1)\Theta}} +$$

$$+\frac{Bx^{\Theta_1}}{N(p)^{\alpha\Theta_1} N(q)^{\beta\Theta_1}} = \nu(x)\rho(p^\alpha)\rho(q^\beta) + \frac{Bx^{\Theta_1}}{N(p)^{\alpha\Theta_1} N(q)^{\beta\Theta_1}}.$$

Эти соотношения и оценка

$$M_x\ p^\alpha \| m\} = \nu\left(\frac{x}{N(p)^\alpha}\right) - \nu\left(\frac{x}{N(p)^{\alpha+1}}\right) = \frac{B\nu(x)}{N(p)^{\alpha\Theta}}$$

дают оценку

$$\sum_{N(m)\leqslant x} |f(m)|^2 = B\nu(x) D^2(x) = \nu(x) \sum_{\substack{N(p)^\alpha N(q)^\beta \leqslant x \\ p\neq q}} \rho(p^\alpha)\rho(q^\beta) f(p^\alpha)\bar{f}(q^\beta) +$$

$$+Bx^{\Theta_1} \sum_{N(p)^\alpha N(q)^\beta \leqslant x} \frac{|f(p^\alpha) f(q^\beta)|}{N(p)^{\alpha\Theta_1} N(q)^{\beta\Theta_1}}.$$

Используя опять неравенство Коши, получаем

$$\sum_{N(p)^\alpha N(q)^\beta \leqslant x} \frac{|f(p^\alpha) f(q^\beta)|}{N(p)^{\alpha\Theta_1} N(q)^{\beta\Theta_1}} \leqslant \Bigg(\sum_{N(p)^\alpha N(q)^\beta \leqslant x} N(p)^{\alpha(\Theta-2\Theta_1)} N(q)^{\beta(\Theta-2\Theta_1)} \times$$

$$\times \sum_{N(p)^\alpha N(q)^\beta \leqslant x} \frac{|f^2(p^\alpha) f^2(q^\beta)|}{N(p)^{\alpha\Theta} N(q)^{\beta\Theta}} \Bigg)^{\frac{1}{2}} \leqslant D^2(x) \Bigg(\sum_{N(p)^\alpha N(q)^\beta \leqslant x} N(p)^{\alpha(\Theta-2\Theta_1)} N(q)^{\beta(\Theta-2\Theta_1)} \Bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

В силу (36) и (14) получаем оценку

$$\sum_{N(p)^\alpha N(q)^\beta \leqslant x} N(p)^{\alpha(\Theta-2\Theta_1)} N(q)^{\beta(\Theta-2\Theta_1)} = \sum_{N(p)^\alpha \leqslant \frac{x}{N(p_0)}} N(p)^{\alpha(\Theta-2\Theta_1)} \times$$

$$\times \sum_{N(q)^\beta \leqslant \frac{x}{N(p)^\alpha}} N(q)^{\beta(\Theta-2\Theta_1)} = Bx^{2(\Theta-\Theta_1)} \sum_{N(p)^\alpha \leqslant \frac{x}{N(p_0)}} \frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta} \ln \frac{x}{N(p)^\alpha}} =$$

$$= \frac{Bx^{2(\Theta-\Theta_1)}}{\sqrt{\ln x}} \sum_{N(p)^\alpha \leqslant x} \frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}} + Bx^{2(\Theta-\Theta_1)} \sum_{x\exp(-\sqrt{\ln x}) < N(p)^\alpha \leqslant x} \frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}} =$$

$$= \frac{Bx^{2(\Theta-\Theta_1)} \ln\ln x}{\sqrt{\ln x}} + Bx^{2(\Theta-\Theta_1)} \ln \frac{\ln x}{\ln x - \sqrt{\ln x}} = \frac{Bx^{2(\Theta-\Theta_1)}}{\sqrt[3]{\ln x}}. \qquad (38)$$

Тогда

$$\sum_{N(m)\leqslant x}|f(m)|^2=B\nu(x)\,D^2(x)+\nu(x)\sum_{\substack{N(p)^{\alpha}N(q)^{\beta}\leqslant x\\ p\neq q}}\rho(p^{\alpha})\,\rho(q^{\beta})f(p^{\alpha})\bar{f}(q^{\beta}).$$

При помощи тех же приемов оценим ошибку, которую мы совершим, отбрасывая в последней сумме условие $p\neq q$. Находим, что

$$\Bigl|\sum_{\substack{N(p)^{\alpha}N(q)^{\beta}\leqslant x\\ p=q}}\rho(p^{\alpha})\,\rho(q^{\beta})f(p^{\alpha})\bar{f}(q^{\beta})\Bigr|\leqslant$$

$$\leqslant\Bigl(\sum_{\substack{N(p)^{\alpha}N(q)^{\beta}\leqslant x\\ p=q}}\frac{|f^2(p^{\alpha})|}{N(p)^{\alpha\Theta}\,N(q)^{\beta\Theta}}\sum_{\substack{N(p)^{\alpha}N(q)^{\alpha}\leqslant x\\ p=q}}\frac{|f^2(q^{\beta})|}{N(p)^{\alpha\Theta}\,N(q)^{\beta\Theta}}\Bigr)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=B\sum_{N(p)^{\alpha}\leqslant x}\frac{|f^2(p^{\alpha})|}{N(p)^{(\alpha+1)\Theta}}=BD^2(x).$$

Итак, мы получаем оценку

$$\sum_{N(m)\leqslant x}|f(m)|^2=\nu(x)\sum_{N(p)^{\alpha}N(q)^{\beta}\leqslant x}\rho(p^{\alpha})\,\rho(q^{\beta})f(p^{\alpha})\bar{f}(q^{\beta})+B\nu(x)\,D^2(x).\tag{39}$$

Применяя (14), оценим $K(x)$:

$$|K(x)|\leqslant\Bigl(\sum_{N(p)^{\alpha}\leqslant x}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}\cdot\sum_{N(p)^{\alpha}\leqslant x}\frac{|f^2(p^{\alpha})|}{N(p)^{\alpha\Theta}}\Bigr)^{\frac{1}{2}}=BD(x)\sqrt{\ln\ln x}\,.\tag{40}$$

Подставляя (34), (37), (39) и (40) в (35), имеем:

$$S\leqslant 2\nu(x)\Bigl|\sum_{N(p)^{\alpha}N(q)^{\beta}\leqslant x}\rho(p^{\alpha})\,\rho(q^{\beta})f(p^{\alpha})\bar{f}(q^{\beta})-|K(x)|^2\Bigr|+B\nu(x)\,D^2(x)=$$

$$=2\nu(x)\Bigl|\sum_{\substack{N(p)^{\alpha}N(q)^{\beta}>x\\ N(p)^{\alpha}\leqslant x,\ N(q)^{\beta}\leqslant x}}\rho(p^{\alpha})\,\rho(q^{\beta})f(p^{\alpha})\bar{f}(q^{\beta})\Bigr|+B\nu(x)\,D^2(x).$$

В силу неравенства Коши последняя сумма не превосходит

$$\Bigl(\sum_{\substack{N(p)^{\alpha}N(q)^{\beta}>x\\ N(p)^{\alpha}\leqslant x,\ N(q)^{\beta}\leqslant x}}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}\,N(q)^{\beta\Theta}}\cdot\sum_{N(p)^{\alpha}\leqslant x,\ N(q)^{\beta}\leqslant x}\frac{|f^2(p^{\alpha})f^2(q^{\beta})|}{N(p)^{\alpha\Theta}\,N(q)^{\beta\Theta}}\Bigr)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=D^2(x)\Bigl(\sum_{\substack{N(p)^{\alpha}N(q)^{\beta}>x\\ N(p)^{\alpha}\leqslant x,\ N(q)^{\beta}\leqslant x}}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}\,N(q)^{\beta\Theta}}\Bigr)^{\frac{1}{2}}.$$

При помощи (14) и (15) оценим последнюю сумму:

$$\sum_{\substack{N(p)^{\alpha}N(q)^{\beta}>x\\ N(p)^{\alpha}\leqslant x,\ N(q)^{\beta}\leqslant x}}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}\,N(q)^{\beta\Theta}}=2\sum_{N(p)^{\alpha}\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}\sum_{\frac{x}{N(p)^{\alpha}}<N(q)^{\beta}\leqslant x}\frac{1}{N(q)^{\beta\Theta}}+$$

$$+\Bigl(\sum_{\sqrt{x}<N(p)^{\alpha}\leqslant x}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}\Bigr)^2=2\sum_{N(p)^{\alpha}\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}\Bigl(\ln\frac{\ln x}{\ln x-\ln N(p)^{\alpha}}+\frac{B}{\ln x}\Bigr)+B=$$

$$=\frac{B}{\ln x}\sum_{N(p)^{\alpha}\leqslant\sqrt{x}}\frac{\ln N(p)^{\alpha}}{N(p)^{\alpha\Theta}}+B=B.\tag{41}$$

Из последних оценок получаем, что

$$S = B\nu(x)\, D^2(x).$$

Из леммы 10 следует:

Теорема 1. *(Аналог закона больших чисел.) Пусть $f(m)$ — комплексная аддитивная функция, определенная на полугруппе G, t — любое положительное число. Тогда*

$$\lambda_x \left\{ \left| f(m) - A(x) \right| \leqslant t D(x) \right\} = 1 + \frac{B}{t^2}. \tag{42}$$

Если $\psi(x)$ — любая положительная неограниченно возрастающая функция, то

$$\lambda_x \left\{ \left| f(m) - A(x) \right| \leqslant D(x)\, \psi(x) \right\} \to 1 \tag{43}$$

при $x \to \infty$.

Заметим, что в случае сильно аддитивных функций $D(x) \asymp B(x)$. Поэтому лемму 10 можно сформулировать следующим образом.

Лемма. 10ª. *Пусть $f(m)$ — комплексная сильно аддитивная функция, определенная на полугруппе G. Тогда*

$$\sum_{N(m) \leqslant x} \left| f(m) - A(x) \right|^2 = B\nu(x)\, B^2(x).$$

Следствием этой леммы является следующая

Теорема 1ª. *Пусть $f(m)$ — комплексная сильно аддитивная функция, определенная на полугруппе G, t — любое положительное число, $\psi(x)$ — любая положительная, неограниченно возрастающая функция. Тогда*

$$\lambda_x \left\{ \left| f(m) - A(x) \right| \leqslant t B(x) \right\} = 1 + \frac{B}{t^2} \tag{44}$$

и

$$\lambda_x \left\{ \left| f(m) - A(x) \right| \leqslant B(x)\, \psi(x) \right\} \to 1 \tag{45}$$

при $x \to \infty$.

Примеры. Пусть $\psi(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.

1. Для функции $\omega(m)$ в силу (8)

$$A(x) = \sum_{N(p) \leqslant x} \frac{1}{N(p)^{\Theta}} = \ln \ln x + B,$$

$$B^2(x) = \sum_{N(p) \leqslant x} \frac{1}{N(x)^{\Theta}} \sim \ln \ln x.$$

2. Для функции $\Omega(m)$ согласно (8) и (13)

$$A(x) = \sum_{N(p) \leqslant x} \frac{1}{N(p)^{\Theta}} = \ln \ln x + B,$$

$$D^2(x) = \sum_{N(p) \leqslant x} \frac{1}{N(p)^{\Theta}} + \sum_{\substack{N(p)^{\alpha} \leqslant x \\ \alpha > 1}} \frac{\alpha^2}{N(p)^{\alpha\Theta}} \sim \ln \ln x.$$

3. Так как

$$\tau_k(p^{\alpha}) = \binom{k + \alpha - 1}{\alpha},$$

то для функции $\log_k \tau_k(m)$ из (8) и (13)

$$A(x)=\sum_{N(p)\leqslant x}\frac{\log_k \tau_k(p)}{N(p)^{\Theta}}=\sum_{N(p)\leqslant x}\frac{1}{N(p)^{\Theta}}=\ln\ln x+B,$$

$$D^2(x)=\sum_{N(p)\leqslant x}\frac{1}{N(p)^{\Theta}}+\sum_{\substack{N(p)^{\alpha}\leqslant x\\ \alpha>1}}\frac{\log_k^2 \tau_k(p^{\alpha})}{N(p)^{\alpha\Theta}}\sim\ln\ln x.$$

4. Для функции

$$\vartheta(m)=\frac{\sum\limits_{d|m}\omega(d)}{\tau_2(m)}=\frac{\sum\limits_{d|m}\omega(d)}{\tau(m)},$$

если $(m_1, m_2)=\bar{e}$, имеем, что

$$\vartheta(m_1\ m_2)=\frac{\sum\limits_{\substack{d_1|m_1\\ d_2|m_2}}\omega(d_1 d_2)}{\tau(m_1 m_2)}=\frac{\sum\limits_{\substack{d_1|m_1\\ d_2|m_2}}\omega(d_1)+\sum\limits_{\substack{d_1|m_1\\ d_2|m_2}}\omega(d_2)}{\tau(m_1)\tau(m_2)}=$$

$$=\frac{\tau(m_2)\sum\limits_{d_1|m_1}\omega(d_1)+\tau(m_1)\sum\limits_{d_2|m_2}\omega(d_2)}{\tau(m_1)\tau(m_2)}=\vartheta(m_1)+\vartheta(m_2).$$

Следовательно, $\vartheta(m)$ является аддитивной функцией. Кроме того,

$$\vartheta(p^{\alpha})=\frac{\sum\limits_{\beta=0}^{\alpha}\omega(p^{\beta})}{\alpha+1}=\frac{\alpha}{\alpha+1}.$$

Тогда, в силу (8) и (13),

$$A(x)=\frac{1}{2}\sum_{N(p)\leqslant x}\frac{1}{N(p)^{\Theta}}=\frac{1}{2}\ln\ln x+B,$$

$$D^2(x)=\frac{1}{4}\sum_{N(p)\leqslant x}\frac{1}{N(p)^{\Theta}}+\sum_{\substack{N(p)^{\alpha}\leqslant x\\ \alpha>1}}\frac{\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^2}{N(p)^{\alpha\Theta}}\sim\frac{1}{4}\ln\ln x.$$

5. Для функции $\ln\sigma(m)=\ln\sum\limits_{d|m}N(d)^{\Theta}$, в силу (11) и (13),

$$A(x)=\sum_{N(p)\leqslant x}\frac{\ln N(p)^{\Theta}\left(1+\frac{1}{N(p)^{\Theta}}\right)}{N(p)^{\Theta}}=\Theta\sum_{N(p)\leqslant x}\frac{\ln N(p)}{N(p)^{\Theta}}+$$

$$+\sum_{N(p)\leqslant x}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{N(p)^{\Theta}}\right)}{N(p)^{\Theta}}=\Theta\ln x+B+B\sum_{N(p)\leqslant x}\frac{1}{N(p)^{2\Theta}}=\Theta\ln x+B,$$

$$D^2(x)=\sum_{N(p)^{\alpha}\leqslant x}\frac{\ln^2 N(p)^{\alpha\Theta}\left(1+\frac{1}{N(p)^{\Theta}}+\ldots+\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}\right)}{N(p)^{\alpha\Theta}}=$$

$$=\sum_{N(p)\leqslant x}\frac{\ln^2 N(p)^{\Theta}}{N(p)^{\Theta}}+\sum_{\substack{N(p)^{\alpha}\leqslant x\\ \alpha>1}}\frac{\ln^2 N(p)^{\alpha\Theta}}{N(p)^{\alpha\Theta}}+B\sum_{N(p)^{\alpha}\leqslant x}\frac{\ln N(p)^{\alpha\Theta}}{N(p)^{(\alpha+1)\Theta}}=$$

$$=\Theta^2\sum_{N(p)\leqslant x}\frac{\ln^2 N(p)}{N(p)^{\Theta}}+B=\frac{\Theta^2}{2}\ln^2 x+B\ln x\sim\frac{\Theta^2}{2}\ln^2 x.$$

Из теорем 1^a или 1 следует, что при $x\to\infty$

$$\lambda_x\left\{\left|\omega(m)-\ln\ln x\right|<\psi(x)\sqrt{\ln\ln x}\right\}\to 1,$$

$$\lambda_x\left\{\left|\Omega(m)-\ln\ln x\right|<\psi(x)\sqrt{\ln\ln x}\right\}\to 1,$$

$$\lambda_x\left\{\left|k^{\ln\ln x-\psi(x)\sqrt{\ln\ln x}}<\tau_k(m)<k^{\ln\ln x+\psi(x)\sqrt{\ln\ln x}}\right.\right\}\to 1,$$

$$\lambda_x\left\{\left|\vartheta(m)-\frac{1}{2}\ln\ln x\right|<\psi(x)\sqrt{\ln\ln x}\right\}\to 1,$$

$$\lambda_x\left\{x^{\Theta-\psi(x)}<\sigma(m)<x^{\Theta+\psi(x)}\right\}\to 1.$$

§ 6. Интегральные асимптотические законы

В § 4 мы уже показали, что если $r=r(x)$ растет медленнее любой положительной степени x при $x\to\infty$, то

$$\lambda_x\{f(m)_r<y\}$$

лишь на величину, стремящуюся к нулю при $x\to\infty$ равномерно относительно y, отличается от функции распределения суммы независимых случайных величин

$$\sum_{N(p)\leqslant r}\xi_p,$$

где ξ_p принимает значения $f(p^\alpha)$ с вероятностями $\delta(p^\alpha)$ $(\alpha=0,\ 1,\ \ldots,\ \gamma_p)$. Следовательно, к функциям $f(m)_r$ можно применить предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, в частности, теорему Б. В. Гнеденко [3], стр. 107–108.

Нас будут интересовать не урезанные функции $f(m)_r$, а сами функции $f(m)$. Ограничимся классом функций $f(m)$, для которых предельные законы, соответствующие законам

$$\lambda_x\left\{\frac{f(m)_r-A(r)}{D(r)}<y\right\}\quad\text{и}\quad\lambda_x\left\{\frac{f(m)-A(x)}{D(x)}<y\right\},$$

совпадают. Класс упомянутых функций для краткости назовем H. К классу H мы отнесем вещественные аддитивные функции $f(m)$, определенные на полугруппе G, для которых $D(x)\to\infty$ при $x\to\infty$ и существует такая неограниченно возрастающая функция $r=r(x)$, что $\frac{\ln r(x)}{\ln x}\to 0$, $\frac{D(r)}{D(x)}\to 1$. В случае сильно аддитивных функций эти условия превращаются в $B(x)\to\infty$, $\frac{B(r)}{B(x)}\to 1$.

Итак, приступим к исследованию интегральных предельных законов для функций $f(m)\in H$. Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 11. *Пусть даны две последовательности серий вещественных чисел*

$$g_x(m),\ h_x(m)\qquad \left(m\in G,\quad N(m)\leqslant x\right)$$

и пусть для фиксированного $\varepsilon>0$

$$\lambda_x\left\{\left|g_x(m)-h_x(m)\right|\geqslant\varepsilon\right\}\to 0$$

при $x\to\infty$. *Если*

$$\lambda_x\{g_x(m)<y\}$$

при $x\to\infty$ стремится к некоторой функции распределения $F(y)$ в ее точках непрерывности, то тогда и

$$\lambda_x\{h_x(m)<y\}$$

при $x\to\infty$ стремится к $F(y)$ в ее точках непрерывности.

Доказательство. Имеем:

$$M_x\{g_x(m)<y-\varepsilon\}-M_x\Big\{\big|g_x(m)-h_x(m)\big|\geqslant\varepsilon\Big\}\leqslant M_x\{h_x(m)<y\}\leqslant$$
$$\leqslant M_x\{g_x(m)<y+\varepsilon\}+M_x\Big\{\big|g_x(m)-h_x(m)\big|\geqslant\varepsilon\Big\}.$$

Если $y-\varepsilon$ и $y+\varepsilon$ являются точками непрерывности функции $F(y)$, то согласно предложениям леммы найдем:

$$F(y-\varepsilon)\leqslant\varliminf_{x\to\infty}\lambda_x\{h_x(m)<y\}\leqslant\varlimsup_{x\to\infty}\lambda_x\{h_x(m)<y\}\leqslant F(y+\varepsilon).$$

Отсюда, если y является точкой непрерывности функции $F(y)$, получаем

$$\lambda_x\{h_x(m)<y\}\to F(y)$$

при $x\to\infty$.

Из леммы 11, в частности, имеем

Следствие. *Если $D_x=D'_x+o(D'_x)$, $A_x=A'_x+o(D'_x)$ и для всех $m\in G$, $N(m)\leqslant x$, за исключением $o(x^\Theta)$ чисел, $f(m)=f'(m)+o(D'_x)$, где $f'(m)$ — любая (не обязательно аддитивная) функция, то*

$$\lambda_x\left\{\frac{f(m)-A_x}{D_x}<y\right\}\quad\text{и}\quad\lambda_x\left\{\frac{f'(m)-A'_x}{D'_x}<y\right\}$$

имеют одновременно предельные функции распределения, которые в случае их существования совпадают.

Лемма 12. *Если $f(m)$ — вещественная аддитивная функция, определенная на полугруппе G, удовлетворяет условию $D(x)\to\infty$ при $x\to\infty$, $\lambda>0$ — фиксированное положительное число, то*

$$\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{(\alpha+\lambda)\Theta}}=o\big(D^2(x)\big),\qquad\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{|f(p^\alpha)|}{N(p)^{(\alpha+1)\Theta}}=o\big(D(x)\big),$$

$$\sum_{\substack{N(p)^\alpha\leqslant x\\ \alpha>1}}\frac{|f(p^\alpha)|}{N(p)^{\alpha\Theta}}=o\big(D(x)\big),\qquad\sum_{N(p)\leqslant x}\Bigg(\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{\ln x}{\ln N(p)}\right]}\frac{|f(p^\alpha)|}{N(p)^{\alpha\Theta}}\Bigg)^2=o\big(D^2(x)\big).$$

Доказательство. Пусть ε — любое положительное число, $x_0=(2\varepsilon^{-1})^{\frac{1}{\lambda\Theta}}$. Тогда существует такое $x_1=x_1(\varepsilon)>x_0$, что при $x>x_1$

$$\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x_0}\frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{(\alpha+\lambda)\Theta}}<\frac{\varepsilon}{2}D^2(x).$$

Для $x>x_1$ имеем:

$$\frac{1}{D^2(x)}\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{(\alpha+\lambda)\Theta}}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{D^2(x)}\cdot\frac{1}{x_0^{\lambda\Theta}}\sum_{x_0<N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{x_0^{\lambda\Theta}}=\varepsilon,$$

что и доказывает первое соотношение. Применяя неравенство Коши, отсюда получим второе и третье соотношения:

$$\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{|f(p^\alpha)|}{N(p)^{(\alpha+1)\Theta}}\leqslant\Bigg(\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{1}{N(p)^{(\alpha+1)\Theta}}\cdot\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{(\alpha+1)\Theta}}\Bigg)^{\frac{1}{2}}=o\big(D(x)\big),$$

$$\sum_{\substack{N(p)^\alpha\leqslant x\\ \alpha>1}}\frac{|f(p^\alpha)|}{N(p)^{\alpha\Theta}}\leqslant\Big(\sum_{p^\alpha,\,\alpha>1}\frac{1}{N(p)^{\frac{2}{3}\alpha\Theta}}\cdot\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{\frac{4}{3}\alpha\Theta}}\Big)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=B\Big(\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)\Theta}}\Big)^{\frac{1}{2}}=o\big(D(x)\big).$$

Последняя сумма оценивается при помощи неравенства Коши

$$\sum_{N(p)\leqslant x}\Big(\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{\ln x}{\ln N(p)}\right]}\frac{|f(p^\alpha)|}{N(p)^{\alpha\Theta}}\Big)^2\leqslant\sum_{N(p)\leqslant x}\Big(\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}\cdot\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{\ln x}{\ln N(p)}\right]}\frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}}\Big)=$$

$$=B\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{(\alpha+1)\Theta}},$$

откуда в силу первого соотношения и следует четвертая оценка.

Лемма 13. *Если* $f(m)\in H$, $r=r(x)$ — *соответствующая функция, то*

$$\frac{1}{\nu(x)}\sum_{N(m)\leqslant x}f^2(m)-\Big(\frac{1}{\nu(x)}\sum_{N(m)\leqslant x}f(m)\Big)^2=D^2(x)\big(1+o(1)\big),$$

$$\frac{1}{\nu(x)}\sum_{N(m)\leqslant x}f^2(m)_r-\Big(\frac{1}{\nu(x)}\sum_{N(m)\leqslant x}f(m)_r\Big)^2=D^2(r)+o\big(D^2(x)\big).$$

Доказательство. Подсчитаем сумму

$$S=\sum_{N(m)\leqslant x}f^2(m)=\sum_{\substack{N(p)^\alpha\leqslant x\\ N(q)^\beta\leqslant x}}f(p^\alpha)f(q^\beta)\,M_x\Big\{p^\alpha\,\|\,m,\ q^\beta\,\|\,m\Big\}.$$

Аналогично, как мы уже делали при доказательстве леммы 10, заключаем, что

$$M_x\Big\{p^\alpha\,\|\,m,\ q^\beta\,\|\,m\Big\}=M_x\Big\{p^\alpha\,|\,m,\ q^\beta\,|\,m\Big\}-M_x\Big\{p^{\alpha+1}\,|\,m,\ q^\beta\,|\,m\Big\}-$$

$$-M_x\Big\{p^\alpha\,|\,m,\ q^{\beta+1}\,|\,m\Big\}+M_x\Big\{p^{\alpha+1}\,|\,m,\ q^{\beta+1}\,|\,m\Big\}=$$

$$=\nu(x)\,\rho(p^\alpha)\,\rho(q^\beta)+\frac{Bx^{\Theta_1}}{N(p)^{\alpha\Theta_1}N(q)^{\beta\Theta_1}},$$

откуда следует

$$M_x\Big\{p^\alpha\,\|\,m,\ q^\beta\,\|\,m\Big\}=\begin{cases}\nu(x)\,\rho(p^\alpha)\,\rho(q^\beta)+\dfrac{Bx^{\Theta_1}}{N(p)^{\alpha\Theta_1}N(q)^{\beta\Theta_1}}, & \text{если } p\neq q,\ N(p)^\alpha N(q)^\beta\leqslant x,\\ 0, & \text{если } p\neq q,\ N(p)^\alpha N(q)^\beta>x,\\ 0, & \text{если } p=q,\ \alpha\neq\beta,\\ \nu(x)\,\rho(p^\alpha)+\dfrac{Bx^{\Theta_1}}{N(p)^{\alpha\Theta_1}}, & \text{если } p=q,\ \alpha=\beta.\end{cases}$$

Таким образом,

$$S=\nu(x)\,S_1+Bx^{\Theta_1}S_2+\nu(x)\,S_3+Bx^{\Theta_1}S_4,\tag{46}$$

где

$$S_1=\sum_{\substack{N(p)^\alpha N(q)^\beta\leqslant x\\ p\neq q}}\rho(p^\alpha)\,\rho(q^\beta)f(p^\alpha)f(q^\beta),$$

$$S_2=\sum_{N(p)^\alpha N(q)^\beta\leqslant x}\frac{|f(p^\alpha)f(q^\beta)|}{N(p)^{\alpha\Theta_1}N(q)^{\beta\Theta_1}},$$

$$S_3=\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\rho(p^\alpha)f^2(p^\alpha),$$

$$S_4=\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta_1}}.$$

В силу неравенства Коши и (38)

$$S_2\leqslant\Bigl(\sum_{N(p)^\alpha N(q)^\beta\leqslant x}N(p)^{\alpha(\Theta-2\Theta_1)}N(q)^{\beta(\Theta-2\Theta_1)}\cdot\sum_{N(p)^\alpha N(q)^\beta\leqslant x}\frac{f^2(p^\alpha)f^2(q^\beta)}{N(p)^{\alpha\Theta}N(q)^{\beta\Theta}}\Bigr)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{Bx^{\Theta-\Theta_1}D^2(x)}{\sqrt[6]{\ln x}}=o\Bigl(x^{\Theta-\Theta_1}D^2(x)\Bigr). \qquad (47)$$

Согласно лемме 12

$$S_3-D^2(x)=-\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{(\alpha+1)\Theta}}=o\Bigl(D^2(x)\Bigr). \qquad (48)$$

Теперь оценим S_4. Так как $f(m)\in H$, то существует функция $r=r(x)$ такая, что $\frac{D(r)}{D(x)}\to 1$, $\frac{\ln r}{\ln x}\to 0$ при $x\to\infty$. Тогда

$$S_4=Br^{\Theta-\Theta_1}\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}}+Bx^{\Theta-\Theta_1}\sum_{r<N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}}=$$

$$=Br^{\Theta-\Theta_1}D^2(x)+Bx^{\Theta-\Theta_1}\Bigl(D^2(x)-D^2(r)\Bigr)=o\Bigl(x^{\Theta-\Theta_1}D^2(x)\Bigr). \qquad (49)$$

Наконец, оценим ошибку, которую совершим, опуская в сумме S_1 условие $p\neq q$. Применяя неравенство Коши и лемму 12, имеем, что она по абсолютному значению не превосходит суммы

$$\sum_{\substack{N(p)^\alpha N(q)^\beta\leqslant x\\ p=q}}\frac{f(p^\alpha)f(q^\beta)}{N(p)^{\alpha\Theta}N(q)^{\beta\Theta}}\leqslant\Bigl(\sum_{\substack{N(p)^\alpha N(q)^\beta\leqslant x\\ p=q}}\frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}N(q)^{\beta\Theta}}\cdot\times$$

$$\times\sum_{\substack{N(p)^\alpha N(q)^\beta\leqslant x\\ p=q}}\frac{f^2(q^\beta)}{N(p)^{\alpha\Theta}N(q)^{\beta\Theta}}\Bigr)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=B\Bigl(\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{(\alpha+1)\Theta}}\cdot\sum_{N(q)^\beta\leqslant x}\frac{f^2(q^\beta)}{N(q)^{(\beta+1)\Theta}}\Bigr)^{\frac{1}{2}}=o\Bigl(D^2(x)\Bigr).$$

Учитывая последнюю оценку и подставляя (47), (48), (49) в (46), получаем:

$$S=\nu(x)\sum_{N(p)^\alpha N(q)^\beta\leqslant x}\rho(p^\alpha)\rho(q^\beta)f(p^\alpha)f(q^\beta)+\nu(x)D^2(x)+o\Bigl(\nu(x)D^2(x)\Bigr). \qquad (50)$$

В силу (37), очевидно, имеем что

$$\frac{1}{\nu(x)}\sum_{N(m)\leqslant x}f(m)=\sum_{N(p)^\alpha\leqslant x}\rho(p^\alpha)f(p^\alpha)+\frac{DB(x)}{\sqrt{\ln x}}. \qquad (51)$$

Из (50) и (51) следует равенство

$$\frac{1}{\nu(x)}S-\Bigl(\frac{1}{\nu(x)}\sum_{N(m)\leqslant x}f(m)\Bigr)^2-D^2(x)=$$

$$=-\sum_{\substack{N(p)^\alpha\leqslant x,\ N(q)^\beta\leqslant x\\ N(p)^\alpha N(q)^\beta>x}}\rho(p^\alpha)\rho(q^\beta)f(p^\alpha)f(q^\beta)+o\Bigl(D^2(x)\Bigr).$$

Нам остается показать, что сумма в правой части этого равенства, которую обозначим S_5, имеет порядок $o\left(D^2(x)\right)$.

Используя (14) и (15), получаем оценку:

$$\sum_{N(p)^\alpha\leqslant r}\ \sum_{\frac{x}{N(p)^\alpha}<N(q)^\beta\leqslant x}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}N(q)^{\beta\Theta}}=\sum_{N(p)^\alpha\leqslant r}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}\left(\ln\frac{\ln x}{\ln x-\ln N(p)^\alpha}+\frac{B}{\ln x}\right)=$$

$$=\frac{B}{\ln x}\sum_{N(p)^\alpha\leqslant r}\frac{\ln N(p)^\alpha}{N(p)^{\alpha\Theta}}=B\frac{\ln r}{\ln x}=o(1).$$

Тогда в силу полученной оценки и (41)

$$S_5=B\Bigg(\sum_{N(p)^\alpha\leqslant r}\ \sum_{\frac{x}{N(p)^\alpha}<N(q)^\beta\leqslant x}+\sum_{N(q)^\beta\leqslant r}\ \sum_{\frac{x}{N(q)^\beta}<N(p)^\alpha\leqslant x}+\sum_{\substack{r<N(p)^\alpha\leqslant x\\ r<N(p)^\beta\leqslant x\\ N(p)^\alpha N(q)^\beta>x}}\frac{|f(p^\alpha)f(q^\beta)|}{N(p)^{\alpha\Theta}N(q)^{\beta\Theta}}\Bigg)=$$

$$=BD^2(x)\left\{\left(\sum_{N(p)^\alpha\leqslant r}\ \sum_{\frac{x}{N(p)^\alpha}<N(q)^\beta\leqslant x}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}N(q)^{\beta\Theta}}\right)^{\frac12}+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{N(q)^\beta\leqslant r}\ \sum_{\frac{x}{N(q)^\beta}<N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}N(q)^{\beta\Theta}}\right)^{\frac12}\right\}+$$

$$+\left(D^2(x)-D^2(r)\right)\left(\sum_{\substack{N(p)^\alpha\leqslant x\\ N(q)^\beta\leqslant x\\ N(p)^\alpha N(q)^\beta>x}}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}N(q)^{\beta\Theta}}\right)^{\frac12}=o\left(D^2(x)\right),$$

что и заканчивает доказательство первой части леммы. Вторая формула доказывается аналогично.

Лемма 14. *Пусть $f(m)\in H$, $r=r(x)$ — соответствующая функция. Дисперсии законов*

$$\lambda_x\left\{\frac{f(m)-A(x)}{D(x)}<y\right\},\qquad \lambda_x\left\{\frac{f(m)_r-A(r)}{D(x)}<y\right\}$$

и законов

$$\lambda_x\left\{\frac{f(m)-A(x)}{B(x)}<y\right\},\qquad \lambda_x\left\{\frac{f(m)_r-A(r)}{B(x)}<y\right\},$$

если $f(m)$ — сильно аддитивная функция, равны $1+o(1)$.

Доказательство. Дисперсии первых двух законов равны соответственно

$$\frac{1}{D^2(x)}\left\{\frac{1}{\nu(x)}\sum_{N(m)\leqslant x}f^2(m)-\left(\frac{1}{\nu(x)}\sum_{N(m)\leqslant x}f(m)\right)^2\right\},$$

$$\frac{1}{D^2(x)}\left\{\frac{1}{\nu(x)}\sum_{N(m)\leqslant x}f^2(m)_r-\left(\frac{1}{\nu(x)}\sum_{N(m)\leqslant x}f(m)_r\right)^2\right\}.$$

Согласно лемме 13, эти выражения равны $1+o(1)$. В силу леммы 12 для сильно аддитивных функций

$$B^2(x)-D^2(x)=B\sum_{N(p)\leqslant x}\frac{f^2(p)}{N(p)^{2\Theta}}=o\left(D^2(x)\right).$$

Отсюда следует, что дисперсии последних двух законов также равны $1+o(1)$.

Теорема 2. *Для того, чтобы законы распределения*

$$\lambda_x\left\{\frac{f(m)-A(x)}{D(x)}<y\right\},$$

где $f(m)$ — аддитивная функция из класса H, сходились к предельному с дисперсией 1, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая неубывающая функция $K(u)$ с вариацией единица, что при $x\to\infty$ во всех точках непрерывности $K(u)$

$$\frac{1}{D^2(x)}\sum_{\substack{N(p)^\alpha\leqslant x\\ f(p^\alpha)<uD(x)}}\frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}}\to K(u). \tag{52}$$

Логарифм характеристической функции предельного закона вычисляется по формуле Колмогорова

$$\ln\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itu}-1-itu)\frac{1}{u^2}\,dK(u), \tag{53}$$

где подынтегральная функция при $u=0$ считается равной $-\frac{1}{2}t^2$.

Доказательство. Так как функция $f(m)\in H$, то существует такая неограниченно возрастающая функция $r=r(x)$, что $\frac{\ln r(x)}{\ln x}\to 0$, $\frac{D(r)}{D(x)}\to 1$ при $x\to\infty$. Рассмотрим независимые дискретные случайные величины $\xi_p\left(N(p)\leqslant r\right)$, где ξ_p принимает значения $f(p^\alpha)$ с вероятностями $\delta(p^\alpha)$ соответственно. Пользуясь теоремой Б. В. Гнеденко ([3], стр. 107—108), докажем сначала, что условия теоремы необходимы и достаточны для сходимости законов распределения сумм

$$\frac{1}{D(x)}\sum_{N(p)\leqslant r}\left(\xi_p-\sum_{\alpha-1}^{\gamma_p}f(p^\alpha)\,\delta(p^\alpha)\right) \tag{54}$$

к предельному, и дисперсий этих сумм к дисперсии предельного закона, и что в случае сходимости предельный закон определяется формулой (53).

Теперь докажем, что для любого $\varepsilon>0$

$$h_x(\varepsilon)=\max_{N(p)\leqslant r}P\left\{\frac{|\xi_p-M\xi_p|}{D(x)}>\varepsilon\right\}\to 0$$

при $x\to\infty$. Здесь $M\xi_p$ — среднее значение ξ_p, P — вероятность. Очевидно,

$$M\xi_p=\sum_{\alpha=1}^{\gamma_p}f(p^\alpha)\,\delta(p^\alpha).$$

Согласно лемме 12, при $x>x_0(\varepsilon)$

$$\max_{N(p)\leqslant r}|M\xi_p|=\max_{N(p)\leqslant r}\left|\sum_{\alpha=1}^{\gamma_p}f(p^\alpha)\,\delta(p^\alpha)\right|\leqslant\sum_{\alpha=1}^{\gamma_p}\frac{|f(p^\alpha)|}{N(p)^{\alpha\Theta}}<\frac{\varepsilon}{2}D(x).$$

Если для всех p с $N(p)\leqslant r$ и $x>x_0(\varepsilon)$

$$|f(p^\alpha)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}D(x),$$

то $h_x(\varepsilon)=0$; в противном случае обозначим через N_0 наименьшую норму образующего элемента p, для которого $|f(p^\alpha)|>\frac{\varepsilon}{2}D(x)$. Тогда

$$h_x(\varepsilon)\leqslant\frac{1}{N_0}.$$

Так как $N_0 \to \infty$ при $x \to \infty$, то $h_x(\varepsilon) \to 0$ при $x \to \infty$ для всякого фиксированного $\varepsilon > 0$.

Далее, исследуем последовательность функций

$$K_x(u) = \sum_{N(p) \leqslant r} \int_{-\infty}^{u} y^2 \, dP\left\{ \frac{\xi_p - M\xi_p}{D(x)} < y \right\} =$$

$$= \frac{1}{D^2(x)} \sum{}^{*} \left(f(p^\alpha) - \sum_{\alpha=1}^{\gamma_p} f(p^\alpha)\, \delta(p^\alpha) \right)^2 \delta(p^\alpha),$$

где звездочка означает, что сумма берется по всем p, удовлетворяющим условиям: $N(p)^\alpha \leqslant r$,

$$f(p^\alpha) - \sum_{\alpha=1}^{\gamma_p} f(p^\alpha)\, \delta(p^\alpha) < uD(x).$$

Согласно лемме 12,

$$K_x(u) = \frac{1}{D^2(x)} \left\{ \sum{}^{*} \frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}} - \sum{}^{*} \frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{(\alpha+1)\Theta}} + \right.$$

$$\left. + B \sum{}^{*} \frac{f(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}} \sum_{\alpha=1}^{\gamma_p} \frac{|f(p^\alpha)|}{N(p)^{\alpha\Theta}} + B \sum{}^{*} \left(\sum_{\alpha=1}^{\gamma_p} \frac{|f(p^\alpha)|}{N(p)^{\alpha\Theta}} \right)^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{D^2(x)} \sum{}^{*} \frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}} + o(1),$$

где оценка $o(1)$ равномерна относительно u. Так как

$$\max_{N(p) \leqslant r} \left| \sum_{\alpha=1}^{\gamma_p} f(p^\alpha)\, \delta(p^\alpha) \right| = o\big(D(x)\big),$$

то в случае сходимости $K_x(u)$ в точках непрерывности предельной функции также и функция

$$\frac{1}{D^2(x)} \sum_{\substack{N(p)^\alpha \leqslant r \\ f(p^\alpha < uD(x)}} \frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}}$$

сходится и оба предела совпадают. Согласно определению класса H последняя функция отличается от функции

$$L_x(u) = \frac{1}{D^2(x)} \sum_{\substack{N(p)^\alpha \leqslant x \\ f(p^\alpha) < uD(x)}} \frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}}$$

лишь величиной $o(1)$, причем оценка равномерна относительно u. Следовательно, функции $K_x(u)$ и $L_x(u)$ сходятся лишь одновременно и притом к одной и той же предельной функции в ее точках непрерывности.

Кроме того, очевидно, что дисперсия случайной величины (54) равна

$$K_x(\infty) = L_x(\infty) + o(1) = 1 + o(1).$$

Заметим еще, что

$$\sum_{N(p) \leqslant r} M\xi_p = \sum_{N(p) \leqslant r} \sum_{\alpha=1}^{\gamma_p} f(p^\alpha)\, \delta(p^\alpha).$$

Тогда в силу того, что было сказано, из теоремы Б. В. Гнеденко следует, что законы распределения для (54) сходятся к предельному и их дисперсии — к дисперсии предельного закона.

Функция распределения

$$\lambda_x\left\{\frac{f(m)_r - A'(r)}{D(x)} < y\right\},$$

где

$$A'(r) = \sum_{N(p)\leq r} \sum_{\alpha=1}^{\gamma_p} f(p^\alpha)\,\delta(p^\alpha),$$

лишь на величину $o(1)$ отличается от функции распределения случайной величины (54). Согласно лемме 12

$$A'(r) = \sum_{N(p)\leq r} \frac{f(p)}{N(p)^\Theta} - \sum_{N(p)\leq r} \frac{f(p)}{N(p)^{2\Theta}} + B \sum_{\substack{N(p)^\alpha \leq r \\ \alpha > 1}} \frac{|f(p^\alpha)|}{N(p)^{\alpha\Theta}} = A(r) + o\Big(D(r)\Big);$$

из следствия леммы 11 следует, что предельные законы функций распределения

$$\lambda_x\left\{\frac{f(m)_r - A'(r)}{D(x)} < y\right\} \quad \text{и} \quad \lambda_x\left\{\frac{f(m)_r - A(r)}{D(x)} < y\right\}$$

совпадают. И, наконец, в силу равномерности оценки (42)

$$\lambda_x\left\{\left|\Big(f(m) - f(m)_r\Big) - \Big(A(x) - A(r)\Big)\right| > \varepsilon\right\} = \frac{B}{\varepsilon^2}\left\{D^2(x) - D^2(r)\right\} \to 0$$

при $x \to \infty$ для любого фиксированного $\varepsilon > 0$. Из лемм 11 и 14 следует доказываемая теорема.

Аналогичным образом доказывается следующая

Теорема 2[a]. *Для того, чтобы законы распределения*

$$\lambda_x\left\{\frac{f(m) - A(x)}{B(x)} < y\right\},$$

где $f(m)$ — сильно аддитивная функция из класса H, сходились к предельному с дисперсией 1, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая неубывающая функция $K(u)$ с вариацией единица, что при $x \to \infty$ во всех точках непрерывности $K(u)$

$$\frac{1}{B^2(x)} \sum_{\substack{N(p)\leq x \\ f(p) < uB(x)}} \frac{f^2(p)}{N(p)^\Theta} \to K(u).$$

Логарифм характеристической функции предельного закона вычисляется по формуле Колмогорова (53).

Теорема 3. *Пусть $f(m)$ — вещественная аддитивная функция, определенная на полугруппе G. Если $D(x) \to \infty$ и для всякого фиксированного $\varepsilon > 0$*

$$\frac{1}{D^2(x)} \sum_{\substack{N(p)^\alpha \leq x \\ |f(p^\alpha)| > \varepsilon D(x)}} \frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}} \to 0 \tag{55}$$

при $x \to \infty$ (аналог условия Линдеберга), то

$$\lambda_x\left\{\frac{f(m) - A(x)}{D(x)} < y\right\} \to \Phi(y). \tag{56}$$

Если $f(m) \in H$, то для справедливости (56) *условие* (55) *является необходимым.*

Доказательство. Сначала докажем, что существует функция $\varepsilon(x)$, удовлетворяющая условиям: $\varepsilon(x)\to 0$ при $x\to\infty$ и для достаточно больших x

$$\frac{1}{D^2(x)}\sum_{\substack{N(p)^\alpha\leqslant x\\ |f(p^\alpha)|>\varepsilon(x)D(x)}}\frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}}<\varepsilon(x).$$

Пусть $\varepsilon>0$ — фиксированное вещественное число. Подберем последовательность чисел $\frac{\varepsilon}{2^k}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. В силу условия Линдеберга для каждого $\frac{\varepsilon}{2^k}$ можно найти такое $x_k=x_k\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right)$, чтобы при $x>x_k$

$$\frac{1}{D^2(x)}\sum_{\substack{N(p)^\alpha\leqslant x\\ |f(p^\alpha)|>\frac{\varepsilon}{2^k}D(x)}}\frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}}<\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Полагая $\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon}{2^k}$, если $x_k\leqslant x<x_{k+1}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, и считая, это $\varepsilon(x)$ принимает любые значения для $x<x_0$, получаем искомую функцию.

Пусть $r=r(x)=x^{\varepsilon(x)}$. Согласно (14) имеем:

$$D^2(x)-D^2(r)=\sum_{\substack{r<N(p)^\alpha\leqslant x\\ |f(p^\alpha)|\leqslant\varepsilon(x)D(x)}}\frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}}+\sum_{\substack{r<N(p)^\alpha\leqslant x\\ |f(p^\alpha)|>\varepsilon(x)D(x)}}\frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}}\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon^2(x)\,D^2(x)\sum_{r<N(p)^\alpha\leqslant x}\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}+\varepsilon(x)\,D^2(x)=$$

$$=BD^2(x)\,\varepsilon(x)\left(\varepsilon(x)\ln\frac{1}{\varepsilon(x)}+1\right)=B\varepsilon(x)\,D^2(x).$$

Следовательно, функция $f(m)\in H$.

В случае нормального предельного закона $\Phi(y)$ в формуле Колмогорова (53)

$$K(u)=\begin{cases}0 & \text{при } u\leqslant 0,\\ 1 & \text{при } u>0,\end{cases}$$

поэтому условие (52) равносильно условию (55). Итак, из теоремы 2 следует теорема 3.

Аналогично из теоремы 2^a получается .

Теорема 3^a. *Пусть $f(m)$ — вещественная сильно аддитивная функция, определенная на полугруппе G. Если $B(x)\to\infty$ и для всякого фиксированного* $\varepsilon>0$

$$\frac{1}{B^2(x)}\sum_{\substack{N(p)\leqslant x\\ |f(p)|>\varepsilon B(x)}}\frac{f^2(p)}{N(p)^\Theta}\to 0 \tag{57}$$

при $x\to\infty$, то

$$\lambda_x\left\{\frac{f(m)-A(x)}{B(x)}<y\right\}\to\Phi(y). \tag{58}$$

Если $f(m)\in H$, то для справедливости (58) *условие* (57) *является необходимым.*

Примеры. В силу оценок, которые даны в конце § 5, из теорем 2^a или 2 имеем, что при $x\to\infty$

$$\lambda_x\left\{\omega(m)<\ln\ln x+y\sqrt{\ln\ln x}\right\}\to\Phi(y),$$

$$\lambda_x\left\{\Omega(m) < \ln\ln x + y\sqrt{\ln\ln x}\right\} \to \Phi(y),$$
$$\lambda_x\left\{\tau_k(m) < k^{\ln\ln x + y\sqrt{\ln\ln x}}\right\} \to \Phi(y),$$
$$\lambda_x\left\{\vartheta(m) < \frac{1}{2}\ln\ln x + \frac{1}{2}y\sqrt{\ln\ln x}\right\} \to \Phi(y).$$

§ 7. Оценка остаточного члена в интегральных асимптотических законах

Теперь исследуем быстроту сходимости к предельному нормальному закону интегральных законов распределения „нормированных“ функций на множестве $\{m \in G,\ N(m) \leqslant x\}$ при $x \to \infty$.

Теорема 4. *Пусть $f(m)$ — вещественная аддитивная функция, определенная на полугруппе G и подчиненная условиям:*

$$D(x) \to \infty \quad \text{при} \quad x \to \infty; \qquad \frac{1}{D(x)} \max_{N(p)^\alpha \leqslant x} |f(p^\alpha)| \leqslant \mu(x), \tag{59}$$

где $\mu(x)$ не возрастает и стремится к 0 при $x \to \infty$. Тогда при $x > x_0$ для всех y (x_0 не зависит от y)

$$\lambda_x\left\{\frac{f(m) - A(x)}{D(x)} < y\right\} = \Phi(y) + B\mu(x)\left(e^{-\frac{1}{2}y^2}\ln\frac{1}{\mu(x)} + 1\right)$$

равномерно относительно $x > x_0$ и y.

Доказательство. Пусть $x > x_0$, где x_0 — достаточно большое. Положим

$$r = r(x) = \exp\left(\frac{\ln x}{c\ln\frac{1}{\mu(x)}}\right), \qquad c = \min\left(\frac{1}{2}c_5,\ c_{24}\right).$$

Очевидно, что $\ln r(x) = o(\ln x)$ при $x \to \infty$. Кроме того,

$$D^2(x) = \sum_{N(p)^\alpha \leqslant x} \frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}} = BD^2(x)\,\mu^2(x)\ln\ln x,$$

отсюда

$$\mu^{-2}(x) = B\ln\ln x, \tag{60}$$

следовательно, $r(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Далее,

$$D^2(x) - D^2(r) = \sum_{r < N(p)^\alpha \leqslant x} \frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}} = BD^2(x)\,\mu^2(x)\ln\ln\frac{1}{\mu(x)}. \tag{61}$$

Пусть

$$h_x(m) = \frac{f(m)}{D(x)}, \qquad h_x(m)_r = \frac{1}{D(x)}\sum_{N(p) \leqslant r} f^{(p)}(m).$$

Используя леммы 6 и 9, в силу в § 4 приведенной теоретико-вероятностной интерпретации получаем, что равномерно по y

$$\lambda_x\{h_x(m)_r < y\} = F_x(y) + B\mu(x),$$

где $F_x(y)$ — свертка функций распределения случайных величин $\xi_p\left(N(p) \leqslant r\right)$, принимающих значения $\frac{f(p^\alpha)}{D(x)}$ с вероятностями $\delta(p^\alpha)$ ($\alpha = 0, 1, \ldots, \gamma_p$) соответственно.

Среднее значение случайной величины $\sum\limits_{N(p)\leqslant r} \xi_p$ равно

$$\sum_{N(p)^\alpha \leqslant r} \frac{f(p^\alpha)\,\delta(p^\alpha)}{D(x)},$$

ее дисперсия согласно лемме 12 и (61)

$$D_x = \sum_{N(p)^\alpha \leqslant r} \frac{f^2(p^\alpha)\,\delta(p^\alpha)}{D^2(x)} - \sum_{N(p)\leqslant r}\left(\sum_{\alpha=1}^{\gamma_p} \frac{f(p^\alpha)\,\delta(p^\alpha)}{D(x)}\right)^2 =$$

$$= \sum_{N(p)^\alpha \leqslant r} \frac{f^2(p^\alpha)}{D^2(x)\,N(p)^{\alpha\Theta}} + B\mu^2(x) = \frac{1}{D^2(x)}\Big(D^2(x) + D^2(r) - D^2(x)\Big) +$$

$$+ B\mu^2(x) = 1 + B\mu^2(x)\ln\ln\frac{1}{\mu(x)},$$

а сумма третьих абсолютных центральных моментов случайных величин $\sum\limits_{N(p)\leqslant r} \xi_p$ равна

$$\sum_{N(p)\leqslant r}\sum_{\alpha=0}^{\gamma_p}\left|\frac{f(p^\alpha)}{D(x)} - \sum_{\alpha=1}^{\gamma_p}\frac{f(p^\alpha)\,\delta(p^\alpha)}{D(x)}\right|^3 \delta(p^\alpha) =$$

$$= \sum_{N(p)\leqslant r}\sum_{\alpha=1}^{\gamma_p}\left|\frac{f(p^\alpha)}{D(x)} - \sum_{\alpha=1}^{\gamma_p}\frac{f(p^\alpha)\,\delta(p^\alpha)}{D(x)}\right|^3 \delta(p^\alpha) + \sum_{N(p)\leqslant r}\left|\sum_{\alpha=1}^{\gamma_p}\frac{f(p^\alpha)\,\delta(p^\alpha)}{D(x)}\right|^3\left(1 - \frac{1}{N(p)^\Theta}\right) =$$

$$= \frac{B}{D^3(x)}\left\{\sum_{N(p)^\alpha\leqslant r}\frac{|f(p^\alpha)|^3}{N(p)^{\alpha\Theta}} + \sum_{N(p)\leqslant r}\sum_{\alpha=1}^{\gamma_p} f^2(p^\alpha)\left(\sum_{\alpha=1}^{\gamma_p}\frac{|f(p^\alpha)|}{N(p)^{\alpha\Theta}}\right)\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}} +\right.$$

$$+ \sum_{N(p)\leqslant r}\sum_{\alpha=1}^{\gamma_p}|f(p^\alpha)|\left(\sum_{\alpha=1}^{\gamma_p}\frac{|f(p^\alpha)|}{N(p)^{\alpha\Theta}}\right)^2\cdot\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}} +$$

$$\left.+ \sum_{N(p)\leqslant r}\sum_{\alpha=1}^{\gamma_p}\left(\sum_{\alpha=1}^{\gamma_p}\frac{|f(p^\alpha)|}{N(p)^{\alpha\Theta}}\right)^3\frac{1}{N(p)^{\alpha\Theta}}\right\} + B\mu^3(x) =$$

$$= \frac{B}{D^3(x)}\sum_{N(p)^\alpha\leqslant r}\frac{|f(p^\alpha)|^3}{N(p)^{\alpha\Theta}} + B\mu^3(x)\left\{1 + \sum_{N(p)\leqslant r}\frac{1}{\left(N(p)^\Theta - 1\right)^2} +\right.$$

$$\left.+ \sum_{N(p)\leqslant r}\frac{1}{\left(N(p)^\Theta - 1\right)^3} + \sum_{N(p)\leqslant r}\frac{2}{\left(N(p)^\Theta - 1\right)^4}\right\} =$$

$$= \frac{B\mu(x)}{D^2(x)}\sum_{N(p)^\alpha\leqslant r}\frac{f^2(p^\alpha)}{N(p)^{\alpha\Theta}} + B\mu^3(x) = B\mu(x).$$

На основании вышеизложенных соображений к $F_x(y)$ можно применить известные результаты А. Берри и К. Г. Эссеена [6, 7], что дает

$$F_x\left(\sqrt{D_x}\,y + \sqrt{D_x}\sum_{N(p)^\alpha\leqslant r}\frac{f(p^\alpha)\,\delta(p^\alpha)}{D(x)}\right) = \Phi(y) + B\mu(x),$$

где оценка равномерна относительно y. Следовательно, равномерно по x и y

$$\lambda_x\left\{\frac{1}{\sqrt{D_x}}\left(h_x^{\cdot}(m)_r - \sum_{N(p)^\alpha\leqslant r}\frac{f(p^\alpha)\,\delta(p^\alpha)}{D(x)}\right) < y\right\} = \Phi(y) + B\mu(x). \qquad (62)$$

Теперь в последнем соотношении заменим $h_x(m)_r$ на $h_x(m)$, D_x на 1 и

$$\sum_{N(p)^\alpha \leqslant r} \frac{f(p^\alpha)\,\delta(p^\alpha)}{D(x)}$$

на

$$\frac{A(x)}{D(x)}.$$

Имеем:

$$\left|A(x) - \sum_{N(p)^\alpha \leqslant r} f(p^\alpha)\,\delta(p^\alpha)\right| = \left|\sum_{r < N(p) \leqslant x} \frac{f(p)}{N(p)^\Theta} - \sum_{N(p) \leqslant r} \frac{f(p)}{N(p)^{2\Theta}} - \right.$$

$$\left. - \sum_{\substack{N(p)^\alpha \leqslant r \\ \alpha > 1}} f(p^\alpha)\,\delta(p^\alpha)\right| = \left|B\mu(x)\,D(x) + B\mu(x)\,D(x)\ln\frac{1}{\mu(x)}\right| <$$

$$< c_{26}\,D(x)\,\mu(x)\ln\frac{1}{\mu(x)}, \tag{63}$$

где c_{26} и в дальнейшем c_{27}, c_{28} — положительные числа, не зависящие от x.

Далее,

$$|\sqrt{D_x} - 1| < c_{27}\,\mu^2(x)\ln\ln\frac{1}{\mu(x)}, \tag{64}$$

а

$$f(m) - \sum_{N(p) \leqslant r} f^{(p)}(m) = \sum_{\substack{r < N(p)^\alpha \leqslant x \\ p^\alpha | m}} f(p^\alpha) = BD(x)\,\mu(x) \sum_{\substack{r < N(p)^\alpha \leqslant x \\ p^\alpha | m}} 1.$$

Очевидно, $\sum\limits_{p^\alpha | m} 1$, где $N(m) \leqslant x$, не превосходит

$$\frac{\ln x}{\ln N(p)^\alpha}.$$

Так как $N(p)^\alpha > r$, то

$$\sum_{\substack{r < N(p)^\alpha \leqslant x \\ p^\alpha | m}} 1 \leqslant \frac{\ln x}{\ln r} = B\ln\frac{1}{\mu(x)},$$

а тогда

$$\left|f(m) - \sum_{N(p) \leqslant r} f^{(p)}(m)\right| < c_{28}\,D(x)\,\mu(x)\ln\frac{1}{\mu(x)}. \tag{65}$$

Ис (63), (64) и (65) получаем, что

$$\lambda_x\left\{\frac{1}{\sqrt{D_x}}\left(h_x(m)_r - \sum_{N(p)^\alpha \leqslant r} \frac{f(p^\alpha)\,\delta(p^\alpha)}{D(x)}\right) < y - \varepsilon\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_x\left\{h_x(m) - \frac{A(x)}{D(x)} < y\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_x\left\{\frac{1}{\sqrt{D_x}}\left(h_x(m)_r - \sum_{N(p)^\alpha \leqslant r} \frac{f(p^\alpha)\,\delta(p^\alpha)}{D(x)}\right) < y + \varepsilon\right\},$$

где

$$\varepsilon = (c_{26} + c_{28})\,\mu(x)\ln\frac{1}{\mu(x)} + c_{27}\,|y|\,\mu^2(x)\ln\frac{1}{\mu(x)}.$$

Беря $|y| < \mu^{-\frac{1}{2}}(x)$, имеем ($|A| \leqslant 1$):

$$\left|\Phi(y \pm \varepsilon) - \Phi(y)\right| = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}(y + A\varepsilon)^2} = B\varepsilon e^{-\frac{1}{2}y^2}.$$

Тогда в силу (63) получаем:

$$\lambda_x\left\{\frac{f(m)-A(x)}{D(x)}<y\right\}=\Phi(y)+B\left(\varepsilon e^{-\frac{1}{2}y^2}+\mu(x)\right)=$$

$$=\Phi(y)+B\mu(x)\left(e^{-\frac{1}{2}y^2}\ln\frac{1}{\mu(x)}+1\right).$$

Таким образом, для $|y|<\mu^{-\frac{1}{2}}(x)$ теорема доказана.

Остается рассмотреть случай $|y|\geqslant\mu^{-\frac{1}{2}}(x)$. Из леммы 10 имеем, что

$$\sum_{N(m)\leqslant x}\left(\frac{f(m)-A(x)}{D(x)}\right)^2=B\nu(x),$$

откуда

$$\lambda_x\left\{\left|\frac{f(m)-A(x)}{D(x)}\right|\geqslant|y|\right\}=\frac{B}{y^2}=B\mu(x),$$

Поэтому

$$\lambda_x\left\{\frac{f(m)-A(x)}{D(x)}<-|y|\right\}=B\mu(x),$$

$$\lambda_x\left\{\frac{f(m)-A(x)}{D(x)}<|y|\right\}=1+B\mu(x).$$

С другой стороны

$$\Phi(-|y|)=1-\Phi(|y|)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|y|}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}u^2}du=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{|y|}e^{-\frac{1}{2}y^2}-\int_{|y|}^{\infty}\frac{1}{u^2}e^{-\frac{1}{2}u^2}du\right)=\frac{B}{|y|}e^{-\frac{1}{2}y^2}=$$

$$=B\sqrt{\mu(x)}\exp\left(-\frac{1}{2\mu(x)}\right)=B\mu(x).$$

Теорема доказана.

Аналогично доказывается и следующая

Теорема 4[a]. *Пусть $f(m)$ — вещественная сильно аддитивная функция, определенная на полугруппе G и подчиненная условиям:*

$$B(x)\to\infty \quad \text{при} \quad x\to\infty; \qquad \frac{1}{B(x)}\max_{N(p)\leqslant x}|f(p)|\leqslant\mu(x),$$

где $\mu(x)$ монотонно стремится к 0 при $x\to\infty$. Тогда при $x>x_0$ для всех y (x_0 не зависит от y)

$$\lambda_x\left\{\frac{f(m)-A(x)}{B(x)}<y\right\}=\Phi(y)+B\mu(x)\left(e^{-\frac{1}{2}y^2}\ln\frac{1}{\mu(x)}+1\right)$$

равномерно относительно $x>x_0$ и y.

Примеры. Из теорем 4[a] или 4 легко получаем:

$$\lambda_x\left\{\frac{\omega(m)-\ln\ln x}{\sqrt{\ln\ln x}}<y\right\}=\Phi(y)+\frac{B}{\sqrt{\ln\ln x}}\left(e^{-\frac{1}{2}y^2}\ln\ln\ln x+1\right),$$

$$\lambda_x\left\{\frac{\Omega(m)-\ln\ln x}{\sqrt{\ln\ln x}}<y\right\}=\Phi(y)+\frac{B}{\sqrt{\ln\ln x}}\left(e^{-\frac{1}{2}y^2}\ln\ln\ln x+1\right),$$

$$\lambda_x\left\{\tau_k(m)<k^{\ln\ln x+y\sqrt{\ln\ln x}}\right\}=\Phi(y)+\frac{B}{\sqrt{\ln\ln x}}\left(e^{-\frac{1}{2}y^2}\ln\ln\ln x+1\right),$$

$$\lambda_x\left\{\frac{\vartheta(m)-\frac{1}{2}\ln\ln x}{\frac{1}{2}\sqrt{\ln\ln x}}<y\right\}=\Phi(y)+\frac{B}{\sqrt{\ln\ln x}}\left(e^{-\frac{1}{2}y^2}\ln\ln\ln x+1\right).$$

§ 8. Примеры

Приведем несколько примеров полугрупп (см. [1]).

1. Пусть элементы полугруппы G – положительные вещественные числа $\alpha \geqslant 1$, причем логарифмы образующих элементов линейно не зависимы. В этом случае систему образующих элементов назовем базой полугруппы G.

Если положим $N(\alpha)=\alpha$, то все наши леммы и теоремы будут справедливы для такой полугруппы. Например, в качестве полугруппы G можно взять множество чисел вида $n^{\Theta^{-1}}$, где $n=1, 2, \ldots$ и $\Theta>0$. Очевидно, для полугруппы G

$$\nu(x)=\sum_{n^{\Theta^{-1}}\leqslant x} 1 = x^{\Theta}+B.$$

Базой полугруппы G будет множество чисел вида $p^{\Theta^{-1}}$, где p пробегает множество простых рациональных чисел. При $\Theta=1$ получаем результаты И. Кубилюса [5] для аддитивных функций, определенных на множестве натуральных чисел.

2. Рассмотрим множество целых комплексных чисел. Мы достигаем полной однозначности, беря полугруппу G целых комплексных чисел z с базой, состоящей из простых гауссовых чисел $z_1, z_2, \ldots$ первого квадранта. Полагая $N(z)=|z|$, тривиальным образом имеем

$$\nu(x)=\frac{1}{4}\pi x^2+Bx.$$

Следовательно, наши результаты справедливы при $\Theta=2$.

3. Рассмотрим конечное расширение K поля рациональных чисел степени n. Множество G целых отличных от нуля идеалов $\mathfrak{a}$ поля K будет полугруппой с базой, состоящей из простых идеалов $\mathfrak{p}$. Если нормой элемента $\mathfrak{a}$ будем считать норму идеала $\mathfrak{a}$, то (см. [2], стр. 181)

$$\nu(x)=\mu hx+Bx^{1-\frac{1}{n}},$$

и все леммы и теоремы справедливы для любого поля алгебраических чисел при $\Theta=1$.

Автор глубоко благодарен И. Кубилюсу за постоянное внимание к работе и ценные советы.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
27.III.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Бредихин. Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями, Матем. сб., 1958, **46**, № 2, 143—158.
2. Г. Вейль. Алгебраическая теория чисел, Москва, ИЛ, 1947.
3. Б. В. Гнеденко. А. Н. Колмогоров. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М. — Л., Гостехиздат, 1949.
4. А. Н. Колмогоров. Основные понятия теории вероятностей, М.— Л., ОНТИ, 1963.
5. И. П. Кубилюс. Вероятностные методы в теории чисел, Вильнюс, Гос. издат. полит. и науч. лит., 1962.

6. A. C. Berry. The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates, Trans. Amer. Math. Soc., 1941, **49**, 122—136.
7. C. G. Esseen. Fourier analysis of distribution funktions, A. mathematical study of the Laplace-Gaussian law, Acta math., 1945, **77**, 1—125.
8. A. Selberg. On an elementary method in the theory of primes, Norske Vid. Selsk. Forth. Trondhjem, 1947, **19**, 64—67.

ADITYVINIŲ FUNKCIJŲ, APIBRĖŽTŲ SUTVARKYTUOSE PUSGRUPIUOSE SU REGULIARIU NORMAVIMU, RIBINĖS TEOREMOS

Z. JUŠKYS

(Reziumė)

Tegul G — multiplikatyvinis pusgrupis su suskaitytine sistema begalinės eilės generuojančių elementų. Toliau, N — pusgrupio G homomorfizmas į multiplikatyvinį teigiamų skaičių pusgrupį; $N(m)$ — elemento $m \in G$ vaizdas, norma. Mes tiriame pusgrupį, kuriam

$$\sum_{N(m) \leqslant x} 1 = Cx^{\Theta} + O(x^{\Theta_1}),$$

kur C, Θ, Θ_1 — konstantos, $C > 0$, $0 \leqslant \Theta_1 < \Theta$, ir jį vadiname sutvarkytu pusgrupiu su reguliariu normavimu.

Funkciją $f(m)$ vadinsime adityvine, jei ji apibrėžiama visiems m, $n \in G$ savybe

$$f(mn) = f(m) + f(n),$$

kai m ir n tarpusavyje pirminiai.

Šiame straipsnyje yra įrodoma keletas ribinių teoremų apie adityvinių funkcijų, apibrėžtų sutvarkytuose pusgrupiuose su reguliariu normavimu, pasiskirstymą.

Darbe taip pat įrodoma ši teorema:

Tegul $f(m)$ — reali adityvinė funkcija, tenkinanti sąlygas

$$\frac{1}{D(x)} \max_{N(p)^{\alpha} \leqslant x} |f(p^{\alpha})| \leqslant \mu(x), \qquad D(x) \to \infty,$$

kai $x \to \infty$ $\left(\mu(x)\right.$ — *monotoniškai artėjanti į* 0, *kai* $x \to \infty$, *funkcija*$\left.\right)$. *Tegul, toliau,*

$$\lambda_x \left\{ \frac{f(m) - A(x)}{D(x)} < y \right\}$$

yra pusgrupio G elementų m, kuriems $N(m) \leqslant x$ ir $f(m) < A(x) + yD(x)$, dažnumas. Tada visiems $x > x_0$ ir y galioja pareinamybė

$$\lambda_x \left\{ \frac{f(m) - A(x)}{D(x)} < y \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}u^2} du +$$

$$+ O\left\{ \mu(x) \left(e^{-\frac{1}{2}y^2} \ln \frac{1}{\mu(x)} + 1 \right) \right\}.$$

Liekamojo nario įvertinimas yra tolygus $x > x_0$ ir y atžvilgiu (x_0 nepriklauso nuo y).

GRENZWERTSÄTZE FÜR ADDITIVE FUNKTIONEN AUF DEN GEORDNETEN HALBGRUPPEN MIT REGULÄRER NORMIERUNG

Z. JUŠKYS

(Zusammenfassung)

Es sei G eine multiplikative Halbgruppe mit abzählbar vielen erzeugenden Elementen unendlichen Ordnungs. Es sei N — ein Homomorphismus der Halbgruppe G in die multiplikative Halbgruppe der positiven Zahlen. Man nennt das homomorphe Bild $N(m)$ die Norme des

Elementes m. Wir annehmen, dass die Anzahl der Elementen der Halbgruppe G mit $N(m) \leqslant x$ gleich $Cx^{\Theta}+O(x^{\Theta_1})$ ist; C, Θ, Θ_1 sind Konstanten, $C>0$, $0 \leqslant \Theta_1 < \Theta$.

Eine Funktion $f(m)$ heisst additiv, die auf G definiert ist und für jedes Paar teilerfremden Elementen m, n die Bedingung

$$f(mn)=f(m)+f(n)$$

genügt.

In dieser Arbeit werden einige Grenzwertsätze über die Verteilung der Werte von additiven Funktionen, die auf geordneten Halbgruppen mit regulärer Normierung definiert ist, bewiesen.

Im Arbeit wird auch der folgende Satz bewiesen:

Es sei $f(m)$ eine additive reelle Funktion, die den Bedingungen

$$\frac{1}{D(x)} \max_{N(p)^{\alpha} \leqslant x} |f(p^{\alpha})| \leqslant \mu(x), \qquad D(x) \to \infty \quad (x \to \infty)$$

unterworfen ist. $\mu(x)$ ist eine monoton nach 0 strebende Funktion. Es sei ferner

$$\lambda_x \left\{ \frac{f(m)-A(x)}{D(x)} < y \right\}$$

die Häufigkeit der Elementen $m \in G$, für die $N(m) \leqslant x$ und $f(m) < A(x)+yD(x)$ ist. Dann gilt

$$\lambda_x \left\{ \frac{f(m)-A(x)}{D(x)} < y \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}u^2} du +$$

$$+O\left\{ \mu(x) \left(e^{-\frac{1}{2}u^2} \ln \frac{1}{\mu(x)} + 1 \right) \right\},$$

gleichmässig für alle $x > x_0$ und alle y (x_0 von y unabhängig ist).