V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1965

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ

Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК

§ 1. Некоторые свойства L-операторов

В настоящей работе изучается интегральный оператор вида

$$P[y(z)]=Py=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_z} y(t)\,\omega\left(\frac{z}{t}\right)\frac{dt}{t^2}, \tag{1.1}$$

где $y(t)$ – аналитическая функция; $\omega(x)$ – функция, аналитическая в области $|x-1|>0$, имеющая на бесконечности нуль не ниже второго порядка; C_z – любая спрямляемая замкнутая жорданова кривая, окружающая точку z и лежащая вместе со своей внутренностью* в области аналитичности функции y.

Этот оператор нашел применение[1] при решении вопроса, поставленного А. Ф. Леонтьевым: найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы оператор обобщенной производной в смысле А. О. Гельфонда – А. Ф. Леонтьева[2] был применим к любой аналитической функции в каждой её точке аналитичности.

Оператор (1.1) можно представить еще в такой форме:

$$Py=\frac{1}{2\pi i z^2}\int_{C_z}\omega_1\left(\frac{z}{t}\right)y(t)\,dt, \tag{1.2}$$

где функция $\omega_1(x)=x^2\omega(x)$ аналитична в области $|x-1|>0$.

Приведем некоторые сведения об операторах (1.1), доказанные в работе[1].

1. Функция $\omega(x)$ допускает представление

$$\omega(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\psi(n+1)\,x^n, \tag{1.3}$$

в котором $\psi(z)$ – некоторая функция из класса $[1, 0]$ такая, что $\psi(0)=0$.

Оператор вида (1.1), удовлетворяющий указанным выше условиям, назван в[1] L_1-оператором (в дальнейшем мы будем называть его просто L-оператором). Если, вдобавок, целая функция $\psi(z)$ из $[1, 0]$ такова, что $\psi(0)=0$, но $\psi(n)\neq 0$ при $n=1, 2, \ldots$, то соответствующий L-оператор называется L_0-оператором.

---

* Под внутренностью C_z мы понимаем здесь часть плоскости, которая ограничена кривой C_z и содержит точку z.

2. Каждый L-оператор Py и все его степени $P^k y = P(p^{k-1}y)$ могут быть представлены в виде дифференциальных операторов бесконечного порядка:

$$P^m y = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\Delta_{k,m}}{k!} z^{k-m} y^{(k)}(z), \qquad m \geqslant 1, \tag{1.4}$$

где числа $\Delta_{k,m}$ определяются из разложения в ряд Ньютона функции $\varphi_m(z) = \psi(z)\psi(z-1)\ldots\psi(z-m+1)$:

$$\varphi_m(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\Delta_{k,m}}{k!} z(z-1)\ldots(z-k+1).$$

При этом $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\Delta_{k,m}|} = 0$ при любом фиксированном $m \geqslant 1$, и ряд (1.4) равномерно сходится в окрестности любой точки (конечной или нет) аналитичности функции $y(z)$. Представление (1.4) довольно удобно для изучения свойств операторов $P^m y$. Пусть, например, $y(x)$ аналитична на бесконечности: $y(x) = y(\infty) + \frac{y'(\infty)}{x} + \frac{y_2}{x^2} + \ldots$ Подставляя это разложение в (1.4), без труда получаем, что в области $|x| > R P^m y(x) = b_m(x) x^{-m-1}$, где $b_m(x)$ аналитична в этой области и

$$b_m(\infty) = y'(\infty) \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\Delta_{k,m}}{k!} (-1)^k k! = y'(\infty)\psi(-1)\psi(-2)\psi(-m).$$

Остюда в частности следует, что если $y(x)$ аналитична в области I (конечной или нет), а $Q(x)$ – произвольный многочлен степени $\leqslant m+1$, то функция $Q(x)P^m y(x)$, также аналитична во всей области I.

Заметим еще, что если $\psi(x) \equiv x$, то $Py \equiv y'$, а в случае, когда $\psi(x) = \sum_{l=1}^{p} c_l x^l$, $p > 1$, получаем оператор, изученный А. Ф. Леонтьевым.

3. Если функция $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n$ – аналитична в начале координат, то L-оператор Py можно представить в форме

$$Py = \sum_{n=0}^{\infty} \psi(n+1) y_{n+1} z^n. \tag{1.5}$$

В заключение отметим, что, как в работе(1), мы условимся понимать под аналитической в области G функцией функцию, аналитическую и однозначную в этой области.

§ 2. Оценка степеней L-операторов

1. Предположим, что $y(x)$ аналитична в круге K: $|z-z_0| \leqslant R$. Будем считать сначала, что $z_0 \neq 0$ и $R < |z_0| = x_0$. Пусть δ – произвольное число из интервала $(0, R)$; z – любая точка окружности C: $|z-z_0| = \delta$. Тогда

$$Py = \frac{1}{2\pi i z^2} \int_{C_z} \omega_1\left(\frac{z}{\tau}\right) y(\tau)\, d\tau, \tag{2.1}$$

где в качестве контура C_z взята окружность $|z-\tau| = h|\tau|$ с центром в точке $z_c = \frac{z}{1-h^2}$ и радиусом $\frac{|z|h}{1-h^2}$. Положительное достаточно малое число h будет надлежащим образом выбрано ниже; пока мы предполагаем, что $(x_0+\delta)<(R+x_0)(1-h)$ (это неравенство обеспечивает включение окружности C_z в круг K: если τ лежит на C_z, то

$$|\tau-z_0|\leqslant|\tau-z_c|+|z_c-z|+|z-z_0|\leqslant\frac{h|z|}{1-h^2}+\frac{h^2|z|}{1-h^2}+\delta\leqslant\delta+\frac{h}{1-h}(x_0+\delta)<R\Big).$$

Условимся в дальнейшем через $M(f, I)$ обозначать максимум модуля функции f в замкнутой области I; кроме того, для двух специальных областей I: внутренности круга $|z-z_0|\leqslant r$ и внешности $|z-z_0|>r$ будем использовать соответственно символы $M(f, z_0, r)$ и $M(f, z_0, \underline{r})$. Тогда из (2.1)

$$M(Py,\ z_0,\ \delta)\leqslant\frac{A(h)\,h}{(x_0-\delta)(1-h^2)}M\left(y,\ z_0,\ \delta+\frac{(x_0+\delta)\,h}{1-h}\right),$$

$$A(h)=M(\omega_1,\ 1,\ \underline{h}),$$

или

$$M(Py,\ z_0,\ \delta)\leqslant\frac{B(h)}{x_0-\delta}M\left(y,\ z_0,\ \frac{x_0+\delta}{1-h}-x_0\right). \tag{2.2}$$

Предположим, что число h таково, что $(x_0+\delta)<(x_0+R)\,(1-h)^2$. Тогда, если положить $\delta_1=\frac{x_0+\delta}{1-h}-x_0$, то $(x_0+\delta_1)<(x_0+R)(1-h)$, и можно воспользоваться оценкой (2.2), заменив y на Py

$$M(P^2y,\ z_0,\ \delta)\leqslant\frac{B_h}{(x_0-\delta)}M\left(Py,\ z_0,\ \frac{x_0+\delta}{1-h}-x_0\right).$$

Учитывая неравенство для h, можно еще раз воспользоваться оценкой (2.2), заменив δ на δ_1. В результате получим

$$M(P^2y,\ z_0,\ \delta)\leqslant\frac{B^2}{(x_0-\delta)\left(2x_0-\frac{x_0+\delta}{1-h}\right)}M\left[y,\ z_0,\ -x_0+\frac{1}{(1-h)}\left(x_0+\frac{x_0+\delta}{1-h}-x_0\right)\right]=$$

$$=\frac{(B)^2}{(x_0-\delta)\left(2x_0-\frac{x_0+\delta}{1-h}\right)}M\left(y,\ z_0,\ -x_0+\frac{x_0+\delta}{(1-h)^2}\right),\qquad B=B(h).$$

Предположим теперь, действуя по индукции, что для любого δ из интервала $(0, R)$ и для всех h таких, что $(x_0+\delta)<(R+x_0)(1-h)^{n-1}$ справедлива оценка

$$M(P^{n-1}y,\ z_0,\ \delta)\prod_{k=0}^{n-2}\left[2x_0-\frac{x_0+\delta}{(1-h)^k}\right]\leqslant(B)^{n-1}M\left(y,\ z_0,\ \frac{x_0+\delta}{(1-h)^{n-1}}-x_0\right),\qquad n\geqslant3.$$

Тогда, если $(x_0+\delta)<(R+x_0)(1-h)^n$, то

$$M(P^ny,\ z_0,\ \delta)\leqslant\frac{B}{(x_0-\delta)}M\left(P^{n-1}y,\ z_0,\ \frac{x_0+\delta}{1-h}-x_0\right)\leqslant\frac{B^nM\left[y,\ z_0,\ \frac{x_0+\delta_1}{(1-h)^{n-1}}-x_0\right]}{(x_0-\delta)\prod_{k=0}^{n-2}\left[2x_0-\frac{x_0+\delta_1}{(1-h)^k}\right]},$$

где $\frac{x_0+\delta}{1-h}=x_0+\delta_1<(R+x_0)(1-h)^{n-1}$. Но

$$2x_0-\frac{x_0+\delta_1}{(1-h)^k}=2x_0-\frac{(x_0+\delta)}{(1-h)^{k+1}};\qquad\frac{x_0+\delta_1}{(1-h)^{n-1}}-x_0=\frac{x_0+\delta}{(1-h)^n}-x_0<R,$$

и

$$M(P^ny,\ z_0,\ \delta)\leqslant\frac{B^nM\left(y,\ z_0,\ \frac{x_0+\delta}{(1-h)^n}-x_0\right)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left[2x_0-\frac{x_0+\delta}{(1-h)^k}\right]},\qquad B=B(h)=\frac{hA(h)}{1-h^2} \tag{2.3}$$

для всех δ из $(0, R)$ и h таких, что $(x_0+\delta)<(R+x_0)(1-h)^n$. Положим $(R+x_0)(1-h_n)^n=x_0+\delta$. Тогда неравенство (2.3) справедливо при всех $h<h_n$. Перейдем в неравенстве (2.3) к пределу (при фиксированных y, n, z_0, δ) при $h\to h_n$; при этом левая часть неравенства от h не зависит, а все множители правой части — непрерывные функции от h. В пределе получим

$$M(P^n y,\ z_0,\ \delta)\leqslant\frac{(B_n)^n M(y,\ x_0,\ R)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left[2x_0-\frac{x_0+\delta}{(1-h_n)^k}\right]},\qquad B_n=B(h_n).$$

Учитывая, что $(1-h_n)^{-k}\leqslant(1-h_n)^{-n}$ при $k\leqslant n$, найдем

$$M(P^n y,\ z_0,\ \delta)\leqslant(x_0-R)^{-n}(B_n)^{-n}M(y,\ z_0,\ R), \tag{2.4}$$

откуда

$$[M(P^n y,\ z_0,\ \delta)]^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{B_n}{x_0-R}[M(y,\ z_0,\ R)]^{\frac{1}{n}}.$$

Но $1-h_n=(x_0+\delta)^{\frac{1}{n}}(R+x_0)^{-\frac{1}{n}}$; $\frac{h_n}{1-h_n^2}<\frac{h_n}{1-h_n}$. Поэтому

$$M(P^n y,\ z_0,\ \delta)\leqslant(x_0-R)^{-n}\frac{(x_0+R)}{(x_0+\delta)}\left[1-\left(\frac{x_0+\delta}{x_0+R}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^n\times$$

$$\times\left(M\left[\omega_1,\ 1,\ 1-\left(\frac{x_0+\delta}{x_0+R}\right)^{\frac{1}{n}}\right]\right)^n M(y,\ z_0,\ R),$$

или

$$M(P^n y,\ z_0,\ \delta)\leqslant\frac{(x_0+R)}{(x_0+\delta)}(x_0-R)^{-n}\lambda_n^n n^{-n}\left[M\left(\omega_1,\ 1,\ \frac{\lambda_n}{n}\right)\right]^n M(y,\ z_0,\ R), \tag{2.5}$$

где $\lambda_n=n\left[1-\left(\frac{x_0+\delta}{x_0+R}\right)^{\frac{1}{n}}\right]\to\ln\frac{x_0+R}{x_0+\delta}=\ln Q$ при фиксированных δ, x_0 и R таких, что $\delta<R<x_0=|z_0|$.

2. Рассмотрим теперь случай, когда $R>x_0$. Пусть $y(x)$ аналитична в круге $|x-z_0|<R$ и $R>x_0=|z_0|$. Возьмем любое δ из интервала $(x_0,\ R)$ и любую точку z на окружности C: $|z-z_0|=\delta$. Интегрируя, как и раньше, по окружности C_z и учитывая, что на C $|z|\geqslant|z-z_0|-|z_0|=\delta-x_0$, получим

$$M(P^n y,\ z_0,\ \delta)\leqslant\frac{B}{\delta-x_0}M\left(y,\ z_0,\ \delta+\frac{(x_0+\delta)h}{1-h}\right)=$$

$$=\frac{B}{\delta-x_0}M\left(y,\ z_0,\ \frac{x_0+\delta}{1-h}-x_0\right),\qquad x_0<\delta<R. \tag{2.6}$$

Пусть $\delta_1=\delta+\frac{(x_0+\delta)h}{1-h}$. Очевидно, что $\delta_1>\delta>x_0$ и, если $(x_0+\delta)<(R+x_0)\times\times(1-h)$, то $\delta_1<\delta+(R+x_0)h<R$.

Положив в (2.6) $y=Py$, найдем:

$$M(P^2 y,\ z_0,\ \delta)\leqslant\frac{B}{(\delta-x_0)}M(Py,\ z_0,\ \delta_1).$$

Но так как $x_0<\delta_1<R$, то величину $M(Py,\ z_0,\ \delta_1)$ можно опять оценить по формуле (2.6). В итоге получим

$$M(P^2 y,\ z_0,\ \delta)\leqslant\frac{B^2}{(\delta-x_0)(\delta_1-x_0)}M\left(y,\ z_0,\ \frac{x_0+\delta_1}{1-h}-x_0\right).$$

Легко проверить, что $\frac{x_0+\delta_1}{1-h}-x_0=\frac{x_0+\delta}{(1-h)^2}-x_0$. Кроме того, если $(x_0+\delta)<(R+x_0)(1-h)^2$, то $(x_0+\delta_1)<(R+x_0)(1-h)$. Для таких h

$$M(P^2y,\ z_0,\ \delta)\leqslant\frac{B^2}{(\delta+x_0-2x_0)\left(\frac{x_0+\delta}{1-h}-2x_0\right)}M\left(y,\ z_0,\ \frac{x_0+\delta}{(1-h)^2}-x_0\right),\quad x_0<\delta<R.$$

Рассуждая дальше по индукции точно так же, как в случае $x_0>R$, приходим к формуле

$$M(P^ny,\ z_0,\ \delta)\leqslant\frac{[B(h)]^n}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(\frac{x_0+\delta}{(1-h)^k}-2x_0\right)}M\left(y,\ z_0,\ \frac{x_0+\delta}{(1-h)^n}-x_0\right),\qquad(2.7)$$

справедливой для $x_0<\delta<R$ и h таких, что $(x_0+\delta)<(R+x_0)(1-h)^n$. Положив, как и выше, $x_0+\delta=(R+x_0)(1-h_n)^n$ и перейдя в неравенстве (2.7), справедливом для всех $h<h_n$, к пределу при $h\to h_n$ (и. фиксированных y, n, z_0, δ, R), получим

$$M(P^ny,\ z_0,\ \delta)\leqslant\frac{(B_n)^n}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left[\frac{x_0+\delta}{(1-h_n)^k}-2x_0\right]}M(y,\ z_0,\ R).$$

Но $\frac{x_0+\delta}{(1-h_n)^k}-2x_0\geqslant x_0+\delta-2x_0=\delta-x_0$, а $h_n=1-\left(\frac{x_0+\delta}{x_0+R}\right)^{\frac{1}{n}}$, $\frac{h_n}{1-h_n^2}<\frac{h_n}{1-h_n}$, и приходим к оценке

$$M(P^ny,\ z_0,\ \delta)\leqslant\frac{(R+x_0)}{(x_0+\delta)(\delta-x_0)^n}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^n\left[M\left(\omega_1,\ 1,\ \frac{\lambda_n}{n}\right)\right]^nM(y,\ z_0,\ R),\qquad(2.8)$$

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\ln Q,\qquad Q=\frac{x_0+R}{x_0+\delta},\qquad x_0<\delta<R.$$

Заметим, что в этом случае возможно, что $x_0=0$. Тогда

$$M(P^ny,\ 0,\ \delta)\leqslant R\delta^{-n-1}(\lambda_n)^nn^{-n}\left[M\left(\omega_1,\ 1,\ \frac{\lambda_n}{n}\right)\right]^nM(y,\ 0,\ R),$$

где $\lambda_n\to\ln\frac{R}{\delta}$.

3. Выведем некоторые следствия из оценок (2.5) и (2.8). Пусть $y(z)$, аналитична в области I и I_1 – любая её внутренняя (не обязательно конечная) область. Погрузим I_1 в конечно-связную область I_2, ограниченную контуром F, состоящим из конечного числа замкнутых жордановых спрямляемых кривых. Выберем еще область I_3 так, чтобы $\bar I_2\subset I_3\subset I$, $\bar I_3\subset I$. Обозначим через $\rho(z_0)$ расстояние до границы I_3 от произвольной точки z_0 на F. Если $\rho(z_0)\leqslant\frac{3}{2}|z_0|$, то положим $R(z_0)=\frac{\rho(z_0)}{2}$ и $\delta(z_0)=\frac{\rho(z_0)}{3}$; если же $\rho(z_0)>\frac{3}{2}|z_0|$, то примем $R(z_0)=\rho(z_0)$ и $\delta(z_0)=\frac{1}{2}[\rho(z_0)+|z_0|]$. Тогда при любых $n\geqslant1$ и $z_0\in F$, $|z_0|=x_0$,

$$M\left(P^ny,\ z_0,\ \delta(z_0)\right)\leqslant\frac{R(z_0)+x_0}{x_0+\delta(z_0)}\left[\frac{6\lambda_n(z_0)}{nh}\right]^n\left[M\left(\omega_1,\ 1,\ \frac{\lambda_n(z_0)}{n}\right)\right]^nM\left(y,\ z_0,\ R(z_0)\right),$$

где $h=\min\rho(z_0)$ по всем $z_0\in F$.

По лемме Гейне – Бореля выделим конечную совокупность кружков с центрами в $z_0\in F$ и радиусами $\delta(z_0)$, покрывающую контур F. Пусть

$z_1, z_2, \ldots, z_m$ — центры выделенной системы кружков и $\lambda_n = \min\limits_{1\le i\le m} \lambda_n(z_i)$, $\mu_n = \max\limits_{1\le i\le m} \lambda_n(z_i)$, $S=\frac{h}{6}$, $N=\max\limits_{1\le i\le m}\frac{R(z_i)+x_i}{x_i+\delta(z_i)}$. Тогда при любом $n\geqslant 1$

$$M(P^n y, \bar{I}_2) \leqslant N(S\mu_n)^n n^{-n}\left[M\left(\omega_1, 1, \frac{\lambda_n}{n}\right)\right]^n M(y, T),$$

где T — некоторая область $\bar{T}\subseteq \bar{I}_3 \subset I$. При этом $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\lambda_n \leqslant \min\limits_{1\le i\le m}\frac{x_i+R(z_i)}{x_i+\delta(z_i)} = Q_0$. Покажем, что на самом деле $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = Q_0$. Так как для любого фиксированного i,

$$1\leqslant i\leqslant m, \quad \lambda_n(z_i)\to \ln Q_i, \quad Q_i=\frac{x_i+R(z_i)}{x_i+\delta(z_i)},$$

то для $n>N_0$

$$\left|\lambda_n(z_i)-\frac{x_i+R(z_i)}{x_i+\delta(z_i)}\right|<\varepsilon, \qquad i=1, 2, \ldots, m.$$

Поэтому

$$\lambda_n(z_i) > \frac{x_i+R(z_i)}{x_i+\delta(z_i)}-\varepsilon, \quad \text{и} \quad \lambda_n \geqslant \min_{1\le i\le m}\frac{x_i+R(z_i)}{x_i+\delta(z_i)}-\varepsilon, \qquad n>N_0.$$

Следовательно, $\varliminf\limits_{n\to\infty}\lambda_n \geqslant Q_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = Q_0$. Аналогично, $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n = N$.

Итак, если $y(x)$ аналитична в область I, то для любой ее внутренней подобласти I_1, можно указать такую область I_4, что $\bar{I}_1\subset I_4\subset \bar{I}_4\subset I$ и при любом $n\geqslant 1$

$$M(P^n y, \bar{I}_1)\leqslant M(y, \bar{I}_4)\cdot E\cdot (H)^n\cdot n^{-n}\left[M\left(\omega_1, 1, \frac{\lambda_n}{n}\right)\right]^n, \tag{2.9}$$

где постоянные E и H не зависят от n и y (а только от области I_1), числа λ_n не зависят от y и $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = Q_0$ — число, зависящее только от области $I_1\subset I$.

Следствие. Для любого $n\geqslant 1$ и любой области I_1; $\bar{I}_1\subset I$, можно указать постоянную R_n и область I_2, $\bar{I}_1\subset I_2\subset \bar{I}_2\subset I$ такие, что

$$M(P^n y, \bar{I}_1)\leqslant R_n M(y, \bar{I}_2), \tag{2.10}$$

где I_2 не зависит от n и y, а R_n — от y.

4. При оценке степеней оператора P можно было воспользоваться его представлением не в виде (1.2), а в виде (1.1). В этом случае оценка производится точно так же, как выше для представления (1.1). Полученные при этом формулы имеют примерно такой же вид, как и (2.2)—(2.10). Например, если $R>x_0$, то неравенство (2.2) заменится следующим

$$M(Py, z_0, \delta)\leqslant \frac{\tilde{B}(h)}{x_0-\delta} M\left(y, z_0, \frac{x_0+\delta}{1-h}-x_0\right),$$

где

$$\tilde{B}(h)=\frac{h(1+h)^2}{1-h^2} M(\omega, 1, h).$$

Проводя буквально те же рассуждения, что и раньше, приходим в случае $R<x_0$ к неравенству

$$M(P^n y, z_0, \delta)\leqslant \frac{x_0+R}{(\delta+x_0)(x_0-R)^n}(\lambda_n)^n n^{-n}\left[M\left(\omega, 1, \frac{\lambda_n}{n}\right)\right]^n\left(1+\frac{\lambda_n}{n}\right)^n M(y, z_0, R),$$

заменяющему оценку (2.5). При этом, так как $\sup\limits_n \lambda_n<\infty$, то

$$\sup_n\left(1+\frac{\lambda_n}{n}\right)^{2n} = D<\infty,$$

и

$$M(P^n y,\ z_0,\ \delta) \leqslant \frac{D(x_0+R)}{(\delta+x_0)(x_0-R)^n}(\lambda_n)^n n^{-n}\left[M\left(\omega,\ 1,\ \frac{\lambda_n}{\underline{n}}\right)\right]^n M(y,\ z_0,\ R), \quad (2.11)$$

где D не зависит от n и y.

Аналогично, в случае $R > x_0$ получаем оценку $(x_0 < \delta < R)$:

$$M(P^n y,\ z_0,\ \delta) \leqslant \frac{D(x_0+R)(\lambda_n)^n}{(\delta-x_0)^n(x_0+\delta)} n^{-n}\left[M\left(\omega,\ 1,\ \frac{\lambda_n}{\underline{n}}\right)\right]^n M(y,\ z_0,\ R), \quad (2.12)$$

в которой величина D имеет то же значение, что и в предыдущем неравенстве.

Наконец, в неравенстве (2.9) вместо постоянной E появится другая постоянная E_1, также не зависящая от y и n, и, кроме того, функцию ω_1 надо заменить функцией ω.

§ 3. Связь между ростом функций ω и ψ

В полученных выше оценках для $P^n y$ участвуют величины $M(\omega_1,\ 1,\ \underline{d_n})$ и $M(\omega,\ 1,\ \underline{d_n})$, где $d_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому для практического использования этих оценок нужно знать порядок роста функций $\omega(z)$ и $\omega_1(z)$ при приближении z к единице. Кроме того, оператор Py часто дается в виде (1.5), и важно уметь оценить порядок возрастания ω и ω_1 при $z \to 1$ через порядок роста целой функции $\psi(z)$ (при $z \to \infty$). Введем функцию

$$\omega_2(z) = z\omega(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) z^n,$$

которая также является целой функцией от $\frac{1}{1-z}$. Очевидно, что

$$\lim_{z\to 1}\left|\frac{\omega(z)}{\omega_2(z)}\right| = \lim_{z\to 1}\left|\frac{\omega_1(z)}{\omega_2(z)}\right| = 1,$$

и для дальнейшего достаточно изучить характер возрастания одной любой функции из трех ω, ω_1, ω_2.

Пусть $a(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ — целая функция от $\frac{1}{1-z}: a(z) = I\left(\frac{1}{1-z}\right)$. По теореме Вигерта—Ло $a(z)$ будет целой функцией от $\frac{1}{1-z}$ тогда и только тогда, когда существует функция $h(z)$ из класса $[1,\ 0]$ такая, что $h(n) = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Функция $h(z)$ называется коэффициентной функцией (к.ф.)[4]-[5] для $a(z)$ (или, что всеравно, для I). В силу теоремы Карльсона[6], к.ф. определяется однозначно по функции $a(z)$: если $h(z)$ и $h_1(z) \in [1,\ 0]$ и

$$h_1(n) = h_2(n),\ n = 1,\ 2,\ \ldots,\quad \text{то}\quad h_1(z) = h_2(z).$$

В 1911 г. Фабер установил[7], что для того, чтобы $a(z)$ была целой функцией от $\frac{1}{1-z}$ минимального, нормального, максимального типа порядка ρ необходимо и достаточно, чтобы её к.ф. $h(z)$ была целой функцией соответственно минимального, нормального, максимального типа и порядка $\frac{\rho}{\rho+1}$. В 1929 г. А. О. Гельфонд[8], по-видимому, не зная о работе Фабера, доказал, что для того, чтобы $a(z)$ была целой функцией от $\frac{1}{1-z}$ порядка $\leqslant \rho$, необходимо и достаточно, чтобы $h(z)$ была порядка $\leqslant \frac{\rho}{\rho+1}$.

Несколько позднее, в работе, доложенной на II Всесоюзном Математическом съезде в 1932 г. и опубликованной в 1936 году[9], М. Г. Хапланов, не зная о работах Фабера и Гельфонда, установил этот же факт методом, отличным от метода А. О. Гельфонда и близким к методу Фабера. Следует отметить, что метод работы[9] позволяет получить гораздо больше, чем доказано в самой работе. Именно, установленная в ней связь между коэффициентами функций h и I позволяет оценить рост $I(z)$, какова бы ни была к.ф. $h(z)$ из класса $[1, 0]$.

Необходимо отметить также серию работ Маккинтайр и Вильсона[4]-[5] (1939–1961 г.г.), в которой, следуя Брайцеву[10], использовалось такое соотношение между $a(z)$ и целой функцией $f_1(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} h^{(n)}(0)\,z^{-n-1}$, ассоциированной к к. ф. h:

$$a(e^{-z})-f_1(z)=\lambda(z), \tag{3.1}$$

где функция $\lambda(z)$ аналитична в точке $z=0$.

Из этого соотношения нетрудно вывести[4]-[5] такое уточнение теоремы Фабера: если к.ф. $h(z)$ – целая функция порядка $r<1$ и типа $\sigma<\infty$, то $a(z)$ – целая функция от $\frac{1}{1-z}$ порядка r_1 и типа σ_1, причем $r_1=\frac{r}{1-r}$, $\sigma_1=\frac{1-r}{r}(r\sigma)^{\frac{1}{1-r}}$. Этот же результат можно получить методом работы[9].

Заметим, что в наших условиях функция $\psi(z)$, определяющая оператор Py, является коэффициентной функцией для $\omega_2(z)$. Поэтому, если $\psi(z)$ – целая функция роста не выше $[r, \sigma]$, где $r<1$, $\sigma<\infty$, то

$$\varlimsup_{h\to 0} h^{\frac{r}{1-r}} \ln M(\omega_1,\ 1,\ h) \leqslant \frac{1-r}{r}(r\sigma)^{\frac{1}{1-r}}. \tag{3.2}$$

Очевидно, что в неравенстве (3.2) функцию ω_2 можно заменить функцией ω или ω_1.

Случай, когда $\psi(z)$ – многочлен или трансцендентная целая функция нулевого порядка, также можно исследовать методами работ[4]-[5] или[9]. Мы используем здесь метод работы[9]. Приведем некоторые нужные нам результаты из этой работы (теоремы 1 и 2, гл. III).

Пусть $a(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – целая функция от $\frac{1}{1-z}: I\left(\frac{1}{1-z}\right)$, исчезающая на бесконечности: $a(z)=I\left(\frac{1}{1-z}\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{(1-z)^k}$. Положим $\frac{1}{1-z}=u=1+v$. Тогда $a(z)=I(u)=I(1+v)=R(v)$. Нетрудно видеть, что целые функции $I(v)$ и $R(v)$ имеют один и тот же порядок и тип; если одна из них является многочленом, то и вторая будет многочленом той же степени и с тем же старшим коэффициентом, что и первая.

Пусть $R(v)=B_0+B_1v+B_2v^2+\ldots$ Тогда функция, определяемая интерполяционным рядом $\psi(z)=B_1+(z-1)B_2+\frac{(z-1)(z-2)}{1\cdot 2}B_3+\ldots$ является к.ф. для a: $\psi(n)=a_n$, $n=0, 1, 2, \ldots$ Если функцию $\psi(z)$ развернуть в степенной ряд $\psi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, то между коэффициентами c_n и B_n существуют такие зависимости (при $n=0, 1, 2, \ldots$)

$$B_{n+1}=n!\,(c_n+A_n^{n+1}c_{n+1}+A_n^{n+2}c_{n+2}+\ldots);$$

$$c_n=\frac{B_{n+1}}{n!}-\frac{S_1^{n+1}}{(n+1)!}B_{n+2}+\frac{S_2^{n+2}}{(n+2)!}B_{n+3}-\ldots, \tag{3.3}$$

где A_k^n и S_k^n определенные положительные числа.

Из формул (3.3) следует, во-первых, такой результат: функция $R(v)$ является многочленом степени p: $R(v)=\sum_{k=0}^{p} B_k v^k$, $p\geqslant 1$, тогда и только тогда, когда функция $\psi(z)$ является многочленом степени $p-1$: $\psi(z)=\sum_{k=2}^{p-1} c_k z^k$; при этом $B_p=(p-1)!\,c_{p-1}$.

Если вернуться к нашим конкретным условиям, то функция $\psi(z)$ из [1, 0] является к.ф. для функции $\omega_2(z)=z\omega(z)$, очевидно, исчезающей на бесконечности. Мы получаем такое следствие: функция $\omega(z)$ имеет в точке $z=1$ полюс порядка $p\geqslant 2$, то-есть, представляется в виде $\omega(z)=\sum_{k=0}^{p}\frac{D_k}{(1-z)^k}$ тогда и только тогда, когда $\psi(z)$ является многочленом степени $p-1$, $\psi(z)=\sum_{l=1}^{p-1} c_l z^l$, причем $D_p=(p-1)!\,c_{p-1}$.

Вернемся теперь к формулам (3.3). Из произведенных в[9] оценок A_k^n и S_k^n следует такое соотношение (не выписанное явно, но фактически полученное там):

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!\,|c_n|}{|B_{n+1}|}}=1. \tag{3.4}$$

Последнее равенство позволяет устанавливать связь между ростом функций $\psi(z)$ и $R(z)$ при любой функции $\psi(z)$ из [1, 0]. Обозначим $M(g, 0, r)$ просто через $M(g, r)$ и предположим, что функция $\psi(z)$, определяющая данный L-оператор Py, растет так, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\ \ln M(\psi, r)\cdot(\ln r)^{-\alpha}=A<\infty \tag{3.5}$$

при некотором $\alpha>1$. Используя работу[11], или путем несложных прямых вычислений, получаем, что соотношение (3.5) эквивалентно равенству

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ |c_n|^{n^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}=\exp\frac{(1-\alpha)}{\alpha}(\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{3.6}$$

Но тогда на основании (3.4)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ |B_{n+1}|^{n^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ |c_n|^{n^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}=\exp\frac{1-\alpha}{\alpha}(\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}}\ \text{ и }\ \overline{\lim_{r\to\infty}}\ \ln M(R, r)(\ln r)^{-\alpha}=A.$$

Но так как $R(v)=I(1+v)$, то $M(R, r-1)\leqslant M(I, r)\leqslant M(R, r+1)$. Отсюда следует немедленно, что $A=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\ln M(R, r)(\ln r)^{-\alpha}=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\ln M(I, r)(\ln r)^{-\alpha}$. Если положить $a(z)=\omega_2(z)$, то мы приходим к такому результату.

Пусть $\psi(z)$ – целая функция нулевого порядка такая, что $\psi(0)=0$ и при некотором $\alpha>1$

$$B(\alpha,\ \psi)=\varlimsup_{r\to\infty}\ln M(\psi,\ r)(\ln r)^{-\alpha}=A<\infty.$$

Тогда

$$B_1(\alpha,\ \omega_2)=\varlimsup_{r\to\infty}(\ln r)^{-\alpha}\ln M\left(\omega_2,\ 1,\ \frac{1}{r}\right)=A.$$

Обратно, если при некотором $\alpha>1$ $B_1(\alpha,\ \omega_2)=A<\infty$, то к.ф. $\psi(z)$ будет целой функцией нулевого порядка такой, что

$$B(\alpha,\ \psi)=B_1(\alpha,\ \omega_2)=A.$$

Очевидно, что в полученном результате функцию $\omega_2(z)$ можно заменить функцией ω или ω_1.

§ 4. Некоторые вспомогательные результаты, необходимые для дальнейшего

Лемма 1. Если $\psi(z)$ – трансцендентная целая функция, $\alpha(r)=M(\psi,\ r)$, $\sup\limits_n T_n<\infty$, $T_n\geqslant 0$, и $c_1>c_2>0$, то,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(T_n)^n\left[\frac{\alpha\left(\frac{n}{c_1}\right)}{\alpha\left(\frac{n}{c_2}\right)}\right]^n<\infty.$$

Действительно, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha\left(\frac{n}{c_1}\right)}{\alpha\left(\frac{n}{c_2}\right)}=0^{(12)}$, то для $n>N$ $T_n\dfrac{\alpha\left(\frac{n}{c_1}\right)}{\alpha\left(\frac{n}{c_2}\right)}<\dfrac{1}{2}$, и ряд сходится.

Лемма 2. Пусть $d_i(r)$, $i=1,\ 2$ – монотонно и неограниченно возрастающие непрерывные функции от $r\,(r\geqslant 0)$ такие, что при любом $h<1$

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{d_i(hr)}{d_i(r)}\leqslant h,\qquad i=1,\ 2,\tag{4.2}$$

и, кроме того, $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{d_1(r)}{d_2(r)}=1$. Тогда, если $D_i(r)$ – обратные к $d_i(r)$ функции, $i=1,\ 2$, то $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{D_1(r)}{D_2(r)}=1$.

Доказательство. Покажем, что $\varliminf\limits_{r\to\infty}\dfrac{D_1(r)}{D_2(r)}\geqslant 1$. Если это неравенство не выполняется, то при некотором $q<1$ и $k=1,2,\ldots D_1(r_k)\leqslant qD_2(r_k)$, $r_{k+1}>r_k$, $r_k\to\infty$. Отсюда находим, что $r_k\leqslant d_1[qD_2(r_k)]\leqslant(q+\varepsilon)d_1[D_2(r_k)]\leqslant$ $\leqslant(q+2\varepsilon)d_2[D_2(r_k)]$, где $\varepsilon<\dfrac{1-q}{2}$, а $k\geqslant K_2(\varepsilon)$. При всех таких k $r_k\leqslant(q+2\varepsilon)r_k$, что невозможно. Итак, $\varliminf\limits_{r\to\infty}\dfrac{D_1(r)}{D_2(r)}\geqslant 1$. Но в силу равноправия функций D_1 и D_2 точно так же, поменяв местами D_1 и D_2, покажем, что $\varliminf\limits_{r\to\infty}\dfrac{D_2(r)}{D_1(r)}\geqslant 1$. Но тогда $\varlimsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{D_1(r)}{D_2(r)}=\left[\varliminf\limits_{r\to\infty}\dfrac{D_2(r)}{D_1(r)}\right]^{-1}\leqslant 1$, откуда $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{D_1(r)}{D_2(r)}=1$.

§ 5. Исследование оператора Dy в случае трансцендентной целой функции $\psi(z)$

Исследуем теперь оператор бесконечного порядка

$$Dy=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(z)P^n y(z), \tag{5.1}$$

где $\varphi_n(z)$ — целые функции, Py — L-оператор, порожденный трансцендентной целой функцией $\psi(z)$ из класса [1, 0], $\psi(0)=0$. Проведем сначала локальное исследование оператора Dy в окрестности какой-нибудь точки z_0. Обозначим через $a_n(\delta, z_0)$ величину $M[\varphi_n, z_0, \delta]$ и предположим, что функции $\varphi_n(z)$ таковы, что при любом δ из $(0, \infty)$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, nB\left(\frac{n}{\sqrt[n]{a_n(\delta, z_0)}}\right)\leqslant t<\infty. \tag{5.2}$$

В условии (5.2) $b(r)$ — функция, обратная к

$$\alpha(r)=M\left(\omega_1,\ 1,\ \frac{1}{r}\right);\qquad B(x)=\frac{1}{b(x)}.$$

Пусть $y(z)$ аналитична в замкнутом круге $|z-z_0|\leqslant d(t)|z_0|$, где $d(t)=e^t-1$, если $t\leqslant \ln 2$, и $d(t)=e^t$, если $t>\ln 2$. Постараемся оценить при любом натуральном $p\geqslant 0$ величину

$$R_p(z_0, \delta)=\sum_{n=p}^{\infty}a_n(\delta, z_0)M(P^n y,\ z_0,\ \delta),$$

где число $\delta>0$ достаточно мало и будет выбрано ниже.

1. Предположим сначала, что $z_0\neq 0$. Пусть $y(z)$ аналитична в круге $|z-z_0|\leqslant |z_0|e^t+h=R$, $h>0$. Возьмем точку $z_1=\frac{z_0}{2}$. Очевидно, что $y(z)$ аналитична в круге $|z-z_1|\leqslant R-|z_1|=R_1$, причем $R_1>|z_1|=x_1$. Положим $\delta_1=\frac{x_0}{2}+\eta$, где пока $0<\eta<h$. Тогда в силу оценки (2.8), обозначив коротко $a_n(\delta, z_0)$ через a_n, имеем

$$R_p(z_1, \delta_1)\leqslant\sum_{n=p}^{\infty}\frac{R_1+x_1}{x_1+\delta_1}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^n\frac{a_n}{(\delta_1-x_1)^n}\left[M\left(\omega_1,\ 1,\ \frac{\lambda_n}{n}\right)\right]^n M(y,\ z_1,\ R_1).$$

Обозначим через $K(A, r)$ множество точек круга $|z-A|\leqslant r$. Тогда, как легко проверить $K(z_0, \eta)\subset K(z_1, \delta_1)$ и $K(z_1, R_1)\subset K(z_0, R)$. Поэтому

$$R_p(z_0, \eta)\leqslant\sum_{n=p}^{\infty}a_n M(P^n y,\ z_1,\ \delta_1)=R_p(z_1, \delta_1)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{x_0e^t+h}{x_0+\eta}\sum_{n=p}^{\infty}a_n\left(\frac{\lambda_n}{n\eta}\right)^n\left[M\left(\omega_1,\ 1,\ \frac{\lambda_n}{n}\right)\right]^n M(y,\ z_0,\ R).$$

Пусть η выбрано так, что $\eta<he^{-t}$. Тогда

$$x_0e^t+h>e^t(x_0+\eta),\quad \text{и}\quad \ln(e^t x_0+h)-\ln(x_0+\eta)=t_1=t+3d,\quad d>0.$$

Но в силу (5.2) (при $\delta=\delta_1$), для $n>N=N(d, \delta_1)$,

$$n<(t+d)\,b\left(\frac{n}{\sqrt[n]{a_n}}\right),\quad\text{откуда}\quad \sqrt[n]{a_n}<\frac{n}{\alpha\left(\frac{n}{t+d}\right)},$$

и

$$a_n \leqslant B_1 n^n \left[\alpha\left(\frac{n}{t+d}\right)\right]^{-n}, \quad n \geqslant 1, \quad B_1 = B_1(d). \tag{5.3}$$

Кроме того, так как $\lambda_n \to t+3d$, то для $n \geqslant N_1$ $\lambda_n > t+2d$ и

$$\alpha\left(\frac{n}{\lambda_n}\right) < \alpha\left(\frac{n}{t+2d}\right), \quad n \geqslant N_1.$$

Отсюда уже для всех $n \geqslant 1$

$$\left[\alpha\left(\frac{n}{\lambda_n}\right)\right]^n \leqslant B_2 \left[\alpha\left(\frac{n}{t+2d}\right)\right]^n,$$

и по лемме 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n}{\eta}\right)^n \left[\frac{\alpha\left(\frac{n}{\lambda_n}\right)}{\alpha\left(\frac{n}{t+d}\right)}\right]^n < \infty.$$

Применять лемму 1 можно, так как если $\psi(z)$ – трансцендентная функция из $[1, 0]$, то, как это следует из теоремы Вигерта—Ло,

$$\omega_2(z) = H\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{(1-z)^k},$$

откуда

$$\omega_1(z) = z\omega_2(z) = \frac{z}{(1-z)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{(1-z)^{k-1}} = \left(\frac{1}{1-z} - 1\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{(1-z)^{k-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k}{(1-z)^k} = I\left(\frac{1}{1-z}\right),$$

и I – трансцендентная целая функция, если H является таковой; но тогда

$$\alpha(r) = M\left(\omega_1, 1, \frac{1}{r}\right) = M(I, r).$$

Таким образом

$$\sum_{n=p}^{\infty} M(\varphi_n, z_0, \delta)\, M(P^n y, z_0, \delta) \leqslant BR_p M(y, z_0, R), \tag{5.4}$$

где $R = e^t|z_0| + h$, $h > 0$, $\delta < e^{-t}h$. Как видно из процесса получения оценки)5.4), постоянная B не зависит от p и от функции y, а

$$R_p = \sum_{n=p}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n}{\delta}\right)^n \left[\frac{\alpha\left(\frac{n}{\lambda_n}\right)}{\alpha\left(\frac{n}{t+d}\right)}\right]^n,$$

R_p зависит от δ, z_0, R, p, но не зависит от y.

Для случая, когда $t < \ln 2$, такую же оценку можно получить, предполагая, что $y(z)$ аналитична не в круге $|z-z_0| \leqslant e^t|z_0|$, а в меньшем круге $|z-z_0| \leqslant x_0 d(t)$. В этом случае при достаточно малом $h > 0$ $y(z)$ аналитична в круге $|z-z_0| \leqslant x_0\left(d(t)+h\right) = R$. Можно всегда считать, что $h < 1 - d(t) = 2 - e^t$ (здесь и используется условие $t < \ln 2$); тогда $R < x_0$. Возьмем δ так, чтобы $\delta < R$ и $\delta < he^{-t}x_0$. По формуле (2.5)

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n(\delta, z_0)\, M[P^n y, z_0, \delta] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=p}^{\infty} a_n(\delta, z_0) \frac{x_0(e^t+h)}{(x_0+\delta)} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^n \frac{\left[\alpha\left(\frac{n}{\lambda_n}\right)\right]^n}{(2x_0 - x_0e^t - hx_0)^n} M(y, z_0, R),$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\ln x_0(e^t+h)-\ln(x_0+\delta)=t_1=t+3d,\ d>0$. Повторяя буквально только что проделанные выше выкладки, приходим к неравенству (5.4), где $R=x_0(e^t-1+h)$, $0<h<2-e^t$, $\delta<x_0he^{-t}$.

2. Рассмотрим теперь случай, когда $z_0=0$. Пусть $y(z)$ аналитична в круге $|z|\leqslant h$, где h – фиксированное положительное число, которое можно взять как угодно малым. Положим $R=h$ и возьмем любое δ из $(0, R)$. Тогда, в силу (2.8) (при $z_0=0$)

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n(\delta)\,M(P^ny,\ 0,\ \delta)\leqslant\frac{h}{\delta}\sum_{n=p}^{\infty}a_n(\delta)\left(\frac{\lambda_n}{n\delta}\right)^n\left[\alpha\left(\frac{n}{\lambda_n}\right)\right]^n M(y,\ 0,\ h),$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\ln\frac{h}{\delta}$. Выберем $\delta<he^{-t}$; тогда при достаточно малом $d>0$ $\delta<he^{-t-3d}$, $\ln\frac{h}{\delta}>t+3d$, $\lambda_n>t+2d$ для $n>N_1$. Учитывая, что из (5.2) при любом $d>0$ следуют неравенства (5.3) (в которых следует положить $\delta_1=\delta$, $a_n(\delta)=a_n(\delta,\ 0)$), получаем

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n(\delta)\,M(P^ny,\ 0,\ \delta)\leqslant\frac{Ch}{\delta}B(d)\sum_{n=p}^{\infty}\left[\frac{\alpha\left(\frac{n}{t+2d}\right)}{\alpha\left(\frac{n}{t+d}\right)}\right]^n\left(\frac{\lambda_n}{\delta}\right)^n,$$

и остается только применить лемму 1. Таким образом, если $y(z)$ аналитична в круге $|z|\leqslant R$, R – какое-нибудь положительное число, и $\delta<Re^{-t}$, то

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n(\delta)\,M(P^ny,\ 0,\ \delta)\leqslant BR_pM(y,\ 0,\ R). \tag{5.5}$$

3. Рассмотрим некоторые следствия из полученных оценок.

Следствие 1. Пусть $\varphi_n(z)$ – целые функции такие, что для любого ограниченного замкнутого множества Q точек на плоскости

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, nB\left(\frac{n}{\sqrt[n]{a_n(Q)}}\right)\leqslant t<\infty, \tag{5.6}$$

где $a_n(Q)=M(\varphi_n,\ Q)$. Тогда, если $y(z)$ аналитична в круге $|z-z_0|\leqslant d(t)|z_0|$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi_n(z)P^ny(z)$ равномерно сходится в окрестности точки z_0. При этом, если $y(x)$ аналитична в круге $|x-z_0|\leqslant d(t)|z_0|+h=R$, $h>0$, то $M(Dy,\ z_0,\ \delta)\leqslant CM(y,\ z_0,\ R)$, если $\delta>0$ достаточно мало. Постоянная C зависит от δ и R, но не зависит от y (то-есть, её можно взять одной и той же для всех функций $y(x)$, аналитических в одном и том же круге $|x-z_0|\leqslant d(t)|z_0|+h$.

Следствие 2. Пусть целые функции $\varphi_n(z)$ удовлетворяют условию (5.6), $y(z)$ аналитична в области I, причем если z_0 – любая конечная точка I, то $y(z)$ аналитична в круге $|z-z_0|\leqslant d(t)|z_0|$. Тогда а) ряд $Dy=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi_n(z)P^ny(z)$ равномерно сходится в любой ограниченной области I_1, лежащей внутри I; б) если $\varphi_n(z)=P_n(z)$ – многочлен степени $\leqslant n+1$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, то ряд $Dy=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(z)P^ny(z)$ равномерно сходится в любой области I_1, лежащей внутри I.

Для доказательства достаточно область I_1 (которая во втором случае может быть неограниченной) погрузить в область I_2 так, чтобы $I_1 \subset \bar{I}_1 \subset I_2 \subset \subset \bar{I}_2 \subset I$. Всегда можно считать, что I_2 — конечно-связная область, ограниченная контуром E — совокупностью конечного числа замкнутых спрямляемых жордановых кривых. Кроме того, если I_1 ограничена, то и I_2 можно считать ограниченной областью. Так как ограниченное замкнутое множество E лежит в I и в окрестности каждой точки из E ряд $Dy = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n P^n y$ сходится равномерно, то отсюда следует, что этот ряд равномерно сходится на E; при этом $M(Dy, E) \leqslant F \cdot M(y, E_1)$, где E_1 — некоторое замкнутое ограниченное множество, лежащее внутри I, а F — постоянная, зависящая от E, но не от y. Остается только отметить, что все члены ряда $\varphi_n(z) P^n y(z)$ будут аналитичны внутри I_2 (в случае, если $\varphi_n(z)$ будет многочленом степени не выше $n+1$, функция $\varphi_n P^n y$ будет аналитична в бесконечно-удаленной точке, если сама функция $y(z)$ аналитична в ней). Заметим еще, что попутно доказан такой факт.

Следствие 3. Пусть $\{\varphi_n(z)\}$ — последовательность многочленов степени $\leqslant n+1$, $n=0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих условию (5.6), $y(z)$ аналитична в I и, кроме того, если z_0 — любая конечная точка I, то $y(z)$ аналитична в круге $|z-z_0| \leqslant d(t)|z_0|$. Тогда для любой области I_1, внутренней к I, можно указать такую область I_2, что $\bar{I}_1 \subset I_2 \subset \bar{I}_2 \subset I$, и такую постоянную $F = F(I_1)$, что $M(Dy, I_1) \leqslant F \cdot M(y, \bar{I}_2)$, какова бы ни была функция $y(z)$, обладающая указанными свойствами. При этом постоянную F можно (для фиксированной области I_1) выбрать одной и той же для всех функций $y(z)$ таких, что $y(z)$ аналитична в I и аналитична в замкнутом кружке радиуса $d(t)|z_0|$ с центром в любой точке z_0 из I.

§ 6. Исследование оператора Dy в случае, когда $\psi(z)$ — многочлен

1. В случае, когда $\psi(x) \equiv x$, Py совпадает с обычной производной y'. Пусть целые функции $\varphi_n(x)$ таковы, что для любого ограниченного замкнутого множества Q

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n(Q)\, n!} \leqslant t_1 < \infty, \tag{6.1}$$

где по-прежнему $a_n(Q) = M(\varphi_n, Q)$. Предположим, что $y(z)$ аналитична в круге $|z-z_0| \leqslant t_1+h$, $h>0$. Тогда для любого $\delta < h$ из интегральной формулы Коши получим, учитывая (6.1)

$$\sum_{n=p}^{\infty} M(\varphi_n, z_0, \delta)\, M(y^{(n)}, z_0, \delta) \leqslant M(y, z_0, t_1+h) \frac{(t_1+h)}{(t_1+h-\delta)} \sum_{n=p}^{\infty} \frac{M(\varphi_n, z_0, t_1+h)}{(t_1+h-\delta)^n} = \\ = C_p M(y, z_0, t_1+h),$$

где $C_p < \infty$ и $C_p \to 0$ при $p \to \infty$, причем C_p можно взять одним и тем же для всех $y(z)$, аналитических в круге $|z-z_0| \leqslant t_1+h$. Заметим, что в данном случае

$$\omega_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k+1} = \frac{z^2}{(1-z)^2}\,; \quad \alpha(r) = M\left(\omega_1, 1, \frac{1}{r}\right) = r^2 \max_{|z-1| = \frac{1}{r}} |z|^2 = (r+1)^2,$$

$b(r)$ — обратная к $\alpha(r)$ функция, $B(r)=\frac{1}{b(r)}$. Положим $\alpha_1(r)=r^2$. Тогда по лемме 2 $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{b(r)}{\sqrt{r}}=1$. С другой стороны, условие (6.1) эквивалентно следующему

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{\left(\frac{n}{\sqrt[n]{a_n(Q)}}\right)^{\frac{1}{2}}}\leqslant(t_1 e)^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

В этом случае обязательно $\frac{n}{\sqrt[n]{a_n(Q)}}\to\infty$ и последнее неравенство эквивалентно такому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, nB\left(\frac{n}{\sqrt[n]{a_n(Q)}}\right)\leqslant t=(t_1 e)^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

Если положить $d(t)=\frac{t^2}{e}$, то мы получаем следующий результат: пусть функции $\varphi_n(x)$ удовлетворяют условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, nB\left(\frac{n}{\sqrt[n]{a_n(Q)}}\right)\leqslant t<\infty,$$

а функция $y(x)$ аналитична в круге $|z-z_0|\leqslant d(t)+h$, $h>0$. Тогда для любого $h_1<h$ $\sum\limits_{n=p}^{\infty}M(\varphi_n,\ z_0,\ h_1)M(y^{(n)},\ z_0,\ h_1)\leqslant C_p M\left(y,\ z_0,\ d(t)+h\right)$, где число $C_p\to 0$ при $p\to\infty$ и при любом $p\geqslant 0$ может быть выбрано одним и тем же для всех функций $y(x)$, аналитических в круге $|z-z_0|\leqslant d(t)+h$.

2. Пусть $\psi(z)=\sum\limits_{l=1}^{p}A_l z^l$, $p>1$. Как мы знаем, в этом случае $\omega_1(z)$ имеет в точке $z=1$ полюс порядка $p+1$, причем коэффициент при главном члене разложения равен $p!\,A_p$. Если положить $\alpha_1(r)=p!\,|A_p|\,r^{p+1}$, то $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\alpha(r)}{\alpha_1(r)}=1$ и по лемме 2 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b(r)}{b_1(r)}=1$, где $b_1(r)=\left[\frac{r}{p!\,|A_p|}\right]^{\frac{1}{p+1}}$. Из полученных в[3] оценок следует такой результат. Пусть $\varphi_m(x)$ — целые функции такие, что для любого ограниченного замкнутого множества Q

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{(n!)^p a_n(Q)}\leqslant t_1=\left(\frac{\sigma}{p}\right)^p, \tag{6.2}$$

а $y(x)$ аналитична в круге $|x-z_0|\leqslant B_p(z_0)+h$, где $h>0$,

$$\Delta=2\sigma\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}|A_p|^{\frac{1}{p}},$$

$B_p(z_0)=\Delta^p$, когда $\Delta>|z_0|^{\frac{1}{p}}$, и $B_p(z_0)=\Delta\,|z_0|^{1-\frac{1}{p}}$ при $\Delta\leqslant|z_0|^{\frac{1}{p}}$.

Тогда для достаточно малого $\delta>0$ (не зависящего от y, а только от h) и для любого $k\geqslant 0$

$$\sum_{m=k}^{\infty}M(\varphi_m,\ z_0,\ \delta)\,M(P^m y,\ z_0,\ \delta)\leqslant C_k M\left(y,\ z_0,\ B_p(z_0)+h\right), \tag{6.3}$$

где $C_p \to 0$ при $p \to \infty$ и одно и то же для всех $y(z)$, аналитических в круге $|z-z_0| \leqslant B_p(z_0)+h$.

Условие (6.2) эквивалентно следующему

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{\left(\frac{n}{\sqrt[n]{a_n(Q)}}\right)^{\frac{1}{p+1}}} \leqslant t_1^{\frac{1}{p+1}} e^{\frac{p}{p+1}} < \infty. \tag{6.4}$$

Очевидно, что тогда обязательно $\frac{n}{\sqrt[n]{a_n(Q)}} \to \infty$. Из (6.4) в свою очередь получаем

$$\varlimsup_{n\to\infty} nB_1\left(\frac{n}{\sqrt[n]{a_n(Q)}}\right) \leqslant t_1^{\frac{1}{p+1}} e^{\frac{p}{p+1}} (p!\,|A_p|)^{\frac{1}{p+1}}, \tag{6.5}$$

или, что все равно

$$\varlimsup_{n\to\infty} nB\left(\frac{n}{\sqrt[n]{a_n(Q)}}\right) \leqslant t = (t_1 e^p p!\,|A_p|)^{\frac{1}{p+1}}. \tag{6.6}$$

Обратно, если выполняется (6.6), то обязательно $\frac{n}{\sqrt[n]{a_n(Q)}} \to \infty$ и (6.6) по лемме 2 эквивалентно (6.5), а значит и (6.2). При этом

$$\sigma = pt_1^{\frac{1}{p}} = pe^{-1} t^{\frac{p+1}{p}} (p!\,|A_p|)^{-\frac{1}{p}}$$

и

$$\Delta = 2pt^{\frac{p+1}{p}} e^{-1} (p!\,|A_p|)^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} |A_p|^{\frac{1}{p}} = \frac{2t^{1+\frac{1}{p}} p^p}{e(p-1)^{p-1}(p!)^{\frac{1}{p}}}.$$

Таким образом, если для любого ограниченного замкнутого множества Q

$$\varlimsup_{n\to\infty} nB\left(\frac{n}{\sqrt[n]{a_n(Q)}}\right) \leqslant t < \infty,$$

и $y(z)$ аналитична в круге $|z-z_0| \leqslant d(t, z_0)+h$, где $h>0$, $\Delta = \frac{2t^{1+\frac{1}{p}} p^p}{e(p-1)^{p-1}(p!)^{\frac{1}{p}}}$, $d(t, z_0) = \Delta^p$, если $\Delta > |z_0|^{\frac{1}{p}}$, и $d(t, z_0) = \Delta \cdot |z_0|^{1-\frac{1}{p}}$, когда $\Delta \leqslant |z_0|^{\frac{1}{p}}$, то для достаточно малого $\delta > 0$ и для любого $k>0$ выполняется неравенство (6.3).

§ 7. Заключение. Некоторые применения

Резюмируем результаты §§ 5–6. Пусть L-оператор Py порожден функцией $\psi(z)$ из класса $[1, 0]$, и пусть

$$\omega_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi(n) z^{n+1}, \quad \psi(0)=0, \quad \alpha(r) = M\left(\omega_1, 1, \frac{1}{r}\right),$$

$b(r)$ — обратная к $\alpha(r)$ функция, $B(x) = \frac{1}{b(x)}$.

Предположим, что целые функции $\varphi_n(z)$ таковы, что для любого ограниченного замкнутого множества Q

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} nB\left(\frac{n}{\sqrt[n]{a_n(Q)}}\right) \leqslant t < \infty, \quad a_n(Q) = M(\varphi_n, Q). \tag{6.7}$$

Введем функцию $d(t, z)$ следующим образом. Если $\psi(x) \equiv x$, то положим $d(t, z) = \frac{t^2}{e}$. Если $\psi(x) = \sum_{l=1}^{p} A_l x^l$, $p > 1$, то положим $d(t, z) = \Delta^p$, когда $\Delta > |z|^{\frac{1}{p}}$ и $d(t, z) = \Delta \cdot |z|^{1-\frac{1}{p}}$ при $\Delta \leqslant |z|^{\frac{1}{p}}$, а

$$\Delta = 2t^{1+\frac{1}{p}} p^p e^{-1}(p-1)^{1-p}(p!)^{-\frac{1}{p}}.$$

Наконец, если $\psi(z)$ — трансцендентная целая функция из класса $[1, 0]$, то $d(t, z) = (e^t - 1)|z|$, когда $t < \ln 2$, и $d(t, z) = e^t|z|$ при $t \geqslant \ln 2$. Тогда:

а) если $y(x)$ аналитична в круге $|x - z_0| \leqslant d(t, z_0)$, то ряд

$$Dy = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) P^n y(x)$$

равномерно сходится в некоторой окрестности точки z_0;

б) если $y(x)$ аналитична в круге $|x - z_0| \leqslant d(t, z_0) + h$, $h > 0$, то найдется такое достаточно малое $\delta > 0$, что при любом $k \geqslant 0$

$$\sum_{m=k}^{\infty} M(\varphi_m, z_0, \delta) M(P^m y, z_0, \delta) \leqslant C_k M\left(y, z_0, d(t, z_0) + h\right);$$

при этом конечные числа C_k стремятся к нулю при $k \to \infty$; числа δ и C_k можно выбрать независимо от функции $y(z)$, лишь бы $y(z)$ была аналитической в круге $|z - z_0| \leqslant d(t, z_0) + h$ функцией.

в) Пусть $y(z)$ аналитична в области I, причем если z_0 — произвольная конечная точка I, то $y(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| \leqslant d(t, z_0) + h$. Тогда для любой ограниченной области I_1, внутренней к I, можно указать область I_2 так, что $\bar{I}_1 \subset I_2 \subset \bar{I}_2 \subset I$ и при любом $k \geqslant 0$

$$\sum_{m=k}^{\infty} M(\varphi_k, \bar{I}_1) M(P^k y, \bar{I}_1) \leqslant C_k M(y, \bar{I}_2),$$

причем $C_k \to 0$ при $k \to \infty$, и последовательность C_k может быть выбрана одной и той же для всех функций $y(z)$, обладающий указанными свойствами.

Замечание. L-оператор Py можно было определять не через $\omega_1(z)$ (по формуле 1.2), а через $\omega(z) = \omega_1(z) z^{-2}$ (по формуле 1.1). Пусть $\alpha_1(r) = M\left(\omega, 1, \frac{1}{r}\right)$, $b_1(r)$ — обратная к $\alpha_1(r)$ функция. Тогда, очевидно, $\lim_{r\to\infty} \frac{\alpha(r)}{\alpha_1(r)} = 1$ и по лемме 3 $\lim_{r\to\infty} \frac{b(r)}{b_1(r)} = 1$.

Отсюда следует, что в условии (6.7) функцию B можно было заменить функцией $B_1 = \frac{1}{b_1}$.

Результаты, полученные в настоящей статье, находят применение при исследовании свойств аналитических решений уравнений бесконечного порядка в L-операторах, при изучении свойств предельных функций последовательностей линейных агрегатов вида $\sum_{k=1}^{m_n} a_{k,n} f(\lambda_k z)$ и т. д. Например, из результатов данной работы, в частности следует, что если целые функции $\varphi_n(z)$ таковы, что для любого ограниченного замкнутого множества F

$$\lim_{n\to\infty} nB\left(\frac{n}{\sqrt[n]{a_n(F)}}\right)=0, \qquad a_n(F)=M(\varphi_n, F), \tag{6.8}$$

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z) P^n y(z)$ равномерно сходится в окрестности каждой точки, в которой $y(z)$ аналитична (так как $d(0, z)\equiv 0$). Отсюда получаем, что (в обозначениях § 5 работы[1]) $H(y)=A(y)$, и, значит, справедлив такой результат (см. следствие 1 из теоремы 6 работы[1]).

Теорема. Пусть $p_n(z)$ — многочлены степени $\leqslant n$, удовлетворяющие условиям $Q^{(1)}$ и (6.8); $f(z)$ — целая функция. Тогда, если $y(z)$ — произвольное аналитическое решение уравнения

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(z) P^n y(z) = f(z),$$

то максимальная область аналитичности[1] решения $A(y)$ односвязна. Если относительно решения известно, что оно всюду однозначно, то будет односвязной полная вейерштрассова область $E(y)$ существования решения.

Этот результат можно конкретизировать при различных предположениях относительно роста порождающей L-оператор Py целой функции $\psi(z)$.

Применения результатов данной работы к агрегатам целых функций изложены в работе[13].

Ростовский Государственный университет

Поступило в редакцию 1.IV.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Ф. Коробейник, Об операторах обобщенного дифференцирования, применимых к любой аналитической функции, ИАН СССР, 1964, т. 28, N 4, 833—854.
2. А. О. Гельфонд и А. Ф. Леонтьев, Об одном обобщении ряда Фурье, Мат. сб., т. 29 (71): 3 (1951), 477—500.
3. А. Ф. Леонтьев, Об области регулярности предельной функции одной последовательности аналитических функций, Мат. сб., т. 39 (81): 4 (1956), 405—420.
4. A. J. Macintyre, Laplace's transformation and integral functions, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 45 (1939), 1—20.
5. R. Wilson, The behaviour of a function near an isolated essential point and that of its coefficient function near infinity, Quart. J. Math. (1961), 12, N 46, 145—152.
6. Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М.—Л., 1956.
7. J. Faber, Beitrag zur Theorie der ganzen Funktionen, Math. Ann., 70 (1911), 48—68.
8. А. О. Гельфонд, Sur un théorème de M. M. Weigert—Leau, Мат. сб., 36 (1929), 99—101.
9. М. Г. Хапланов, О характере степенных разложений функций, имеющих на круге сходимости одну особую точку, Ученые записки РГУ, вып. 8, 1936, 92—129.

10. G. R. Braitzeff, Über die Singularitäten der durch eine Dirichletsche Reihe bestimmten analytischen Funktion, Math. Ann., 109, 1933, 82–94.
11. S. Rolewicz, On Cauchy–Hadamard Formula for Köthe Power Series, Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Vol. X, N 4 (1962), 211–216.
12. Г. Полиа и Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, ч. II, ОНТИ, 1938, ст. 14.
13. Ю. Ф. Коробейник, О свойствах предельной функции одной последовательности линейных агрегатов, ДАН СССР, 1964 т. 154, N 6, 14–17.

VIENO INTEGRALINIO OPERATORIAUS KLAUSIMU

J. F. KOROBEINIKAS

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjamas integralinis operatorius

$$Py=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_z} y(t)\,\omega\left(\frac{z}{t}\right)\frac{dt}{t^2}, \tag{1}$$

kur $y(t)$ yra bet kuri analizinė funkcija, o $\omega(x)$ yra analizinė $|x-1|>0$ srityje funkcija, turinti be galo nutolusiame taške bent antrojo kartotinumo nulį. Be to, leidžiama, kad C_z yra uždara rektifikuojama Žordano kreivė, kurios visi taškai priklauso funkcijos $y(t)$ analiziškumo sričiai, o taškas z yra srities, apribotos kreive C_z, vidinis taškas.

Darbe gaunami operatorių $P^n y=P(P^{n-1}y)$ įvertinimai ir tiriama $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi_n(z)P^n y(z)$ eilutė, kur $\varphi_n(z)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, yra sveikos funkcijos.

ON SOME INTEGRAL OPERATOR

J. F. KOROBEINIK

(*Summary*)

In this article the author studies an integral operator of the following form:

$$Py=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_z} y(t)\,\omega\left(\frac{z}{t}\right)\frac{dt}{t^2}, \tag{1}$$

In formula (1) $y(t)$ is an arbitrary analytic function; $\omega(x)$ – a function which is analytical in the domain $|x-1|>0$ and has at least a double zero in infinity; C_z – any Jordan curve of bounded lenght, surrounding the point z and situated in the domain of analyticity of $y(z)$.

The author obtains estimates for the growth of degrees $P^n y=P(P^{n-1}y)$ and investigates the domain of uniform convergence of the series $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi_n(z)z^n y(z)$ where $\varphi_n(z)$ are integral functions.