V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
1965

О СУЩЕСТВОВАНИИ ИНВАРИАНТНЫХ ФИНСЛЕРОВЫХ МЕТРИК В ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. ИОНУШАУСКАС

1. Введение

В настоящей работе исследуется существование инвариантной финслеровой метрики для некоторого класса однородных пространств (мы их назвали пространствами типа $L_p(n, H)$), геометрически которые можно представлять себе следующим образом. Пусть H — подгруппа общей линейной группы $GL(n, R)$, а L_p — p-мерное подпространство n-мерного векторного пространства L_n. Под действием группы H (она в этом смысле будет группой преобразований однородного пространства $L_p(n, H)$) подпространство L_p (оно будеть играть роль точки пространства $L_p(n, H)$) описывает естественным образом некоторое семейство $L_p(n, H)$ p-мерных подпространств пространства L_n. Стационарной подгруппой h точки $L_p \subset L_p(n, H)$ является пересечение группы H со стационарной подгруппой подпространства L_p, как подпространства, лежащего в пространстве L_n, имеющем своей группой преобразований всю группу $GL(n, R)$. В зависимости от подгруппы H и от размерностей p и n в однородном пространстве $L_p(n, H)$ инвариантная финслерова метрика в одних случаях существует, в других — невозможна. В этом смысле проведена классификация однородных пространств типа $L_p(n, H)$ для важнейших подгрупп $H \subset GL(n, R)$, охватывающая, в частности, случаи, когда H — аффинная группа или эквиаффинная группа, или группа движений.

2. Линейная группа изотропии однородного пространства $\mathfrak{M}$ и вопрос существования в $\mathfrak{M}$ инвариантной финслеровой метрики

Пусть $\mathfrak{M}$ — однородное пространство с группой преобразований G, и пусть g — стационарная подгруппа точки $x_0 \in \mathfrak{M}$. Базис ω^I, ω^A правоинвариантных пфаффовых форм группы Ли G можно выбрать таким образом, чтобы подгруппа g определялась вполне интегрируемой системой

$$\omega^A = 0,$$

т. е. чтобы структурные уравнения группы G приняли вид

$$D\omega^I = \frac{1}{2} C^I_{LK}[\omega^L \omega^K] + C^I_{BK}[\omega^B \omega^K] + \frac{1}{2} C^I_{BC}[\omega^B \omega^C], \tag{1a}$$

$$D\omega^A = C^A_{BK}[\omega^B \omega^K] + \frac{1}{2} C^A_{BC}[\omega^B \omega^C]. \tag{1б}$$

Тогда линейная группа изотропии $\mathfrak{g}$ однородного пространства $\mathfrak{M}$ определяется, как известно [1, 2], следующей вполне интегрируемой системой:

$$\omega_B^A = C_{BK}^A \Theta^K, \tag{2}$$

где

$$D\omega_B^A = [\omega_B^C \omega_C^A],$$

$$D\Theta^I = \frac{1}{2} C_{LK}^I [\Theta^L \Theta^K]$$

со структурными константами C_{LK}^I, фигурирующими в уравнениях (1a). Иными словами, линейная группа изотропии $\mathfrak{g}$ есть не что иное, как линейное представление (2) стационарной подгруппы g в N-мерном векторном пространстве L_N, где $N = \dim \mathfrak{M}$. Удобно представлять себе L_N как N-мерное (точечное) центроаффинное пространство, и мы всегда в дальнейшем, говоря о действии линейной группы изотропии $\mathfrak{g}$, будем пользоваться терминологией центроаффинного пространства.

Роль линейной группы изотропии $\mathfrak{g}$ в геометрии однородного пространства $\mathfrak{M}$ заключается в том, что инвариантные векторные и тензорные поля, а также инвариантные поля многообразий векторов и тензоров на $\mathfrak{M}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с векторами и тензорами или многообразиями векторов и тензоров пространства L_N, инвариантными относительно линейной группы $\mathfrak{g}$. В частности, *существование в однородном пространстве $\mathfrak{M}$ инвариантной финслеровой метрики равносильно существованию в L_N тангенциально невырожденного $(N-1)$-мерного подмногообразия $\mathfrak{L}_{N-1}$* (т. е. *тангенциально невырожденной гиперповерхности*), *инвариантного относительно преобразований группы $\mathfrak{g}$.*

В силу этого очевиды следующие общие признаки, касающиеся существования в $\mathfrak{M}$ инвариантной финслеровой метрики.

В однородном пространстве $\mathfrak{M}$ инвариантная финслерова метрика невозможна, если

1) *группа изотропии $\mathfrak{g}$ действует в L_N транзитивно, или если*

2) $\mathfrak{g}$ *действует нетранзитивно, но классы интранзитивности* (короче мы их будем называть *траекториями*) *в L_N являются либо семействами лучей, исходящих из центра пространства, либо семействами k-мерных плоскостей, параллельных фиксированному k-мерному подпространству.*

Наоборот, *в $\mathfrak{M}$ инвариантная финслерова метрика всегда существует в тех случаях, когда*

3) $\mathfrak{g}$ *является подгруппой ортогональной группы $O(n)$ или*

4) *траектории тангенциально невырождены*, поскольку из таких траекторий всегда можно подходящим образом составить семейство, являющееся тангенциально невырожденной гиперповерхностью пространства L_N.

Теперь мы переходим к рассмотрению однородных пространств типа $L_p(n, H)$. Прежде всего уточним, с какими подгруппами $H \subset GL(n, R)$ мы будем иметь дело.

3. Важнейшие подгруппы общей линейной группы

С локальной точки зрения группа $GL(n, R)$ имеет структуру [3]

$$D\omega_\lambda^\mu = [\omega_\lambda^\nu \omega_\nu^\mu] \qquad (\lambda, \mu, \nu = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Подгруппа $SL(n, R)$ выделяется уравнением

$$\omega_\nu^\nu = 0.$$

Ортогональная группа $O(n)$ определяется системой

$$\omega_\lambda^\mu + \omega_\mu^\lambda = 0.$$

Стационарная подгруппа $A(m)$ m-мерного подпространства $L_m \subset L_n$ $(0 < m < n)$ при подходящем выборе базисных форм может быть определена следующей системой:

$$\omega_a^i = 0 \qquad (i, j, k = 1, \ldots, n-m; \quad a, b, c = n-m+1, \ldots, n); \tag{4}$$

именно, это будет означать, что последние m векторов e_a подвижного репера пространства L_n помещены в данном подпространстве L_m:

$$de_i = \omega_i^k e_k + \omega_i^b e_b,$$
$$de_a = \omega_a^b e_b.$$

При учете условий (4) из уравнений (3) получаем, что формы ω_i^k, ω_i^b, ω_a^b группы $A(m)$ имеют следующую структуру:

$$D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k],$$
$$D\omega_i^b = [\omega_i^j \omega_j^b] + [\omega_i^c \omega_c^b], \tag{5}$$
$$D\omega_a^b = [\omega_a^c \omega_c^b].$$

Из уравнений (5) видно, что в группе $A(m)$ содержатся следующие важнейшие подгруппы:

$$S_1(m): \quad \omega_i^i = 0, \quad \omega_a^i = 0;$$
$$S_2(m): \quad \omega_a^a = 0, \quad \omega_a^i = 0;$$
$$E_1(m): \quad \omega_i^k + \omega_k^i = 0, \quad \omega_a^i = 0;$$
$$E_2(m): \quad \omega_a^b + \omega_b^a = 0, \quad \omega_a^i = 0$$

и их всевозможные пересечения. При $m = n-1$ группа S_1 есть аффинная группа, $S_1 \cap S_2$ — эквиаффинная группа, $S_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_2$ — группа евклидовых движений $(n-1)$-мерного аффинного пространства.

4. Линейная группа изотропии пространства типа $L_p(n, H)$

Мы выпишем формулы, определяющие линейную группу изотропии пространства $L_p(n, H)$ для $H = GL(n, R)$, поскольку из них наложением на формы ω_λ^μ условий, выделяющих какую-нибудь подгруппу $H \subset GL(n, R)$, получатся формулы, определяющие линейную группу изотропии пространства $L_p(n, H)$ и для подгруппы H.

Итак, пусть $H = GL(n, R)$. Тогда стационарная подгруппа h „точки“ L_p при подходящем выборе форм ω_λ^μ выделяется уравнениями (4), где следует считать $i, j, k = 1, \ldots, n-p$; $a, b, c = n-p+1, \ldots, n$. В этом случае подсистема системы (3), играющая роль уравнений (1б), такова:

$$D\omega_a^i = [\omega_a^c \omega_c^i] + [\omega_a^j \omega_j^i]. \tag{6}$$

Если сохранить обозначения п.2, то в уравнениях (6) в качестве индекса A употребляется пара ${}^i_a$, а в качестве остальных индексов I — пары ${}^b_a$, ${}^b_i$, ${}^k_i$. Следовательно, уравнения (2) в этом случае запишутся так:

$$\overset{i}{\underset{b}{\omega}}{}^a_k = -\delta^i_k\,\Theta^b_a + \delta^b_a\,\Theta^i_k, \tag{7}$$

где

$$D\Theta^b_a = [\Theta^c_a\,\Theta^b_c], \qquad D\Theta^i_k = [\Theta^j_k\,\Theta^i_j],$$

а формы $\overset{i}{\underset{b}{\omega}}{}^a_k$ следует считать инвариантными формами группы $GL(N, R)$, где $N = p(n-p)$.

Рассматривая линейную группу изотропии (7) как группу преобразований векторного пространства L_N, в котором координаты занумерованы с помощью двух индексов x^i_a, линейное представление (7) можно записать также в следующем виде:

$$dx^i_a = -x^i_b\,\Theta^b_a + x^k_a\,\Theta^i_k. \tag{7а}$$

Уравнения (7а) следует понимать как уравнения, определяющие траекторию, проходящую через точку $(x^i_a) \in L_N$, относительно фиксированного (т. е. „абсолютного") репера e^a_i пространства L_N (см. [4]).

То же линейное представление (7) может быть записано и в векторной форме:

$$de^b_k = -\Theta^b_a\,e^a_k + \Theta^i_k\,e^b_i; \tag{7б}$$

уравнения (7б) определяют преобразования репера пространства L_N, и точка $M(x^i_a) \in L_N$ опишет траекторию, если считать, что относительно движущегося репера координаты x^i_a фиксированы.

Касательная плоскость к траектории (7а) в точке $M(x^i_a)$ натянута на точки $M + M^a_b$, $M + M^k_i$, где

$$M^a_b = -x^i_b\,e^a_i, \qquad M^k_i = x^k_a\,e^a_i; \tag{8}$$

здесь обозначения таковы, что

$$dM = \Theta^b_a\,M^a_b + \Theta^i_k\,M^k_i.$$

Векторы (8) при движении по траектории меняются по закону

$$dM^a_b = -dx^i_b\,e^a_i, \qquad dM^k_i = dx^k_a\,e^a_i, \tag{9}$$

где dx^i_a определяются уравнениями (7а).

Формулами этого вида мы будем неоднократно пользоваться в нижеследующих рассмотрениях.

Видим, что в случаях $H = GL(n, R)$ и $H = SL(n, R)$ группа (7) действует транзитивно, следовательно, *в однородных пространствах* $L_p\bigl(n, GL(n, R)\bigr)$ *и* $L_p\bigl(n, SL(n, R)\bigr)$ $(0 < p < n)$ *инвариантная финслерова метрика невозможна* (см. п.2).

Для того чтобы подгруппа (7) оказалась подгруппой ортогональной группы $O(N)$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\Theta^b_a + \Theta^a_b = 0;$$
$$\Theta^k_i + \Theta^i_k = 0.$$

Эти условия выполняются, в частности, когда $H = O(n)$, поэтому *в однородном пространстве* $L_p\bigl(n, O(n)\bigr)$ $(0 < p < n)$ *всегда существует инвариантная финслерова метрика.*

5. Исследование существования инвариантной финслеровой метрики в пространстве $L_p(n, H)$ для $H \subset A(m)$

В этом пункте для группы $A(m)$ (см. п.3) мы полностью сохраним обозначения индексов, введенные в п.3; наоборот, для линейной группы изотропии пространства $L_p(n, H)$ $\big($см. (7), (7а), (7б)$\big)$ будут употребляться совершенно другие индексы, чем в п.4.

Если $H \subset A(m)$, т.е. если при действии группы H данное m-мерное подпространство $L_m \subset L_n$ инвариантно, то положение подпространства L_p, описывающего $L_p(n, H)$, будет наиболее общим в том случае, когда $\dim(L_p \cap L_m)$ минимальна. Поэтому изучение приходится разбить на три случая:

I $p+m>n$,

II $p+m=n$,

III $p+m<n$.

Здесь же отметим, что *случаи* I *и* III *изоморфны в том смысле, что всякому однородному пространству* $L_p(n, H)$ *типа* I, *как семейству* p*-мерных подпространств* n*-мерного векторного пространства* L_n, *естественным образом взаимно однозначно соответствует однородное пространство* $L^*_{n-p}(n, H)$ *типа* III — *семейство* $(n-p)$*-мерных подпространств пространства* L^*_n, *дуального к* L_n, *при этом линейные группы изотропии соответствующих* $L_p(n, H)$ *и* $L^*_{n-p}(n, H)$ *изоморфны*. Поэтому нужно рассмотреть лишь один из них. Мы изучим случай I, поскольку им охватываются однородные пространства плоскостей аффинного и эвклидова пространства.

Случай I: $p+m>n$. Минимальная возможная размерность пересечения $L_p \cap L_m$ равна $p+m-n$, поэтому для подпространства L_p, находящегося в наиболее общем положении, подвижной репер пространства L_n можно выбрать следующим образом: базис e_a подпространства L_m выберем так, чтобы первые $p+m-n$ из них образовали базис пересечения $L_p \cap L_m$; мы их обозначим через e_ξ; остальные векторы множества e_a будем обозначать через e_α; векторы e_ξ, e_α до полного базиса всего пространства L_n дополним векторами e_i, лежащими в L_p. Итак,

$$L_p = \{e_i, e_\xi\}, \qquad L_m = \{e_\xi, e_\alpha\}$$

$$(i, j, k = 1, \ldots, n-m; \quad \xi, \eta, \zeta = n-m+1, \ldots, p; \quad \alpha, \beta, \gamma = p+1, \ldots, n),$$

Для краткости мы будем постоянно пользоваться следующим обозначением: символ „i“ для нас будет означать число значений, пробегаемых индексом i. Так в нашем случае

$$„i“ = n-m, \quad „\xi“ = p+m-n, \quad „\alpha“ = n-p.$$

Сперва выпишем уравнения, определяющие линейную группу изотропии пространства $L_p\big(n, A(m)\big)$ $(p+m>n)$. В силу только что введенных обозначений индексов, в уравнениях (7), (7а), (7б) вместо индексов i, k следует писать α, β, γ, а вместо индексов a, b — индексы i, j, k и ξ, η, ζ; притом следует помнить, что

$$\Theta^i_\xi = 0, \quad \Theta^i_\alpha = 0,$$

т. к. группой преобразований является $A(m)$; следовательно, линейная группа изотропии пространства $L_p\left(n, A(m)\right)$ $(p+m>n)$ определяется следующей системой:

$$\begin{aligned} dx_i^\alpha &= -x_k^\alpha \Theta_i^k - x_\eta^\alpha \Theta_i^\eta + x_i^\beta \Theta_\beta^\alpha, \\ dx_\xi^\alpha &= \qquad\qquad -x_\eta^\alpha \Theta_\xi^\eta + x_\xi^\beta \Theta_\beta^\alpha, \end{aligned} \tag{10a}$$

где

$$\begin{aligned} D\Theta_i^k &= [\Theta_i^j \Theta_j^k], \\ D\Theta_i^\xi &= [\Theta_i^j \Theta_j^\xi] + [\Theta_i^\eta \Theta_\eta^\xi], \\ D\Theta_\zeta^\xi &= [\Theta_\zeta^\eta \Theta_\eta^\xi], \\ D\Theta_\beta^\alpha &= [\Theta_\beta^\gamma \Theta_\gamma^\alpha], \end{aligned}$$

или в векторной записи:

$$\begin{aligned} de_\alpha^i &= \quad \Theta_k^i e_\alpha^k \qquad\qquad + \Theta_\alpha^\beta e_\beta^i, \\ de_\alpha^\xi &= -\Theta_k^\xi e_\alpha^k - \Theta_\eta^\xi e_\alpha^\eta + \Theta_\alpha^\beta e_\beta^\xi. \end{aligned} \tag{10б}$$

Видим, что *линейная группа изотропии однородного пространства* $L_p(n, H)$ *в случае* $H \subset A(m)$ $(p+m>n)$ *приводима*. Рассматривая её действие в пространстве $L_N = \{e_\alpha^i, e_\beta^\xi\}$, получаем следующие результаты о существовании в $L_p(n, H)$ инвариантной финслеровой метрики.

В однородных пространствах $L_p\left(n, A(m)\right)$, $L_p\left(n, S_1(m)\right)$, $L_p\left(n, S_2(m)\right)$, $L_p\left(n, S_1(m) \cap S_2(m)\right)$ $(p+m>n)$ *инвариантная финслерова метрика невозможна*, ибо, как легко видеть, группа (10) при

$$\Theta_i^j = 0, \qquad \Theta_\xi^\xi + \Theta_\alpha^\alpha = 0$$

еще действует транзитивно. В частности, применяя эти результаты для случая $m=n-1$, получаем, что *однородное пространство q-мерных плоскостей r-мерного аффинного и также эквиаффинного пространства инвариантной финслеровой метрикой обладать не может.*

Однородное пространство $L_p\left(n, E_1(m)\right)$ $(p+m>n)$ *не обладает инвариантной финслеровой метрикой* по той же причине: при

$$\Theta_i^k + \Theta_k^i = 0$$

группа (10) действует транзитивно. Это очевидно в случаях „α“ $\geqslant$ „i“ + „ξ“ и „α“ $\leqslant$ „ξ“: в первом из них часть форм Θ_β^α можно выразить через все dx_i^α, dx_ξ^α (и через остальные формы Θ), во втором — часть форм Θ_i^η, Θ_ξ^η можно выразить через все dx_i^α, dx_ξ^β. Не столь тривиален оставшийся случай „ξ“ < „α“ < „i“ + „ξ“; здесь мы переходим к канонизированному реперу, и тогда транзитивность группы (10) становится очевидной. Приходится при этом разбирать два возможных подслучая: а) „ξ“ < „α“ < „i“ и б) „ξ“ < „α“, „i“ $\leqslant$ „α“ < „i“ + „ξ“. В первом из них канонизацией репера можно достичь того, чтобы координаты общей точки приняли следующие значения:

$$\begin{aligned} &\text{среди } x_i^\alpha \text{ лишь } x_{\hat s}^{p+\hat s} \neq 0, \\ &\text{среди } x_\xi^\alpha \text{ лишь } x_{„i“+s}^{p+s} \neq 0, \end{aligned} \tag{11a}$$

где $s=1, \ldots,$ „ξ“, $\hat s =$ „ξ“ $+1, \ldots,$ „α“. В подслучае б) координаты общей точки канонизацией приводятся к следующим:

$$\begin{aligned} &\text{среди } x_i^\alpha \text{ лишь } x_v^{p+„\xi“+v} \neq 0, \\ &\text{среди } x_\xi^\alpha \text{ лишь } x_{„i“+s}^{p+s} \neq 0, \end{aligned} \tag{11б}$$

где $s=1, \ldots,$ „ξ“, $v=1, \ldots,$ „α“—„ξ“. Легко видеть, что как в точке (11а), так и в точке (11б) из уравнений (10а) часть форм Θ может быть выражена через все dx_i^α, dx_ξ^β (и через остальные формы Θ).

В однородном пространстве $L_p\left(n,\ E_2(m)\right)$ $(p+m>n)$ *инвариантная финслерова метрика отсутствует* по другой причине: подгруппа

$$\Theta_\xi^\eta+\Theta_\eta^\xi=0, \quad \Theta_\alpha^\beta+\Theta_\beta^\alpha=0$$

группы (10) действует нетранзитивно, однако траектории оказываются поверхностями цилиндрического типа с плоскими образующими, параллельными инвариантному подпространству $\{e_\alpha^i\}$.

Действительно, касательная плоскость к траектории в точке $M(x_i^\alpha, x_\xi^\beta)$ натянута на точки $M+M_\eta^i$, $M+M_k^i$, $M+M_\eta^\xi$, $M+M_\alpha^\beta$, где

$$\begin{aligned} M_\eta^i &= -x_\eta^\alpha e_\alpha^i, \\ M_k^i &= -x_k^\alpha e_\alpha^i, \\ M_\eta^\xi &= -x_\eta^\alpha e_\alpha^\xi + x_\xi^\alpha e_\alpha^\eta \qquad (\eta<\xi), \\ M_\alpha^\beta &= x_i^\beta e_\alpha^i - x_i^\alpha e_\beta^i + x_\xi^\beta e_\alpha^\xi - x_\xi^\alpha e_\beta^\xi \qquad (\alpha<\beta). \end{aligned}$$

Поэтому если „ξ“+„i“$\geqslant$„α“ (т. е. $p\geqslant n-p$), то подпространство

$$\{M_\eta^i,\ M_k^i\}=\{e_\alpha^i\},$$

следовательно, при перемещении по траектории в направлении $\Theta_\xi^\eta=0$, $\Theta_\alpha^\beta=0$ касательная плоскость к траектории не меняется, а сами траектории являются семействами („i“$\cdot$„α“)-мерных плоскостей, параллельных инвариантному подпространству $\{e_\alpha^i\}$.

Если же „ξ“+„i“<„α“ (т. е. $p<n-p$), то канонизацией репера можно достичь того, чтобы координаты общей точки приняли следующие значения:

$$\text{среди } x_i^\alpha \text{ лишь } x_i^{p+i}\neq 0,$$
$$\text{среди } x_\xi^\alpha \text{ лишь } x_\xi^{p+\xi}\neq 0,$$

где обозначения индексов естественны: $\alpha=p+i$, $p+\xi$, $\hat{\alpha}$. Теперь нетрудно проверить, что плоская образующая траектории тоже параллельна инвариантному подпространству $\{e_\alpha^i\}$.

Переходим к наиболее интересному случаю: $H=E_1(m)\cap E_2(m)\,(p+m>n)$. Линейная группа изотропии однородного пространства $L_p\left(n,\ E_1(m)\cap E_2(m)\right)$ есть подгруппа группы (10), определяемая системой

$$\Theta_i^k+\Theta_k^i=0, \quad \Theta_\xi^\eta+\Theta_\eta^\xi=0, \quad \Theta_\alpha^\beta+\Theta_\beta^\alpha=0.$$

Касательная плоскость к траектории в точке $M(x_i^\alpha, x_\xi^\beta)$ натянута на $M+M_\eta^i$, $M+M_k^i$, $M+M_\eta^\xi$, $M+M_\beta^\alpha$, где

$$\begin{aligned} M_\eta^i &= -x_\eta^\alpha e_\alpha^i, \\ M_k^i &= -x_k^\alpha e_\alpha^i + x_i^\alpha e_\alpha^k \qquad (k<i), \\ M_\eta^\xi &= -x_\eta^\alpha e_\alpha^\xi + x_\xi^\alpha e_\alpha^\eta \qquad (\eta<\xi), \\ M_\alpha^\beta &= x_i^\beta e_\alpha^i - x_i^\alpha e_\beta^i + x_\xi^\beta e_\alpha^\xi - x_\xi^\alpha e_\beta^\xi \qquad (\alpha<\beta). \end{aligned} \tag{12}$$

Если „ξ“$\geqslant$„α“, то подпространство $\{M_\eta^i\}$ совпадает с инвариантным подпространством $\{e_\alpha^i\}$, поэтому при перемещении по траектории в направлении $\Theta_\xi^\eta=0$, $\Theta_\alpha^\beta=0$ касательная плоскость к траектории не меняется, и траектории суть семейства („i“·„α“)-мерных плоскостей, параллельных инвариантному подпространству $\{e^i_\alpha\}$.

Если „ξ“ < „α“, то положим $s=1, \ldots$, „ξ“, $\hat{s}=$ „ξ“ $+1, \ldots$, „α“. Получаем два существенно различных подслучая:

$$\text{а)}\quad „i“ \leqslant „\hat{s}“,\quad \text{т. е.}\quad p \leqslant \frac{1}{2} n;$$

$$\text{б)}\quad „i“ > „s“,\quad \text{т. е.}\quad p > \frac{1}{2} n.$$

Заметим, что в случае евклидова пространства ($m=n-1$) подслучай б) невозможен, поскольку тогда „i“ $=1$.

В подслучае а) канонизацией репера координаты общей точки (x^α_i, x^β_ξ) можно привести к следующим:

$$\begin{aligned} &\text{среди } x^\alpha_i \text{ лишь } x_i^{p+„\xi“+i} \neq 0, \\ &\text{среди } x^\alpha_\xi \text{ лишь } x^{p+s}_{„i“+s} \neq 0; \end{aligned} \tag{13}$$

теперь уже легко проверить, что траектория в окрестности точки (13) тангенциально невырождена.

Действительно, в точке (13) в силу формул (12) касательная плоскость к траектории параллельна подпространству, натянутому на

$$\begin{aligned} &\text{все } e^i_\alpha, \text{ кроме } e^i_{p+„\xi“+i}, \\ &\text{все } e^\xi_\beta, \text{ кроме } e^{„i“+s}_{p+s}, \end{aligned}$$

и имеет размерность этого подпространства. Если станем искать направление на траектории, при перемещении вдоль которого касательная плоскость не менялась бы, то для точки (13) это означает искать направление, чтобы при перемещении вдоль него в дифференциалах векторов (12) (ср. (9)) не появились векторы $e^i_{p+„\xi“+i}$, $e^{„i“+s}_{p+s}$; но это последнее требование накладывает на формы Θ такие условия, которые влекут за собой равенства $dx^\alpha_i=0$, $dx^\alpha_\xi=0$. Это и означает, что траектория тангенциально невырождена.

В подслучае б) координаты общей точки относительно канонизированного репера таковы:

$$\begin{aligned} &\text{среди } x^\alpha_i \text{ лишь } x_v^{p+„\xi“+v} \neq 0, \\ &\text{среди } x^\alpha_\xi \text{ лишь } x^{p+s}_{„i“+s} \neq 0, \end{aligned} \tag{14}$$

где u, $v=1, \ldots$, „$\hat{s}$“; $\hat{u}$, $\hat{v}=$ „$\hat{s}$“ $+1, \ldots$, „i“; поэтому при перемещении по траектории из точки (14) в направлении, удовлетворяющем условиям

$$\text{среди форм } \Theta \text{ лишь } \Theta^{\hat{v}}_{\hat{u}} \neq 0 \text{ и } \Theta^{\xi}_{\hat{u}} \neq 0,$$

и только в этом случае, касательная плоскость к траектории не меняется. Следовательно, траектория тангенциально вырождена, и плоская образующая в точке (14) параллельна подпространству $\{e^{\hat{v}}_{p+s}\}$. Выписывая формулы (10б) в нашем случае для векторов $e^{\hat{v}}_{p+s}$, имеем:

$$de^{\hat{v}}_{p+s} = -\Theta^{\hat{v}}_u e^u_{p+s} + \Theta^{p+\hat{t}}_{p+s} e^{\hat{v}}_{p+\hat{t}} + \ldots, \tag{15}$$

где не выписаны члены, содержащие лишь векторы $e^{\hat{v}}_{p+s}$. Из формул (15) видно, что плоские образующие траектории не параллельны, т. е. мы получили, между прочим, пример приводимого линейного представления, траектории которого тангенциально вырождены, но не являются ни семействами лучей, исходящих из центра пространства, ни семействами параллельных плоскостей. Тем не менее, из полученных траекторий не удается построить тангенциально невырожденную гиперповерхность, поскольку на любой траектории (M'), инфинитезимально близкой к данной траектории (M), найдется точка M'_0, в которой плоская образующая параллельна плоской образующей, проходящей через данную точку $M_0 \in (M)$.

Итак, мы имеем следующие результаты:

В однородном пространстве $L_p\left(n,\ E_1(m) \cap E_2(m)\right)$, $p+m>n$, *инвариантная финслерова метрика существует в случае*

$$\begin{cases} p+m-n<n-p, \\ p \leqslant \frac{1}{2}n; \end{cases}$$

в остальных же случаях такая метрика невозможна.

Эти результаты, примененные для случая $m=n-1$, означают, что *однородное пространство q-мерных плоскостей r-мерного евклидова пространства обладает инвариантной финслеровой метрикой лишь в случае*

$$q<\frac{1}{2}r.$$

Пример. Пусть $i=1,\ 2,\ 3$; $\xi=4$; $\alpha=5,\ 6$ (т. е. „ξ“ < „α“, „i“ > „$\hat{s}$“). Тогда $N=8$, размерность траектории 6, размерность плоских образующих 2. Траектория характеризуется инвариантами

$$f=(x_4^5)^2+(x_4^6)^2,$$

$$F=\begin{vmatrix} 1 \\ 4 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix}^2,$$

где

$$\begin{vmatrix} i \\ 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_i^5 & x_i^6 \\ x_4^5 & x_4^6 \end{vmatrix}.$$

Плоская образующая в точке $(x_i^\alpha,\ x_\xi^\beta)$ $\left(\text{предполагается, что } x_4^5 \neq 0 \text{ и } \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \end{vmatrix} \neq 0\right)$ параллельна следующим векторам:

$$\frac{\begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 \\ 4 \end{vmatrix}} e_5^1-e_5^2+\frac{x_4^6}{x_4^5}\left(\frac{\begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 \\ 4 \end{vmatrix}} e_6^1-e_6^2\right),$$

$$\frac{\begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 \\ 4 \end{vmatrix}} e_5^1-e_5^3+\frac{x_4^6}{x_4^5}\left(\frac{\begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 \\ 4 \end{vmatrix}} e_6^1-e_6^3\right).$$

Отсюда видно, что на соседней траектории найдется ∞^3 точек, в которых плоские образующие параллельны плоской образующей, проходящей через данную точку исходной траектории. Интересно отметить, что *в инвариантном подпространстве* $\{e_\alpha^i\}$ (т. е. в подпространстве $x_4^5=x_4^6=0$) наша *линейная группа изотропии индуцирует неприводимую группу преобразований.*

Случай II: $p+m=n$. Теперь можно считать, что

$$L_p=\{e_i\},\quad L_m=\{e_a\} \qquad (i,\ k=1,\ \ldots,\ p;\quad a,\ b=p+1,\ \ldots,\ n),$$

следовательно, в формулах (7) нужно поменять местами индексы типа a с индексами типа i и считать, что

$$\Theta_a^i=0, \quad \Theta_i^a=0;$$

формулы (7a) становятся следующими:

$$dx_i^a=-x_k^a\Theta_i^k+x_i^b\Theta_b^a. \tag{16a}$$

Теперь нетрудно видеть, что как в случае $H=E_1(m)$, т. е. при

$$\Theta_i^k+\Theta_k^i=0,$$

так и в случае $H=E_2(m)$, т. е. при

$$\Theta_a^b+\Theta_b^a=0,$$

группа (16a) действует транзитивно. В случае же $H=E_1(m)\cap E_2(m)$, т. е. при

$$\Theta_i^k+\Theta_k^i=0, \quad \Theta_a^b+\Theta_b^a=0,$$

группа (16a), очевидно, является подгруппой ортогональной группы. Следовательно, мы имеем следующие результаты:

Однородное пространство $L_p\Big(n,\ E_1(n-p)\cap E_2(n-p)\Big)$ *обладает инвариантной финслеровой метрикой, а в пространствах*

$$L_p\Big(n,\ S_1(n-p)\Big),\quad L_p\Big(n,\ S_2(n-p)\Big),\quad L_p\Big(n,\ E_1(n-p)\Big),\quad L_p\Big(n,\ E_2(n-p)\Big)$$

такая метрика невозможна.

В заключение искренне благодарю моего руководителя А. М. Васильева за постановку задачи и многочисленные ценные советы в ходе её решения.

Московский Государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
25.VI.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Lichnérowicz, Géométrie des groupes de transformations, Paris, 1958.
2. А. М. Васильев, Диссертация, МГУ, 1961.
3. Ж. Фарав, Курс локальной дифференциальной геометрии, ИЛ, М., 1960.
4. Г. Ф. Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Моск. матем. общества, 2 (1953), 275–382.

APIE INVARIANTINIŲ FINSLERIO METRIKŲ EGZISTENCIJĄ HOMOGENINĖSE ERDVĖSE

A. JONUŠAUSKAS

(Reziumė)

Darbe išnagrinėtas invariantinės Finslerio metrikos egzistencijos klausimas vienos homogeninių erdvių G/g klasės atveju, būtent, kai G yra grupės $GL(n, R)$ kažkoks pogrupis (tie pogrupiai nurodyti 3 darbo dalyje), o g – grupės G ir n-matės vektorinės erdvės p-mačio poerdvio stacionarinio pogrupio $h\subset GL(n, R)$ susikirtimas.

ÜBER DIE EXISTENZ VON INVARIANTEN FINSLERSCHEN METRIKEN IN HOMOGENEN RÄUMEN

A. JONUŠAUSKAS

(Zusammenfassung)

In der vorliegenden Arbeit wird die Frage nach der Existenz einer invarianten Finslerschen Metrik für eine gewisse Klasse von homogenen Räumen G/g untersucht, und zwar für den Fall, dass G eine gewisse Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $GL(n, R)$ (diese Untergruppen sind in Punkt 3 aufgezählt) und g der Durchschnitt von G mit der stationären Untergruppe $h \subset GL(n, R)$ eines p-dimensionalen Unterraumes des n-dimensionalen Vektorraumes ist.