V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК I
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1965

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ ДЛЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА H И. П. КУБИЛЮСА, ЗАДАННЫХ НА МНОЖЕСТВЕ „СДВИНУТЫХ" ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

М. Б. БАРБАН, А. И. ВИНОГРАДОВ, Б. В. ЛЕВИН

Пусть $f(m)=\sum\limits_{p|m} f(p)$ — сильно аддитивная арифметическая функция, $A_n=\sum\limits_{p\leqslant n}\frac{f(p)}{p}$, $B_n^2=\sum\limits_{p\leqslant n}\frac{f^2(p)}{p}$. И. П. Кубилюс [1], [2], [3] выяснил предельные законы распределения величины $\frac{f(m)-A_n}{B_n}$ для класса H функций, удовлетворяющих условиям $B_n\to\infty$, причем существует такая функция $r=r(n)$, что $\frac{\ln r}{\ln n}\to 0$, а $\frac{B_r}{B_n}\to 1$ при $n\to\infty$. В работе одного из авторов [4] результаты И. П. Кубилюса были перенесены на тот случай, когда аргумент пробегает множество $\{q-l\}$, q — простые числа, l — фиксированное целое, $l\neq 0$. Однако класс функций, для которых эти закономерности имеют место, сузился до $H\cap R$, где R — класс функций, удовлетворяющих условию $\max\limits_{p\leqslant n}|f(p)|=O(B_n)$.

В настоящей заметке последнее ограничение снимается. А именно, мы докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть $f(m)\in H$. Для того, чтобы

$$\frac{\ln n}{n} N\left\{q\leqslant n,\quad \frac{f(q-l)-A_n}{B_n}<x\right\}$$

при $n\to\infty$ стремилось к некоторой функции распределения в каждой её точке непрерывности, необходимо и достаточно, чтобы существовала неубывающая функция $K(u)$ такая, что при $n\to\infty$ во всех точках непрерывности $K(u)$

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ f(p)<uB_n}}\frac{f^2(p)}{p}\to K(u). \tag{1}$$

Логарифм характеристической функции $\ln\varphi(t)$ предельного закона вычисляется по формуле А. Н. Колмогорова

$$\ln\varphi(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(e^{itu}-1-itu)\frac{1}{u^2}\,dK(u).$$

Пусть $f(m)_r=\sum\limits_{p|m,\ p\leqslant r} f(p)$. Если $\frac{\ln r}{\ln n}\to 0$ при $n\to\infty$, то с помощью метода решета, „большого решета" и теории суммирования независимых случайных величин, доказываем, что условие (1) необходимо и достаточно для существования предельной функции распределения величины $\frac{f(q-l)_r-A_r}{B_n}$, если только $B_n \to \infty$ [4]. Остается доказать, что для функций класса H предельные законы для $\frac{f(q-l)-A_n}{B_n}$ и $\frac{f(q-l)_r-A_r}{B_n}$ совпадают. Для этого рассмотрим среднее абсолютное уклонение

$$D=\sum_{q\leqslant n}|f(q-l)-A_n-f(q-l)_r+A_r|.$$

Если для D получить оценку $D=o\left(B_n\frac{n}{\ln n}\right)$, то это и будет означать совпадение законов распределения для $\frac{f(q-l)-A_n}{B_n}$ и $\frac{f(q-l)_r-A_r}{B_n}$. Но

$$D\leqslant\sum_{q\leqslant n}|f(q-l)_{n^{1/4}}-f(q-l)_r-A_n+A_r|+\sum_{q\leqslant n}\sum_{\substack{p|q-l\\ p\geqslant n^{1/4}}}|f(p)|=D_1+D_2.$$

Применяя к D_1 неравенство Шварца, получаем

$$D_1\leqslant\left\{\frac{n}{\ln n}\sum_{q\leqslant n}\{f(q-l)_{n^{1/4}}-f(q-l)_r-A_n+A_r\}^2\right\}^{1/2}=\left(\frac{n}{\ln n}D_1'\right)^{1/2}.$$

Но D_1' легко рассчитывается с помощью теорем о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях „в среднем“ („большое решето“), либо даже элементарным методом (см. [5]). Получаем

$$D_1'=O\left\{\frac{n}{\ln n}(B_n^2-B_r^2)\right\}+o\left(\frac{n}{\ln n}B_n^2\right),$$

или, для $f\in H$,

$$D_1=o\left(\frac{n}{\ln n}B_n\right).$$

В D_2 обратим порядок суммирования и опять применим неравенства Шварца

$$D_2=\sum_{n^{1/4}\leqslant p\leqslant n}|f(p)|\,\pi(n,\,p,\,l)\leqslant\left\{\sum_{n^{1/4}\leqslant p\leqslant n}\frac{|f(p)|^2}{p}\sum_{n^{1/4}\leqslant p\leqslant n}p\pi^2(n,p,l)\right\}^{1/2}.$$

Так как $\sum\limits_{n^{1/4}\leqslant p\leqslant n}\frac{f^2(p)}{p}=B_n^2-B_{n^{1/4}}^2=o(B_n^2)$ для $f\in H$, то нижеследующая лемма (имеющая и самостоятельный интерес) завершает доказательство теоремы.

Лемма. При любом фиксированном l имеет место оценка

$$\sum_{x^{1/4}\leqslant p\leqslant x}p\pi^2(x,\,p,\,l)\ll\frac{x^2}{\ln^3 x}.$$

Доказательство: Сначала исследуем суммы вида

$$\sum_{M\leqslant p\leqslant 2M}p\pi^2(x,p,l)\leqslant M\sum_{M\leqslant p\leqslant 2M}\pi^2(x,\,p,\,l), \tag{2}$$

причем M удовлетворяет неравенству $x^{1/4}\leqslant M\leqslant x$. Иными словами нам нужно оценить число S решений системы уравнений

$$p_1-l=p\nu_1,\quad p_2-l=p\nu_2,\quad M\leqslant p\leqslant 2M,\quad p_1,\,p_2\leqslant x,$$

ν_1, ν_2 — пробегают все целые числа подряд.

Имеем

$$S\leqslant\sum_{\substack{p_1-l=p\nu\\ p_1\leqslant x,\ M\leqslant p\leqslant 2M}}1+2\sum_{\substack{p\nu_1+l=p_1,\ p\nu_2+l=p_2\\ M\leqslant p\leqslant 2M,\ \nu_1<\nu_2}}1=\sum\nolimits_1+2\sum\nolimits_2. \tag{3}$$

Метод решета (см. [6]) даёт оценку Σ_1:

$$\sum\nolimits_1 \ll \sum_{\nu \leqslant \frac{x}{M}} \frac{M}{\ln^3 M} \prod_{q/\nu} \left(1+\frac{1}{q}\right) \ll \frac{x}{\ln^3 M} \tag{4}$$

при условии $M > x^{1/4}$. Здесь мы воспользовались неравенством

$$\sum_{\nu \leqslant y} \prod_{p/\nu} \left(1+\frac{1}{q}\right)^c \ll y. \tag{5}$$

Точно так же метод решета позволяет оценить Σ_2

$$\sum\nolimits_2 \ll \sum_{\substack{q \nmid n(\nu_1 n+l)(\nu_2 n+l) \\ q \leqslant x^{0,01} \\ n \leqslant 2M,\ \nu_1 < \nu_2 \leqslant \frac{x}{M}}} 1 + O(x^{0,1}) \ll$$

$$\ll \sum_{\nu_1 < \nu_2 \leqslant \frac{x}{M}} \frac{M}{\ln^3 M} \prod_{q/\nu_1} \left(1+\frac{1}{q}\right)^2 \prod_{q/\nu_2} \left(1+\frac{1}{q}\right)^2 \prod_{q/\nu_2-\nu_1} \left(1-\frac{1}{q}\right)^2.$$

Применим неравенство Шварца и (5):

$$\sum\nolimits_2 \ll \frac{M}{\ln^3 M} \cdot \frac{x}{M} \left(\sum_{\nu_1 < \nu_2 \leqslant \frac{x}{M}} \prod_{q/\nu_2-\nu_1} \left(1+\frac{1}{q}\right)^4 \right)^{1/2} \ll \frac{x^2}{M \ln^3 M}. \tag{6}$$

Таким образом, собирая оценки (2), (3), (4), (6), получаем

$$\sum_{M \leqslant p \leqslant 2M} p\pi^2 (x, p, l) \ll \frac{xM}{\ln^2 M} + \frac{x^2}{\ln^3 M}. \tag{7}$$

Лемма становится очевидной, если теперь отрезок $[x^{1/4}, x]$ разбить на подинтервалы вида $\left(\frac{x}{2^m}, \frac{x}{2^{m+1}}\right)$ и в каждом из них воспользоваться оценкой (7).

В заключение заметим, что „сдвинутые" простые $q-l$ рассматривались лишь ради простоты расчета, а метод позволяет изучить и множество $aq+b$.

Поступило в редакцию
15.V.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел, УМН, 1956, II, № 2, 31–66.
2. И. П. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел, Вильнюс, 1959.
3. И. П. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел, II-ое издание, Вильнюс, 1962.
4. М. Б. Барбан, Арифметические функции на „редких" множествах, Труды Института математики им. В. И. Романовского, Теор. вер. и мат. ст., вып. 22, Ташкент, 1961.
5. М. Б. Барбан, Аналог закона больших чисел для аддитивных арифметических функций, заданных на множестве „сдвинутых" простых чисел, ДАН УзССР, 1961, № 12.
6. Н. И. Климов, Комбинирование элементарного и аналитического методов в теории чисел, УМН, том XIII, выпуск 3(81), 1958, 145–164.

RIBINIAI DĖSNIAI J. KUBILIAUS KLASĖS *H* FUNKCIJOMS, DEFINUOTOMS „PASTUMTŲ" PIRMINIŲ SKAIČIŲ AIBĖJE

M. B. BARBANAS, A. I. VINOGRADOVAS, B. V. LEVINAS

(Reziumė)

Šio darbo tikslas parodyti, kad visi J. Kubiliaus teorijos rezultatai yra skirti stipriai adityvinėms aritmetinėms funkcijoms $f(m)$, $f(m) \in H$ (žr. [1], [2], [3]), kai argumentas perbėga „pastumtus" pirminius skaičius $\{p-l\}$.

LIMIT LAWS FOR ARITHMETIC FUNCTIONS OF J. P. KUBILIUS CLASS *H*, DEFINED ON THE SET OF "SHIFFED" PRIMES

M. B. BARBAN, A. I. VINOGRADOV, B. V. LEVIN

(Summary)

The aim of the present paper is to show that all results of J. P. Kubilius theory are valid for strongly additive arithmetic functions $f(m)$, $f(m) \in H$ (see [1], [2], [3]), when the argument runs throught "shiffed" primes $\{p-l\}$.