V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1965

ИНДУКТИВНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ВОЗРАСТАЮЩИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КОММУТАТИВНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП. (I)

И. В. КАРКЛИНЬШ

В 1950 году Ж. Дъедонне и Л. Шварц [1] ввели и подробно исследовали индуктивные пределы возрастающих последовательностей полных метризуемых локально выпуклых пространств с гомеоморфными вложениями. Стимулом этих исследований послужили нужды теории обобщенных функций. Немного позднее Г. Кёте [2] ввел более общее понятие индуктивного предела возрастающей последовательности локально выпуклых пространств с непрерывными вложениями и дал признак его полноты. Дальнейшее развитие теория индуктивных пределов локально выпуклых пространств получила в работах А. Гротендика [3], [4], Ж. Себастьяна-и-Силва [5], Д. А. Райкова [6], [7], Б. М. Макарова [8], О. Г. Смолянова [9]. Недавно выяснилось, что многие факты этих теорий справедливы также для любых коммутативных топологических групп (и в частности, для не локально выпуклых топологических линейных пространств). В заметке автора [10] были сформулированы некоторые общие свойства групповых индуктивных пределов, свойства групповых индуктивных пределов с гомеоморфными вложениями и групповых индуктивных пределов с B-вложениями. В настоящей работе рассматриваются общие свойства групповых индуктивных пределов и изучаются групповые индуктивные пределы с геоморфными вложениями. Для экономии места при некоторых теоремах даются лишь краткие указания о методе доказательства.

Выражаю благодарность своему научному руководителю проф. Д. А. Райкову за внимание к моей работе и ценные советы.

1. Некоторые общие свойства групповых индуктивных пределов

Топологию t в группе G назовем *групповой топологией*, если отображение $(x, y) \to x-y$ $(x, y \in G)$ произведения $(G, t) \times (G, t)$ на (G, t) непрерывно.

Для дальнейшего принципиальное значение имеют следующие две теоремы*.

Теорема 1. Пусть $(G_\alpha, t_\alpha)_{\alpha \in A}$ — произвольное семейство топологических групп, G — группа и $\varphi_\alpha : G_\alpha \to G$ — представление $(\alpha \in A)$. Тогда среди тех

* Эти теоремы являются групповыми аналогами известных теорем Н. Бурбаки ([11] стр. 76–77, [12] стр. 82–83).

групповых топологий в G, при которых непрерывны все представления φ_α, существует сильнейшая топология t.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, (H, v) — топологическая группа и φ — представление G в H. $\varphi:(G, t)\to(H, v)$ непрерывно тогда и только тогда, когда $\varphi\circ\varphi_\alpha:(G_\alpha, t_\alpha)\to(H, v)$ непрерывно при любом $\alpha\in A$.

Определение 1. Пусть в группе G дана последовательность подгрупп $G_n\left(n\in N=\{1, 2, 3, \dots\}\right)$, причем $G_n\subset G_{n+1}$ и $\bigcup\limits_{n\in N} G_n = G$. Предположим, что каждая подгруппа G_n наделена групповой топологией t_n, и t_{n+1} индуцирует в G_n топологию, мажорируемую топологией t_n, т. е. тождественное отображение $\pi^n_{n+1}:(G_n, t_n)\to(G_{n+1}, t_{n+1})$ непрерывно при любом $n\in N$. При выполнении указанных условий, систему групп (G_n, t_n) и представлений $\pi^n_{n+1}(n\in N)$ назовем *каноническим прямым спектром* и обозначим $\{(G_n, t_n); \pi^n_{n+1}\}$ или сокращенно $\{(G_n, t_n)\}$. Сильнейшую среди тех групповых топологий в G, при которых непрерывны все тождественные отображения $\iota_n:(G_n, t_n)\to G$ $(n\in N)$ назовем *групповой индуктивной топологией*, порожденной прямым спектром $\{(G_n, t_n)\}$ (существование этой топологии следует из теоремы 1). Группу G, наделенную групповой индуктивной топологией t, назовем *групповым индуктивным пределом* последовательности топологических групп (G_n, t_n) и будем писать: $(G, t)=\varinjlim\{(G_n, t_n)\}$.

Сильнейшую среди всех топологий в G, при которых непрерывны все тождественные отображения $\iota_n:(G_n, t_n)\to G$ назовем *индуктивной топологией*, порожденной прямым спектром $\{(G_n, t_n)\}$.

Теорема 3. Пусть $(G, t)=\varinjlim\{(G_n, t_n)\}$ и $\mathfrak{W}_n$ — фундаментальная система симметричных окрестностей нуля в (G_n, t_n) $(n\in N)$. Тогда всевозможные множества вида $\bigcup\limits_{n\in N}\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} V_k$, где V_k пробегает $\mathfrak{W}_k$, образуют фундаментальную систему симметричных окрестностей нуля в (G, t).

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся, что множества вида $\bigcup\limits_{n\in N}\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} V_k$ образуют фундаментальную систему симметричных окрестностей нуля для некоторой групповой топологии t в G. Покажем, что t-групповая индуктивная топология, порожденная прямым спектром $\{(G_n, t_n)\}$. Действительно, все вложения $\iota_k:(G_k, t_k)\to(G, t)$ непрерывны, так как $\left(\bigcup\limits_{n\in N}\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} V_k\right)\cap G_k\supset V_k$. Пусть теперь t' — некоторая групповая топология в G, при которой непрерывны все $\iota_k:(G_k, t_k)\to(G, t')$. Докажем, что $t'\leqslant t$. В (G, t') рассмотрим произвольную окрестность нуля U и индукцией построим последовательность окрестностей нуля $U^k(k\in N)$ такую, что $U^1+U^1\subset U$ и $U^{k+1}+U^{k+1}\subset U^k(k\in N)$. Так как $U^k\cap G_k$ является окрестностью нуля в (G_k, t_k), то $\bigcup\limits_{n\in N}\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(U^k\cap G_k)$ — окрестность нуля в (G, t), причем она содержится в U. Теорема доказана.

Следствие. Множество $V\subset G$, содержащее нуль, является окрестностью нуля в $(G, t)=\varinjlim\{(G_n, t_n)\}$, тогда и только тогда, когда существует убывающая последовательность его подмножеств $V^n (n \in N)$, каждое из которых содержит нуль, и такая, что $V^1 + V^1 \subset V$, $V^{n+1} + V^{n+1} \subset V^n (n \in N)$, причем $V^n \cap G_n$ является окрестностью нуля в (G_n, t_n) при любом $n \in N$.

Определение 2. Канонические прямые спектры $\{(G'_n, t'_n)\}$ и $\{(G''_n, t''_n)\}$, где G'_n и G''_n — подгруппы некоторой группы G, назовем *эквивалентными*, если для любого $m \in N$ существует такое $n \in N$, что 1° $G'_m \subset G''_n$, и тождественное отображение $(G'_m, t'_m) \to (G''_n, t''_n)$ непрерывно; 2° $G''_m \subset G'_n$, и тождественное отображение $(G''_m, t''_m) \to (G'_n, t'_n)$ непрерывно.

Оказывается, что групповые индуктивные пределы, порожденные эквивалентными прямыми спектрами, изоморфны как топологические группы. В частности, $\varinjlim \{(G_n, t_n)\}$ и $\varinjlim \{(G_{n_k}, t_{n_k})\}$ $(n_k < n_{k+1};\ k \in N)$ изоморфны.

По образцу определения 1 строится канонический прямой спектр локально выпуклых пространств (E_n, τ_n) $(n \in N)$. Сильнейшую среди локально выпуклых топологий в векторном пространстве $E = \bigcup_{n \in N} E_n$, при которых непрерывны все тождественные отображения $\iota_n : (E_n, \tau_n) \to E$, назовем *локально выпуклой индуктивной топологией*, порожденной прямым спектром $\{(E_n, \tau_n)\}$.

Аналогично определяется *линейная индуктивная топология*, порожденная каноническим прямым спектром топологических линейных пространств, если под *линейной топологией* подразумевать топологию топологического линейного пространства.

Теорема 4. Пусть $\{(E_n, \tau_n)\}$ — канонический прямой спектр локально выпуклых пространств (E_n, τ_n). Групповая индуктивная топология, линейная индуктивная топология и локально выпуклая индуктивная топология, порожденные прямым спектром $\{(E_n, \tau_n)\}$, совпадают.

В основе доказательства этой теоремы лежит теорема 3 и ее аналоги для линейных индуктивных пределов и локально выпуклых индуктивных пределов. Теорема 4 дает возможность использовать хорошо разработанную теорию локально выпуклых индуктивных пределов как богатый иллюстративный материал к теории групповых индуктивных пределов.

Определение 3. *Прямой суммой* последовательности групп $G_n (n \in N)$ называется подгруппа произведения $\prod_{n \in N} G_n$, образованная теми элементами, лишь конечное число координат которых отличны от нуля, и обозначается символом $\sum_{n \in N} G_n$. Отображение $\omega_k : G_k \to \sum_{n \in N} G_n$, ставящее в соответствие элементу $x_k \in G_k$ элемент $(y_n)_{n \in N} \in \sum_{n \in N} G_n$, где $y_k = x_k$ и $y_n = 0$, если $n \neq k$, называется *каноническим вложением* G_k в $\sum_{n \in N} G_n$. Пусть теперь каждая G_n наделена групповой топологией t_n. Группу $\sum_{n \in N} G_n$, наделенную сильнейшей групповой топологией, при которой непрерывны все канонические вложения $\omega_k : (G_k, t_k) \to \sum_{n \in N} G_n$, назовем *групповой прямой топологической суммой* последовательности топологических групп (G_n, t_n) и обозначим $\sum_N (G_n, t_n)$.

В следующих двух теоремах устанавливается связь между групповыми индуктивными пределами и групповыми прямыми топологическими суммами.

Теорема 5. Пусть (G_k, t_k) $(k\in N)$ — топологические группы. Если каждую группу $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} G_k$ $(n\in N)$ — отождествить (посредством канонического вложения) с подгруппой прямой суммы $\sum\limits_{n\in N} G_k$, то $\left\{\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(G_k, t_k)\right\}$ — канонический прямой спектр, и групповой индуктивный предел $\varinjlim\left\{\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(G_k, t_k)\right\}$ изоморфен групповой прямой топологической сумме $\sum\limits_{k\in N}(G_k, t_k)$.

Теорема 6. Пусть $\{(G_n, t_n)\}$ — канонический прямой спектр топологических групп (G_n, t_n) $(n\in N)$. Групповой индуктивный предел $\varinjlim\{(G_n, t_n)\}$ изоморфен (как тополигическая группа) факторгруппе $\sum\limits_{n\in N}(G_n, t_n)/K_\varphi$, где K_φ — ядро представления φ: $\sum\limits_{n\in N}(G_n, t_n)\to\varinjlim\{(G_n, t_n)\}$, определяемого формулой $\varphi\left(\sum\limits_n \omega_n x_n\right)=\sum\limits_n \iota_n x_n$, где $x_n\in G_n$.

В основе доказательства теоремы 6 лежит теорема 2.

Замечание. С. Каплан [13] ввел понятие предельной группы произвольного прямого спектра отделимых коммутативных топологических групп, определяя ее как факторгруппу „слабого произведения" этого семейства групп по некоторой замкнутой подгруппе. Из теоремы 6 следует, что для отделимых групповых индуктивных пределов, порожденных каноническими прямыми спектрами, определение 1 и определение С. Каплана равносильны.

Установим признак полноты групповых индуктивных пределов.

Теорема 7 (обобщение теоремы Г. Кёте [14], стр. 226). Пусть $(G, t)=\varinjlim\{(G_n, t_n)\}$ и $\mathfrak{W}$ — множество всевозможных симметрических окрестностей нуля в (G, t). Если $\mathfrak{F}$ — фильтр Коши в (G, t), то $\mathfrak{F}'=\mathfrak{F}+\mathfrak{W}$* является базисом фильтра Коши в (G, t), и существует такое $n\in N$, что $\mathfrak{F}'\cap G_n$ также является базисом фильтра Коши в (G, t).

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\mathfrak{F}'$ — базис фильтра Коши в (G, t). Поэтому, если существует такое $n\in N$, что

$$(F+W)\cap G_n\neq\varnothing \quad \text{для всех} \quad F\in\mathfrak{F} \quad \text{и всех} \quad W\in\mathfrak{W}, \tag{1}$$

то $\mathfrak{F}'\cap G_n$ — базис фильтра Коши в (G, t). Докажем существование такого $n\in N$, при котором выполняется (1). Предположим, что не существует индекса $n\in N$ с указанным свойством. Тогда для любого $n\in N$ существуют $F_n\in\mathfrak{F}$ и $W^n\in\mathfrak{W}$ такие, что

$$(F_n+W^n)\cap G_n=\varnothing \qquad (n\in N) \tag{2}$$

и

$$W^{n+1}+W^{n+1}+W^{n+1}+W^{n+1}\subset W^n \qquad (n\in N). \tag{3}$$

* Элементами $\mathfrak{F}'$ являются всевозможные множеста вида $F+W$, где $F\in\mathfrak{F}$, $W\in\mathfrak{W}$.

Введем следующие обозначения:

$$W_n^n = W^n \cap G_n, \quad S_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} W_k^k \qquad (n \in N), \tag{4}$$

$$V^n = W^{n+1} + W^{n+1} + S_n \qquad (n \in N), \tag{5}$$

$$U = \bigcup_{n \in N} S_n. \tag{6}$$

Ясно, что W_n^n — симметричная окрестность нуля в (G_n, t_n) и V^n, $U \in \mathfrak{W}$. Покажем, что для всех $m \in N$

$$U \subset V^m. \tag{7}$$

Фиксируем $m \in N$. Тогда (7) равносильно

$$S_n \subset V^m \qquad (n \in N). \tag{8}$$

Если $n \leqslant m$, то в силу (5) $S_n \subset V^m$. Пусть теперь $n = m+p$, где $p \in N$. Тогда

$$S_{m+p} = S_m + W_{m+1}^{m+1} + \sum_{m+2 \leqslant k \leqslant m+p} W_k^k \subset S_m + W^{m+1} + W^{m+1} = V^m,$$

так как ввиду (4) $W_k^k \subset W^k$ и в силу (3)

$$\sum_{m+2 \leqslant k \leqslant m+p} W_k^k \subset W^{m+1}.$$

Таким образом, (8) установлено. Далее, так как $\mathfrak{F}$ — фильтр Коши в (G, t) и U, $V^n \in \mathfrak{W}$, то существуют F, $F_n' \in \mathfrak{F}$ такие, что

$$F - F \subset U, \tag{9}$$

$$F_n' - F_n' \subset V^n \qquad (n \in N). \tag{10}$$

Для получения противоречия с исходным предположением покажем, что для некоторого p $F_p' \cap F = \varnothing$. Пусть $y \in F$. Так как $G = \bigcup_{n \in N} G_n$, то существует такое $p \in N$, что $y \in G_p$, и в силу (9) и (7) $F \subset y + U \subset G_p + V^p$. Докажем, что

$$(G_p + V^p) \cap F_p' = \varnothing. \tag{11}$$

Действительно, так как F_p', $F_p \in \mathfrak{F}$, то $F_p' \cap F_p \neq \varnothing$ и существует элемент x такой, что

$$x \in F_p' \cap F_p. \tag{12}$$

В силу (10) и (12) $F_p' \subset x + V^p$, и в силу (5), (3), (4) и (12) $F_p' + V^p \subset x + V^p + V^p = x + W^{p+1} + W^{p+1} + W^{p+1} + W^{p+1} + S_p + S_p \subset F_p + W^p + G_p$. Таким образом $F_p' + V^p \subset F_p + W^p + G_p$, и так как V^p симметрична и G_p — группа, то в силу (2) отсюда следует (11). Теорема доказана.

Следствие (обобщение теоремы Г. Кёте [14], стр. 227). Групповой индуктивный предел $(G, t) = \varinjlim \{(G_n, t_n)\}$ является полной группой тогда и только тогда, когда для любого $n \in N$ каждый базис фильтра Коши в (G, t), образованный множествами из G_n, сходится в (G, t).

2. Групповые индуктивные пределы топологических групп с гомеоморфными вложениями

Теорема 8. Пусть $\{(G_n, t_n); \pi^n_{n+1}\}$ — канонический прямой спектр и топология t_{n+1} индуцирует в G_n топологию t_n при любом $n \in N$, т. е. π^n_{n+1} — гомеоморфное вложение группы (G_n, t_n) в группу (G_{n+1}, t_{n+1}). Положим $(G, t) = \varinjlim \{(G_n, t_n)\}$. Тогда групповая индуктивная топология t индуцирует в каждой группе G_n ее первоначальную топологию t_n.

Как в доказательстве теоремы 8, так и в дальнейшем, мы используем следующую лемму ([15], стр. 25, И).

Лемма 1. Если G'' — группа, G' — ее подгруппа, M', M'' — подмножества группы G'', причем $M' \subset G'$, то $(M' + M'') \cap G' = M' + M'' \cap G'$.

Доказательство теоремы 8. По определению 1 t индуцирует в каждой G_n топологию t'_n, мажорируемую топологией t_n. Покажем, что верно и обратное: $t_n \leqslant t'_n$. Чтобы упростить обозначения, докажем это при $n = 1$. Пусть V_1 — произвольная окрестность нуля в (G_1, t_1). Методом индукции в (G, t) построим окрестность нуля U такую, что

$$U \cap G_1 \subset V_1. \tag{13}$$

По V_1 в (G_1, t_1) находим окрестность нуля V^1_1 такую, что

$$V^1_1 + V^1_1 \subset V_1. \tag{14}$$

Так как t_2 индуцирует в G_1 топологию t_1, то для V^1_1 в (G_2, t_2) существует окрестность нуля V^1_2 такая, что

$$V^1_2 \cap G_1 \subset V^1_1. \tag{15}$$

По V^1_2 в (G_2, t_2) построим последовательность окрестностей нуля V^{n+1}_2 $(n \in N)$, обладающую свойством:

$$V^{n+1}_2 + V^{n+1}_2 \subset V^n_2 \qquad (n \in N). \tag{16}$$

Вообще, если в (G_k, t_k) уже построена последовательность окрестностей нуля $V^n_k (n \in N)$, то в (G_{k+1}, t_{k+1}) выбираем окрестность нуля V^1_{k+1} так, что

$$V^1_{k+1} \cap G_k \subset V^k_k, \tag{17}$$

и строим в (G_{k+1}, t_{k+1}) последовательность окрестностей нуля $V^{n+1}_{k+1} (n \in N)$, обладающую свойством:

$$V^{n+1}_{k+1} + V^{n+1}_{k+1} \subset V^n_{k+1} \qquad (n \in N). \tag{18}$$

Оказывается, что в роли окрестности нуля U можно взять $U = \bigcup_{m \in N} S_m$, где $S_m = \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} V^k_k$. Вместо (13) достаточно установить включение

$$S_m \cap G_1 \subset V_1 \quad \text{для любого} \quad m \in N. \tag{19}$$

Так как $G_n \subset G_{n+1}$ $(n \in N)$, то

$$S_{m+1} \cap G_1 = S_{m+1} \cap G_m \cap G_{m-1} \cap \ldots \cap G_1. \tag{20}$$

В силу (18), $V^{m+1}_{m+1} \subset V^m_{m+1}$, поэтому

$$S_{m+1} \subset S_m + V^m_{m+1}. \tag{21}$$

Далее, в силу леммы 1, (18) и (17) для $k = 2, 3, \ldots$ имеем:

$$(S_k + V^k_{k+1}) \cap G_k = S_k + V^k_{k+1} \cap G_k \subset S_k + V^k_k \subset S_{k-1} + V^{k-1}_k. \tag{22}$$

Таким образом, из (20), (21), (22) леммы 1, (15) и (14) получаем:

$$S_{m+1} \cap G_1 \subset (S_m + V^m_{m+1}) \cap G_m \cap G_{m-1} \cap \ldots \cap G_1 \subset (S_{m-1} + V^{m-1}_m) \cap G_{m-1} \ldots$$
$$\ldots \cap G_1 \subset \ldots \subset (S_1 + V^1_2) \cap G_1 = S_1 + V^1_2 \cap G_1 \subset S_1 + V^1_1 = V^1_1 + V^1_1 \subset V_1.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 8 и, кроме того, все группы (G_n, t_n) отделимы. Тогда (G, t) также отделима.

Действительно, пусть $x \in G\setminus\{0\}$. Так как $G = \bigcup\limits_{n \in N} G_n$, то x содержится в некоторой G_n. Поскольку (G_n, t_n) отделима, в (G_n, t_n) существует окрестность нуля V_n такая, что

$$0 \notin x + V_n. \tag{23}$$

По теореме 8 t индуцирует в G_n топологию t_n, поэтому в (G, t) существует окрестность нуля U такая, что

$$U \cap G_n \subset V_n. \tag{24}$$

По лемме 1 и (24)

$$(x + U) \cap G_n = x + U \cap G_n \subset x + V_n. \tag{25}$$

В силу (23) и (25) $0 \notin (x + U) \cap G_n$, следовательно, $0 \notin x + U$.

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 8 и, кроме того, G_k замкнута в (G_{k+1}, t_{k+1}) при любом $k \in N$. Тогда G_k замкнута также в (G, t).

Доказательство. Сначала индукцией по n убеждаемся, что G_k замкнута в (G_{k+n}, t_{k+n}) при любом $n \in N$. Отсюда следует, что если $x \notin G_k$, то x не является точкой прикосновения множества G_k в (G, t). Действительно, x содержится в некоторой G_{k+n} и так как G_k замкнута в (G_{k+n}, t_{k+n}), то в (G_{k+n}, t_{k+n}) существует такая окрестность нуля V_{k+n}, что

$$(x + V_{k+n}) \cap G_k = \varnothing. \tag{26}$$

Из теоремы 8 следует существование такой окрестности нуля U в (G, t), что

$$U \cap G_{k+n} \subset V_{k+n}. \tag{27}$$

Так как последовательность (G_m) $(m \in N)$ возрастающая, то в силу леммы 1, (27) и (26) получим:

$$(x + U) \cap G_k = (x + U) \cap G_{k+n} \cap G_k = (x + U \cap G_{k+n}) \cap G_k \subset (x + V_{k+n}) \cap G_k = \varnothing.$$

Таким образом, G_k замкнута в (G, t).

Определение 4. Групповой индуктивный предел, порожденный каноническим прямым спектром $\{(G_n, t_n);\ \pi^n_{n+1}\}$ отделимых топологических групп (G_n, t_n) с гомеоморфными замкнутыми вложениями π^n_{n+1}, назовем *строгим групповым индуктивным пределом**.

Из предыдущего следует, что строгий групповой индуктивный предел $(G, t) = \varinjlim\{(G_n, t_n);\ \pi^n_{n+1}\}$ является отделимой группой, причем каждая (G_n, t_n) — замкнутая топологическая подгруппа группы (G, t). Отсюда, в силу следствия теоремы 7, строгий групповой индуктивный предел является полной группой тогда и только тогда, когда каждая группа (G_n, t_n) полна.

Легко проверить, что групповая прямая топологическая сумма последовательности отделимых групп изоморфна строгому групповому индуктивному пределу.

* В классе локально выпуклых пространств Н. Бурбаки ([12], стр. 88) под строгим индуктивным пределом понимает локально выпуклый индуктивный предел канонического прямого спектра с гомеоморфными вложениями.

Установим еще некоторые свойства строгих индуктивных пределов.

Теорема 9. Пусть $(G, t) = \varinjlim \{(G_n, t_n)\}$ – строгий групповой индуктивный предел. Множество $M \subset G$ предкомпактно в (G, t) тогда и только тогда, когда оно содержится и предкомпактно в некоторой группе (G_n, t_n).

Доказательство опирается на следующую лемму, которая вытекает из теоремы 32, [16], стр. 198.

Лемма 2. Пусть (x_m) – последовательность точек предкомпактного множества в топологической группе (G, t) и $F_n = \{x_m : m \geqslant n\}$. Тогда для любой окрестности нуля V в (G, t) существует $y \in G$ такое, что $(y+V) \cap F_n \neq \varnothing$ для всех $n \in N$.

Доказательство теоремы 7. Необходимость. Пусть M – предкомпактное множество в (G, t). В силу теоремы 8 достаточно показать, что M содержится в некоторой группе G_n. Предположим, что M не содержится ни в какой группе $G_n (n \in N)$. Так как $G_n \subset G_{n+1} (n \in N)$ и $\bigcup_{n \in N} G_n = G$, то существуют строго возрастающая последовательность натуральных чисел $n_m (m \in N)$ и последовательность точек (x_{m+1}) множества M такие, что $x_{m+1} \in G_{n_{m+1}} \backslash G_{n_m} (m \in N)$. Чтобы упростить обозначения, положим $G_{n_m} = H_m$, $t_{n_m} = v_m$. Тогда

$$x_{m+1} \in H_{m+1} \backslash H_m \qquad (m \in N), \tag{28}$$

и ясно, что $\{(H_m, v_m)\}$ также прямой спектр отделимых групп с гомеоморфными замкнутыми вложениями, причем $\varinjlim \{(H_m, v_m)\} = (G, t)$. Положим $F_n = \{x_k : k \geqslant n\}$, и индукцией построим окрестность нуля V в (G, t) такую, что для любого $y \in G$ существует $n(y) \in N$, удовлетворяющее условию: $(y+V) \cap F_{n(y)} = \varnothing$. В силу леммы 2 отсюда будет следовать, что предположение неверно, и множество M содержится в некоторой G_n. Переходим к построению. Так как H_1 замкнута в (H_2, v_2) и $x_2 \in H_2 \backslash H_1$ (28), то в (H_2, v_2) существует симметричная окрестность нуля V_2 такая, что $(V_2 + x_2) \cap H_1 = \varnothing$. Поэтому $x_2 \notin H_1 + V_2$. По V_2 в (H_2, v_2) находим такую окрестность нуля V_2', что $V_2' + V_2' \subset V_2$. Вообще, если уже выбрана окрестность нуля V_k' в (H_k, v_k), мы находим окрестность нуля V_{k+1} в (H_{k+1}, v_{k+1}), обладающую следующими свойствами:

$$x_{k+1} \notin H_k + V_{k+1}, \tag{29}$$

$$V_{k+1} \cap H_k \subset V_k' \qquad (k = 2, 3, \ldots). \tag{30}$$

Это можно сделать, так как H_k замкнута в (H_{k+1}, v_{k+1}), $x_{k+1} \in H_{k+1} \backslash H_k$ (28) и v_{k+1} индуцирует в H_k топологию v_k. Далее, по V_{k+1} в (H_{k+1}, v_{k+1}) находим окрестность нуля V_{k+1}' такую, что

$$V_{k+1}' + V_{k+1}' \subset V_{k+1} \qquad (\text{следовательно, } V_{k+1}' \subset V_{k+1}). \tag{31}$$

Положим

$$V = \bigcup_{n \in N} S_n', \qquad S_n' = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} V_{k+1}'. \tag{32}$$

Пусть $y \in G$. Так как $G = \bigcup_{n \in N} H_n$, то y содержится в некоторой H_p. Покажем, что

$$(y+V) \cap F_{p+1} = \varnothing. \tag{33}$$

Так как $y+V=\bigcup\limits_{n\in N}(y+S_n')$ и последовательность $(y+S_n')$ возрастающая, то (33) означает, что $(y+S_n')\cap F_{p+1}=\varnothing$ для любого $n>p$, а это равносильно

$$x_{m+1}\notin(y+S_n')\cap H_{m+1};\quad m=p,\ p+1,\ \ldots;\quad n>p, \tag{34}$$

поскольку $x_{m+1}\in H_{m+1}$. Установим (34) методом индукции. Пусть $m\geqslant n>p$. Ввиду (32) и (31) $(y+S_n')\cap H_{m+1}=y+S_n'\subset y+S_m'=y+S_{m-1}'+V_{m+1}'\subset y+S_{m-1}'+$ $+V_{m+1}$, т. е.

$$(y+S_n')\cap H_{m+1}\subset y+S_{m-1}'+V_{m+1}\qquad (m\geqslant n>p). \tag{35}$$

Теперь предположим, что

$$(y+S_n')\cap H_{k+1}\subset y+S_{k-1}'+V_{k+1}\qquad (k\geqslant p) \tag{36}$$

и докажем включение $(y+S_n')\cap H_k\subset y+S_{k-2}'+V_k$. Действительно, в силу (36), леммы 1, (30), (32) и (31) $(y+S_n')\cap H_k=(y+S_n')\cap H_{k+1}\cap H_k\subset(y+S_{k-1}'+$ $+V_{k+1})\cap H_k=y+S_{k-1}'+V_{k+1}\cap H_k\subset y+S_{k-1}'+V_k'\subset y+S_{k-2}'+V_k$. Таким образом, (36) имеет место для всех $k=p,\ p+1,\ \ldots$. Так как $y+S_{k-1}'+V_{k+1}\subset$ $\subset H_k+V_{k+1}\not\ni x_{k+1}$ (см. (29)), то из (36) следует (34), и доказательство первой части теоремы завершено.

Достаточность условия следует из непрерывности вложений $\iota_n:(G_n,t_n)\to(G,\ t)$.

Замечание. В доказательстве теоремы 9 отделимость групп $(G_n,\ t_n)$ $(n\in N)$ не используется.

Следствие 1. Множество $M\subset G$ бикомпактно в строгом групповом индуктивном пределе $(G,\ t)=\varinjlim\{(G_n,\ t_n)\}$ тогда и только тогда, когда оно содержится и бикомпактно в некоторой группе $(G_n,\ t_n)$.

Следствие 2. Последовательность точек сходится в строгом групповом индуктивном пределе $(G,\ t)=\varinjlim\{(G_n,\ t_n)\}$ тогда и только тогда, когда оно содержится и сходится в некоторой группе $(G_n,\ t_n)$.

Для строгих линейных индуктивных пределов теорему 9 можно усилить: в строгом линейном индуктивном пределе $(E,\ \tau)=\varinjlim\{(E_n,\ \tau_n)\}$ множество ограниченно тогда и только тогда, когда оно содержится и ограниченно в некотором топологическом линейном пространстве $(E_n,\ \tau_n)$.

Теорема 10 (обобщение теоремы Смолянова О. Г. [9]). Пусть $\{(G_n,t_n);\pi_{n+1}^n\}$ – канонический прямой спектр отделимых топологических групп $(G_n,\ t_n)$ с гомеоморфными вложениями π_{n+1}^n, причем последовательность (G_n) не стабилизируется. Пусть, далее, в каждой $(G_n,\ t_n)$ существует счетная фундаментальная система окрестностей нуля $V_n^k(k\in N)$, и любая V_n^k порождает G_n. Если в $(G_1,\ t_1)$ каждая V_1^k $(k\in N)$ содержит последовательность точек (a_m^k) $(m\in N)$, из которой нельзя выбрать никакую подпоследовательность, сходящуюся в какой-либо объемлющей группе $(G_n,\ t_n)$*, то в $G=\bigcup\limits_{n\in N}G_n$ групповая индуктивная топология t и индуктивная топология t', порожденные спектром $\{(G_n,\ t_n);\ \pi_{n+1}^n\}$, не совпадают. Другими словами, в $(G,\ t)$ существует незамкнутое множество M, след $M\cap G_n$ которого является замкнутым множеством в $(G_n,\ t_n)$ при любом $n\in N$.

* Это условие выполнено, например, если в $(G_1,\ t_1)$ существует фундаментальная система окрестностей нуля, образованная непредкомпактными множествами.

Доказательство. Можно считать, что $G_{n+1}\backslash G_n \neq \varnothing$ для всех $n \in N$. Сперва покажем, что в $G_{n+1}\backslash G_n$ содержится последовательность точек (b^m_{n+1}) $(m \in N)$, сходящаяся к нулю в $(G_{n+1},\ t_{n+1})$. Действительно, так как в $(G_{n+1},\ t_{n+1})$ существует убывающая счетная фундаментальная система окрестностей нуля V^m_{n+1} $(m \in N)$, то достаточно проверить, что $(G_{n+1}\backslash G_n) \cap \cap V^m_{n+1} \neq \varnothing$ при любом $m \in N$. Пусть $x \in G_{n+1}\backslash G_n$. Так как V^m_{n+1} порождает G_{n+1}, то x имеет вид: $x = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} y_i$, где $y_i \in V^m_{n+1}$. Отсюда следует, что по крайней мере одна точка y_i содержится в $G_{n+1}\backslash G_n$. Поэтому $(G_{n+1}\backslash G_n) \cap \cap V^m_{n+1} \neq \varnothing$, и в роли b^m_{n+1} можно взять любую точку этого множества.

Положим $M = \{ a^n_m + b^m_{n+1} : m,\ n \in N \}$, причем можно считать, что $a^n_m \neq 0$. Тогда $0 \notin M$, так как $a^n_m \in G_1 \backslash \{ 0 \}$ и $b^m_{n+1} \notin G_1 (m,\ n \in N)$. Покажем, что 0 — точка прикосновения множества M в $(G,\ t)$. Действительно, если V — произвольная окрестность нуля в $(G,\ t)$, то в каждой $(G_k,\ t_k)$ существует окрестность нуля U_k такая, что

$$\bigcup_{n \in N} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} U_k \subset V. \tag{37}$$

По U_1 находим $n_0 \in N$ такое, что $V^{n_0}_1 \subset U_1$, следовательно,

$$a^{n_0}_m \in U_1 \quad \text{для всех} \quad m \in N. \tag{38}$$

Так как последовательность $(b^m_{n_0+1})$ $(m \in N)$ сходится к нулю в $(G_{n_0+1},\ t_{n_0+1})$, то существует $m_0 \in N$ такое, что

$$b^{m_0}_{n_0+1} \in U_{n_0+1}. \tag{39}$$

В силу (38), (39) и (37) $a^{n_0}_{m_0} + b^{m_0}_{n_0+1} \in V$, значит, $M \cap V \neq \varnothing$. Таким образом, множество M незамкнуто в $(G,\ t)$. Теперь покажем, что $M \cap G_{k+1}$ замкнуто в $(G_{k+1},\ t_{k+1})$ $(k \in N)$. Так как $M \cap G_{k+1} = \bigcup\limits_{1 \leqslant n \leqslant k} \{ a^n_m + b^m_{n+1} : m \in N \}$, то достаточно доказать, что каждое множество $M_n = \{ a^n_m + b^m_{n+1} : m \in N \}$ замкнуто в $(G_{k+1},\ t_{k+1})$. Мы воспользуемся тем, что в $(G_{k+1},\ t_{k+1})$ существует счетная фундаментальная система окрестностей нуля и что $(G_{k+1},\ t_{k+1})$ отделима. Пусть (x_i) $(i \in N)$ — последовательность точек множества M_n, сходящаяся в $(G_{k+1},\ t_{k+1})$. Если множество точек последовательности (x_i) конечное, то (x_i) — стационарная последовательность, и, следовательно, сходится к некоторой точке множества M_n. Покажем, что множество точек последовательности (x_i) не может быть бесконечным. Действительно, в противном случае (x_i) содержала бы подпоследовательность вида $(a^n_{m_p} + b^{m_p}_{n+1})$ $(p \in N)$; $m_p < m_{p+1}$, причем $b^{m_p}_{n+1} \to 0$ в $(G_{k+1},\ t_{k+1})$. Так как (x_i) сходится в $(G_{k+1},\ t_{k+1})$, то сходится также последовательность $(a^n_{m_p})$ $(p \in N)$, что противоречит условию теоремы. Таким образом, M_n замкнуто в $(G_{k+1},\ t_{k+1})$.

Следствие (Смолянов О. Г. [9]). Пусть $\{ (E_n,\ \tau_n);\ \pi^n_{n+1} \}$ канонический прямой спектр отделимых топологических линейных пространств $(E_n,\ \tau_n)$ с гомеоморфными вложениями π^n_{n+1}, причем последовательность (E_n) не стабилизируется. Если в каждом $(E_n,\ \tau_n)$ существует счетная фундаментальная система окрестностей нуля и E_n бесконечномерно, то линейная индуктивная топология и индуктивная топология, порожденные спектром $\{ (E_n,\ \tau_n);\ \pi^n_{n+1} \}$ не совпадают.

Латвийский Государственный
университет им. П. Стучки

Поступило в редакцию
22.IV.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Dieudonné et L. Schwartz, La dualité dans les espaces (*F*) et (*LF*). Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **1** (1950), 61–101; Сборн. переводов, Математика, **2**, 2 (1958), 77–107.
2. G. Köthe, Über die Vollständigkeit einer Klasse lokalkonvexer Räume, Math. Zeitschrift, **52** (1950), 627—630.
3. A. Grothendieck, Sur les espaces (*F*) et (*DF*), Summa Brasiliensis Mathematicae, **3**, 6 (1954), 57–123; Сборн. переводов, Математика, **2**, 3 (1958), 81–127.
4. A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Memoirs of the American Mathematical Society, **16** (1955).
5. J. Sebastião e Silva, Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni, Rendic. di matem. e delle sue applicazioni, Roma (5) **14** (1955), 338–410.
6. Д. А. Райков, О двух классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях, Труды семинара по функциональному анализу при Воронежском ун-те, вып. V (1957), 22–34.
7. Д. А. Райков, Вполне непрерывные спектры локально выпуклых пространств, Труды Моск. Мат. общ-ва, **7** (1958), 413–438.
8. Б. М. Макаров, О некоторых паталогических свойствах индуктивных пределов *B*-пространств, УМН, **18**, 3 (1963), 171–178.
9. О. Г. Смолянов, Вестник МГУ (в печати).
10. И. В. Карклиньш, Индуктивные пределы последовательностей коммутативных топологических групп, Труды IV Всесоюзной топологической конференции (в печати).
11. Н. Бурбаки, Общая топология, гл. I–III, М., 1958.
12. Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, М., 1959.
13. S. Kaplan, Extensions of the Pontrjagin duality (II), Duke Math. Journ., **17**, 4 (1950), 419–435.
14. G. Köthe, Topologische lineare Räume, I, Berlin, 1960.
15. Д. А. Райков, Векторные пространства, М., 1962.
16. J. L. Kelley, General topology, New York, 1955.

KOMUTATYVINIŲ TOPOLOGINIŲ GRUPIŲ DIDĖJANČIŲ SEKŲ INDUKTYVINĖS RIBOS. (I)

J. KARKLINŠ

(Reziumė)

Šiame darbe smulkiau išdėstomi autoriaus straipsnio [10] pirmų trijų dalių rezultatai, o taip pat įrodomi kai kurie nauji faktai.

Tyrimo objektas yra ši sąvoka. Sakysime, kad komutatyvinė grupė G yra didėjančių pogrupių G_n ($n \in N = \{1, 2, \dots\}$) sekos, t. y. $G_n \subset G_{n+1}$ ir $\bigcup_{n \in N} G_n = G$, suma, be to, kiekviename pogrupyje G_n duota grupinė topologija* t_n ir tapatingas atvaizdavimas $\pi^n_{n+1}: (G_n, t_n) \to (G_{n+1}, t_{n+1})$ tolydinis kiekvienam $n \in N$. Galiojant nurodytoms sąlygoms, grupių (G_n, t_n) ir atvaizdavimų π^n_{n+1} ($n \in N$) sistemas vadinsime kanoniniu tiesioginiu spektru ir žymėsime $\{(G_n, t_n); \pi^n_{n+1}\}$. Stipriausią iš tų grupių topologijų grupėje G, kurioms yra tolydiniai tapatingi atvaizdavimai $\iota_n: (G_n, t_n) \to G$ ($n \in N$), vadinsime grupine induktyvine topologija t, generuota tiesioginiu spektru $\{(G_n, t_n); \pi^n_{n+1}\}$ (tokios topologijos buvimas lengvai įrodomas). Grupę G su duota topologija t vadinsime topologinių grupių (G_n, t_n) sekos grupine induktyvine riba.

* Grupinę topologiją mes vadinsime topologinės grupės topologija.

Pasirodo, kad didesnę dalį lokaliai iškilių induktyvinių ribų, t. y. induktyvinių ribų lokaliai iškilių topologinių tiesinių erdvių klasėje savybių galima pernešti grupinėms induktyvinėms riboms. Taip pat nustatoma, kad lokaliai iškila induktyvinė topologija, generuota lokaliai iškilios topologinės tiesinės erdvės, tiesioginiu spektru sutampa su grupine induktyvine topologija, generuota šiuo spektru.

INDUCTIVE LIMITS OF INCREASING SEQUENCES OF COMMUTATIVE TOPOLOGICAL GROUPS. (I)

I. V. KARKLINSH

(Summary)

This work gives in greater detail the results contained in parts I, II, III of [10] and besides that some new facts are proved.

The object of the investigation is the following concept. Let a commutative group G be a union of the increasing sequence of subgroups G_n ($n \in N=\{1, 2, 3, \dots\}$) i. e. $G_n \subset G_{n+1}$ and $\bigcup_{n \in N} G_n = G$ each subgroup G_n being equipped with the group topology* t_n and identical mapping $\pi^n_{n+1}: (G_n, t_n) \to (G_{n+1}, t_{n+1})$ being continuous for any $n \in N$. Under these conditions we call the system of group (G_n, t_n) and homomorphisms π^n_{n+1} ($n \in N$) a canonical direct spectrum and denote it by $\{(G_n, t_n); \pi^n_{n+1}\}$. The finest of these group topologies in G in which all identical mappings $\iota_n: (G_n, t_n) \to G$ ($n \in N$) are continuous will be called a group inductive topology t generated by the direct spectrum $\{(G_n, t_n); \pi^n_{n+1}\}$ (the existence of such a topology can be easily established).

The group G with topology t will be called the group inductive limit of the sequence of topological groups (G_n, t_n).

It happens that a great part of the known properties of local convex inductive limits (i. e. inductive limits in a class of local convex topological linear spaces) is transferred to the group inductive limits. It is established also that a local convex inductive topology generated by the canonical direct spectrum of local convex topological linear spaces coincides with a group inductive topology generated by this spectrum.

---

* We call the group topology the topology of a topological group.