V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1965

# ОБ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ РЯДА ДИРИХЛЕ

А. МИШКЕЛЯВИЧУС

В этой работе продолжим изучение сходимости ряда Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \tag{1}$$

с комплексными показателями $\lambda_n$. При этом, предполагаем, что показатели $\lambda_n$ удовлетворяют условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \arg(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=\alpha,$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \arg(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=-\alpha,$$
$$0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

В статье [1] приведён аналог теоремы Абеля для таких рядов. В этой работе уточним этот аналог. Кроме того, покажем, что область сходимости ряда (1) является выпуклой.

## § 1. Уточнение аналога теоремы Абеля

В статье [1] доказана следующая

**Теорема 1.** *Если последовательность* $\{\lambda_n\}$ *удовлетворяет условию* (2) *и ряд* (1) *сходится в точке* $z_0$, *то этот ряд сходится в угле*

$$V(z_0):|\arg(z-z_0)|<\frac{\pi}{2}-\alpha. \tag{3}$$

Этот результат уточним в следующих двух теоремах:

**Теорема 2.** *Если последовательность* $\{\lambda_n\}$ *является ограниченной и удовлетворяет условию* (2), *а ряд Дирихле* (1) *сходится в точке* $z_0$, *то этот ряд сходится во всей комплексной плоскости.*

**Теорема 3.** *Пусть последовательность* $\{\lambda_n\}$ *удовлетворяет условию* (2) *и*

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty. \tag{4}$$

*Если ряд Дирихле* (1) *сходится в точке* $z_0$, *то он сходится в угле*

$$U(z_0): -\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)<\arg(z-z_0)<\frac{\pi}{2}-\beta, \tag{5}$$

*где*

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}} \arg\lambda_n&=\beta,\\ \underline{\lim_{n\to\infty}} \arg\lambda_n&=\gamma.\end{aligned} \tag{6}$$

**Замечание 1.** *Из условий* (2) *и* (4) *легко следует, что* $|\beta| \leqslant \alpha$, $|\gamma| \leqslant \alpha$, *так что* $V(z_0) \subset U(z_0)$ (*см.* (3) *и* (5)).

**Замечание 2.** *Легко видеть, что*

$$|e^{-\lambda_n z}| < |e^{-\lambda_n z_0}|,$$

*если* $n > N$ *и* $z \in U(z_0)$. *Отсюда следует, что ряд Дирихле* (1) *сходится абсолютно в угле* $U(z_0)$, *если он сходится абсолютно в точке* $z_0$. *При этом, не предпологаем, что выполнено условие* (2). *Этот результат доказан в работе* [2].

Из теорем 1 и 2 рассуждением от противного легко вытекает

**Следствие 1.** *Если последовательность* $\{\lambda_n\}$ *ограничена и удовлетворяет условию* (2), *а ряд Дирихле* (1) *расходится в точке* $z_0$, *то он расходится во всей комплексной плоскости.*

**Следствие 2.** *Если последовательность* $\{\lambda_n\}$ *удовлетворяет условиям* (2) *и* (4), *а ряд Дирихле* (1) *расходится в точке* $z_0$, *то этот ряд расходится в угле*

$$U^*(z_0): -\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) < \arg(z_0 - z) < \frac{\pi}{2} - \beta. \tag{7}$$

Доказательство теоремы 2. Пусть последовательность $\{\lambda_n\}$ ограничена, $|\lambda_n| < K$. Не умаляя общности, допускаем, что ряд (1) сходится в точке $z=0$. Тогда по теореме 1 он сходится в угле

$$|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \alpha$$

и, в частности, на положительной действительной оси, $x \geqslant 0$. Покажем, что ряд (1) сходится и на отрицательной действительной оси. Фиксируем $x_0 < 0$ и расмотрим сумму

$$R_{n,m}(x_0) = \sum_{k=n+1}^{m} a_k e^{-\lambda_k x_0}.$$

Вводя обозначения

$$A_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k, \quad B_m = e^{-\lambda_m x_0},$$

применяем преобразование Абеля к сумме $R_{n,m}(x_0)$

$$R_{n,m}(x_0) = \sum_{k=n+1}^{m} (A_{k-1} - A_k) B_k = \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k (B_{k+1} - B_k) + A_n B_{n+1} - A_m B_m,$$

откуда следует

$$|R_{n,m}(x_0)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m-1} |A_k| |B_{k+1} - B_k| + |A_n B_{n+1}| + |A_m B_m|. \tag{8}$$

По заданному числу $\varepsilon > 0$ можно найти такой номер $n_0$, что при $n > n_0$ будет $|A_n| < \varepsilon$, так как числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Номер $n_0$ мы можем считать настолько большим, чтобы одновременно выполнялось и неравенство (см. (2))

$$-\alpha - \delta < \arg(\lambda_{n+1} - \lambda_n) < \alpha + \delta, \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2} - \alpha. \tag{9}$$

Модуль $|B_{k+1}-B_k|$, $k>n_0$ представим в виде

$$|B_{k+1}-B_k|=|x_0|\left|\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{-ux_0}du\right|,$$

где путь интегрирования – отрезок $l_k: u=\lambda_k+se^{i\varphi_k}$,

$$\varphi_k=\arg(\lambda_{k+1}-\lambda_k),\quad 0\leqslant s\leqslant|\lambda_{k+1}-\lambda_k|.$$

Оценим последний интеграл

$$|B_{k+1}-B_k|\leqslant|x_0|\int\limits_{l_k}\left|e^{-ux_0}\right|ds=|x_0|\int\limits_{l_k}\left|e^{-(\lambda_k+se^{i\varphi_k})x_0}\right|ds=$$

$$=|x_0||e^{-\lambda_k x_0}|\int\limits_0^{|\lambda_{k+1}-\lambda_k|} e^{-sx_0\cos\varphi_k}ds=\frac{1}{\cos\varphi_k}\left(e^{-x_0 Re\,\lambda_{k+1}}-e^{-x_0 Re\,\lambda_k}\right).$$

Заметим, что последовательность $\{Re\,\lambda_n\}$ при $n>n_0$ монотонно возрастает и ограничена, поэтому $Re\,\lambda_n<L$, где $L>0$ – некоторая постоянная.

Из (9) следует $\cos\varphi_k>\cos(\alpha+\delta)$, поэтому

$$|B_{k+1}-B_k|<\frac{1}{\cos(\alpha+\delta)}\left(e^{-x_0 Re\,\lambda_{k+1}}-e^{-x_0 Re\,\lambda_k}\right),$$

и для суммы $R_{n,m}(x_0)$, $m>n>n_0$ получаем в силу (8)

$$|R_{n,m}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{\cos(\alpha+\delta)}\sum_{k=n+1}^{m-1}\left(e^{-x_0 Re\,\lambda_{k+1}}-e^{-x_0 Re\,\lambda_k}\right)+$$

$$+\varepsilon e^{-x_0 Re\,\lambda_{n+1}}+\varepsilon e^{-x_0 Re\,\lambda_m}<\frac{2\varepsilon}{\cos(\alpha+\delta)}e^{-x_0 Re\,\lambda_m}<\frac{2\varepsilon}{\cos(\alpha+\delta)}e^{-x_0 L}.$$

Этим доказано, что ряд (1) сходится и на отрицательной действительной оси, следовательно, он сходится в углах вида $|\arg(z-x_0)|<\frac{\pi}{2}-\alpha$, где $x_0$ – произвольное вещественное число.

Теорема доказана.

**Замечание.** Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n z}$, где $\lambda_n=(-1)^n$. В этом случае условие (2) не выполняется, $-\pi\leqslant\arg(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\leqslant 0$. В статье [1] показано, что рассматриваемый ряд сходится только в точках $z=k\pi i$, $k=0,\ \pm 1, \pm 2,\ldots$, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ расходится.

Этот пример показывает, что условие (2) является существенным для справедливости теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Пусть ряд (1) сходится в точке $z_0$. Тогда по теореме 1 он сходится в угле (3). Поэтому нам достаточно рассмотреть случай, когда угол $U(z_0)$ содержит точки, лежащие вне угла $V(z_0)$. Пусть точка $\xi\in U(z_0)-V(z_0)$. Докажем, что ряд (1) сходится в точке $\xi$.

Рассмотрим отрезок ряда (1)

$$R_{n,m}(\xi)=\sum_{k=n+1}^{m}a_k e^{-\lambda_k\xi}=\sum_{k=n+1}^{m}a_k e^{-\lambda_k z_0}e^{-\lambda_k(\xi-z_0)}.$$

Обозначим

$$A_m=\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z_0},\quad B_m=e^{-\lambda_m(\xi-z_0)} \tag{10}$$

и воспользуемся преобразованием Абеля. Мы получим

$$|R_{n,m}(\xi)|=\left|\sum_{k=n+1}^{m}(A_{k-1}-A_k)B_k\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{m-1}|A_k||B_{k+1}-B_k|+|A_nB_{n+1}|+|A_mB_m|. \tag{11}$$

Модуль $|B_{k+1}-B_k|$, как и в доказательстве теоремы 2, представим в виде

$$|B_{k+1}-B_k|=|e^{-\lambda_{k+1}(\xi-z_0)}-e^{-\lambda_k(\xi-z_0)}|=|\xi-z_0|\left|\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{-u(\xi-z_0)}du\right|, \tag{12}$$

где интегрирование производится по отрезку

$$l_k: u=\lambda_k+se^{i\varphi_k};\quad \varphi_k=\arg(\lambda_{k+1}-\lambda_k),\quad 0\leqslant s\leqslant|\lambda_{k+1}-\lambda_k|. \tag{13}$$

Пусть $U^*(\xi)$ — угол, вертикальный к углу $U(\xi)$, т. е.

$$U^*(\xi): -\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)<\arg(\xi-z)<\frac{\pi}{2}-\beta. \tag{5a}$$

Пересечение углов $U^*(\xi)$ и $V(z_0)$ не является пустым. Обозначим через $\eta$ произвольную фиксированную точку из пересечения $U^*(\xi)\cap V(z_0)$. Заметим, что

$$-\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)+2\varepsilon<\arg(\xi-\eta)<\frac{\pi}{2}-\beta-2\varepsilon, \tag{14}$$

где $\varepsilon>0$ зависит от $\eta$, и покажем, что для всех значений $u$, удовлетворяющих равенствам (13), выполнено при достаточно большом $k$, $k>N$, неравенство

$$\left|e^{-u(\xi-z_0)}\right|<\left|e^{-u(\eta-z_0)}\right|. \tag{15}$$

Последнее неравенство выполнено, если

$$\mathrm{Re}\,[u(\xi-z_0)]>\mathrm{Re}\,[u(\eta-z_0)],$$

или

$$\mathrm{Re}\,[u(\eta-\xi)]<0.$$

Другими словами, неравенство (15) выполнено, если точка $\eta$ лежит в полуплоскости $P_u$, определённой неравенством

$$\mathrm{Re}\,[u(z-\xi)]<0.$$

Заметим, что полуплоскость $P_u$ ограничена прямой, проходящей через точку $\xi$ и перпендикулярной вектору $\bar{u}$. Из (13) и (4) следует, что для $\varepsilon>0$ (значение $\varepsilon$ берём таким же, как в (14)) найдётся такое число $N$, что

$$\gamma-\varepsilon<\arg u<\beta+\varepsilon,$$

если $k>N$. Следовательно, полуплоскость $P_u$ содержит угол

$$U_\varepsilon^*(\xi): -\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)+2\varepsilon<\arg(\xi-z)<\frac{\pi}{2}-\beta-2\varepsilon.$$

В частности, (см. (14)) в полуплоскости $P_u$ содержится и точка $\eta$.

Итак, при $k>N$

$$\left|e^{-u(\xi-z_0)}\right|<\left|e^{-u(\eta-z_0)}\right|,\ \eta\in V(z_0).$$

Поэтому $\left(\text{см. (12) и (13)}\right)$ при $k>N$ получаем

$$|B_{k+1}-B_k|\leqslant|\xi-z_0|\left|\int_{l_k}|e^{-u(\xi-z_0)}|\,ds<|\xi-z_0|\int_{l_k}|e^{-u(\eta-z_0)}|\,ds=\right.$$

$$=|\xi-z_0||e^{-\lambda_k(\eta-z_0)}|\int_0^{|\lambda_{k+1}-\lambda_k|}e^{-s|\eta-z_0|\cos(\varphi_k+\sigma)}ds, \qquad (16)$$

где

$$\sigma=\arg(\eta-z_0).$$

Так как $\eta\in V(z_0)$, то мы можем найти такое число $\delta>0$, что

$$-\frac{\pi}{2}+\alpha+2\delta<\sigma<\frac{\pi}{2}-\alpha-2\delta.$$

По числу $\delta$ можно определить номер $N_1$, что при $k>N_1$ будет

$$-\alpha-\delta<\varphi_k<\alpha+\delta$$

и, следовательно,

$$-\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)<\varphi_k+\sigma<\frac{\pi}{2}-\delta;\quad \cos(\varphi_k+\sigma)>\sin\delta.$$

Считая $k>\max(N,N_1)$, из (16) получаем

$$|B_{k+1}-B_k|<\frac{|\xi-z_0|}{|\eta-z_0|\cos(\varphi_k+\sigma)}|e^{-\lambda_k(\eta-z_0)}|\left(1-e^{-|\lambda_{k+1}-\lambda_k||\eta-z_0|\cos(\varphi_k+\sigma)}\right)<$$

$$<\frac{|\xi-z_0|}{|\eta-z_0|\sin\delta}\left(|e^{-\lambda_k(\eta-z_0)}|-|e^{-\lambda_{k+1}(\eta-z_0)}|\right).$$

Так как ряд (1) сходится в точке $z_0$, то последовательность $\{A_n\}$ $\left(\text{см. (10)}\right)$ ограничена, $|A_n|<A$.

Из этих неравенств и (11) при $n>\max(N,N_1)$ получаем

$$|R_{n,m}(\xi)|<A\left[\frac{|\xi-z_0|}{|\eta-z_0|\sin\delta}\sum_{k=n+1}^{m-1}\left(|e^{-\lambda_k(\eta-z_0)}|-|e^{-\lambda_{k+1}(\eta-z_0)}|\right)+\right.$$

$$\left.+|e^{-\lambda_{n+1}(\xi-z_0)}|+|e^{-\lambda_m(\xi-z_0)}|\right]<A\left[\frac{|\xi-z_0|}{|\eta-z_0|\sin\delta}\left(|e^{-\lambda_{n+1}(\eta-z_0)}|-\right.\right.$$

$$\left.\left.-|e^{-\lambda_m(\eta-z_0)}|\right)+|e^{-\lambda_{n+1}(\eta-z_0)}|+|e^{-\lambda_m(\eta-z_0)}|\right]<\frac{2A|\xi-z_0|}{|\eta-z_0|\sin\delta}|e^{-\lambda_{n+1}(\eta-z_0)}|.$$

$$|R_{n,m}(\xi)|<C|e^{-\lambda_{n+1}(\eta-z_0)}|, \qquad (17')$$

где

$$C=\frac{2A|\xi-z_0|}{|\eta-z_0|\sin\delta},\qquad |\eta-z_0|<|\xi-z_0|.$$

Но

$$|e^{-\lambda_{n+1}(\eta-z_0)}|<e^{-|\lambda_{n+1}||\eta-z_0|\sin\delta},\ \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty,$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty}R_{n,m}(\xi)=0.$$

**Замечание.** *Если выполнено условие* (2) *и* $\xi\in V(z_0)$, *то, независимо от того, ограничена ли последовательность* $\{\lambda_n\}$ *или, наоборот,* $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$,

$$|R_n(\xi)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_ke^{-\lambda_k\xi}\right|<C|e^{-\lambda_{n+1}(\xi-z_0)}|, \qquad (17)$$

*где* $C>0$ — *постоянная. Это неравенство выводится таким же образом, как и неравенство* (17').

**Следствие.** *Если выполнены условия* (2) *и* (4) *и* $\lim\limits_{n\to\infty}\arg\lambda_n=0$, *то из сходимости* (*расходимости*) *ряда* (1) *в точке* $z_0$ *следует сходимость* (*расходимость*) *в полуплоскости* $\operatorname{Re} z>\operatorname{Re} z_0\,(\operatorname{Re} z<\operatorname{Re} z_0)$.

Заметим, что последнее следствие неверно, если не выполнено условие (2): *Väisälä* (см. [2]) дал пример ряда Дирихле (1), для которого $\alpha=\frac{\pi}{2}$ и который сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} z>1$, а также в изолированной точке $z=0$.

## § 2. Выпуклость области сходимости

Известно [2], что область абсолютной сходимости ряда (1) является выпуклой. Впрочем, это утверждение получается непосредственно, если учесть, что модуль показательной функции $e^{az}$ меняется монотонно, когда $z$ пробегает отрезок, соединяющий любие точки $z_1$ и $z_2$. Поэтому, если $z$ принадлежит отрезку $\overline{z_1 z_2}$, то

$$|e^{-\lambda_n z}|<|e^{-\lambda_n z_1}|+|e^{-\lambda_n z_2}|. \tag{18}$$

Отсюда следует, что ряд (1) сходится абсолютно на отрезке $\overline{z_1 z_2}$, если он сходится абсолютно в обеих точках $z_1$ и $z_2$. Таким образом, область абсолютной сходимости ряда (1) – выпуклая.

Свойство (18) модуля показательной функции $e^{az}$ мы используем для доказательства выпуклости области условной сходимости ряда Дирихле. А именно, верна следующая

**Теорема 4.** *Если показатели* $\lambda_n$ *удовлетворяют условию* (2), *то область сходимости ряда Дирихле* (1) – *выпуклая.*

Доказательство. Если последовательность $\{\lambda_n\}$ ограничена, то теорема 4 является прямым следствием из теоремы 2. В самом деле, по теореме 2 ряд (1) или нигде не сходится, или сходится во всей комплексной плоскости.

Предположим, что выполнено условие (4) и ряд (1) сходится в точках $z_1$ и $z_2$. Тогда по теореме 1 он сходится в углах

$$V(z_1):|\arg(z-z_1)|<\frac{\pi}{2}-\alpha,$$

$$V(z_2):|\arg(z-z_2)|<\frac{\pi}{2}-\alpha.$$

Пусть точки $\xi\in V(z_1)$ и $\eta\in V(z_2)$, так что ряд (1) сходится в точках $\xi$ и $\eta$. Мы докажем, что ряд (1) сходится в любой точке $\zeta$, принадлежащей отрезку $\overline{\xi\eta}$. Но сначала посмотрим, как из этого предложения следует теорема 4. Нам надо доказать, что все точки отрезка $\overline{z_1 z_2}$ лежат внутри или на границе области сходимости ряда (1), если этот ряд сходится в точках $z_1$ и $z_2$. Рассуждая от противного, допустим, что некоторая точка $z_0$ из отрезка $\overline{z_1 z_2}$ является внешней для области сходимости ряда (1). В таком случае точки $\xi$ и $\eta$, $\xi\in V(z_1)$, $\eta\in V(z_2)$ можно выбрать настолько близким к точкам $z_1$ и $z_2$, чтобы и на отрезке $\overline{\xi\eta}$ имелись точки, внешние к области сходимостн ряда (1). Но это противоречит высказанному выше предложению.

Рассмотрим сумму

$$R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z},$$

где точка $z$ принадлежит пересечению углов $V(z_1)$ и $V(z_2): z \in V(z_1) \cap V(z_2)$.

Как следует из замечания в конце теоремы 3, при достаточно большом $n$ $(n > n_0)$ имеем оценки

$$\begin{aligned} &|R_n(z)| < C|e^{-\lambda_{n+1}(z-z_1)}|, \\ &|R_n(z)| < C|e^{-\lambda_{n+1}(z-z_2)}|, \end{aligned} \tag{19}$$

где постоянная $C > 0$ зависит от $z$, $z_1$ и $z_2$. Кроме того, покажем, что при $n > n_0$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} &|e^{-\lambda_{n+1}(z-z_i)}| < |e^{-\lambda_n(z-z_i)}|, \\ &|e^{-\lambda_{n+1}(z-z_i)}| < |e^{-u(z-z_i)}|, \qquad i = 1,\ 2, \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$u = \lambda_n + se^{i\varphi_n}, \quad 0 \leqslant s \leqslant |\lambda_{n+1} - \lambda_n|, \quad \varphi_n = \arg(\lambda_{n+1} - \lambda_n).$$

В самом деле, неравенство (20) равносильно неравенству

$$\operatorname{Re}[(\lambda_{n+1} - u)(z - z_i)] > 0, \quad i = 1,\ 2.$$

Последнее неравенство легко следует из (2) и из условия $z \in V(z_i)$, $i = 1,\ 2$.

Рассмотрим сумму

$$S_{n,m}(\zeta) = \sum_{k=n+1}^{m} a_k e^{-\lambda_k \zeta} = \sum_{k=n+1}^{m} a_k e^{-\lambda_k z} e^{-\lambda_k(\zeta - z)},$$

где $m > n > n_0$ и $\zeta$ принадлежит отрезку $\overline{\xi\eta}$.

Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} S_{n,m}(\zeta) = 0.$$

Для этого опять применяем преобразование Абеля.

$$\begin{aligned} |S_{n,m}(\zeta)| &= \Big|\sum_{k=n+1}^{m} \Big[R_{k-1}(z) - R_k(z)\Big] e^{-\lambda_k(\zeta - z)}\Big| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{m-1} |R_k(z)|\,|e^{-\lambda_{k+1}(\zeta-z)} - e^{-\lambda_k(\zeta-z)}| + |R_n(z)\, e^{-\lambda_{n+1}(\zeta-z)}| + \\ &\qquad + |R_m(z)\, e^{-\lambda_m(\zeta-z)}|. \end{aligned} \tag{21}$$

Для оценки величин, входящих в этом выражении, воспользуемся неравенствами (18), (19) и (20). Мы получим

$$\begin{aligned} &|R_n(z)\, e^{-\lambda_{n+1}(\zeta-z)}| < |R_n(z)|\,(|e^{-\lambda_{n+1}(\xi-z)}| + |e^{-\lambda_{n+1}(\eta-z)}|) < \\ &< C|e^{-\lambda_{n+1}(z-z_1)}|\,|e^{-\lambda_{n+1}(\xi-z)}| + C|e^{-\lambda_{n+1}(z-z_2)}|\,|e^{-\lambda_{n+1}(\eta-z)}| = \\ &= C(|e^{-\lambda_{n+1}(\xi-z_1)}| + |e^{-\lambda_{n+1}(\eta-z_2)}|) \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} &|R_m(z)\, e^{-\lambda_m(\zeta-z)}| < C|e^{-\lambda_{m+1}(z-z_1)}|\,|e^{-\lambda_m(\xi-z)}| + \\ &+ C|e^{-\lambda_{m+1}(z-z_2)}|\,|e^{-\lambda_m(\eta-z)}| < C|e^{-\lambda_m(z-z_1)}|\,|e^{-\lambda_m(\xi-z)}| + \\ &+ C|e^{-\lambda_m(z-z_2)}|\,|e^{-\lambda_m(\eta-z)}| = C(|e^{-\lambda_m(\xi-z_1)}| + |e^{-\lambda_m(\eta-z_2)}|. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$|R_k(z)||e^{-\lambda_{k+1}(\zeta-z)}-e^{-\lambda_k(\zeta-z)}|=|\zeta-z||R_k(z)|\left|\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{-u(\zeta-z)}du\right|\leqslant$$

$$\leqslant|\zeta-z|R_k(z)|\int\limits_{l_k}|e^{-u(\zeta-z)}|ds<|\zeta-z||R_k(z)|\times$$

$$\times\left(\int\limits_{l_k}|e^{-u(\xi-z)}|ds+\int\limits_{l_k}|e^{-u(\eta-z)}|ds\right),$$

где

$$u=\lambda_k+se^{i\varphi_k},\quad 0\leqslant s\leqslant|\lambda_{k+1}-\lambda_k|,\quad \varphi_k=\arg(\lambda_{k+1}-\lambda_k),$$

а $l_k$ — отрезок, соединяющий точки $\lambda_k$ и $\lambda_{k+1}$.

Далее

$$|R_k(z)|\int\limits_{l_k}|e^{-u(\xi-z)}|ds<C|e^{-\lambda_{k+1}(z-z_1)}|\int\limits_{k}|e^{-u(\xi-z)}|ds\leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_{l_k}|e^{-u(z-z_1)}||e^{-u(\xi-z)}|ds=C\int\limits_{l_k}|e^{-u(\xi-z_1)}|ds.$$

Определим число $\delta>0$, для которого выполняются неравенства

$$-\frac{\pi}{2}+\alpha+2\delta<\arg(\xi-z_1)<\frac{\pi}{2}-\alpha-2\delta,$$

$$-\frac{\pi}{2}+\alpha+2\delta<\arg(\eta-z_2)<\frac{\pi}{2}-\alpha-2\delta.$$

Мы считаем, что номер $n_0$ настолько велик, что при $n>n_0$ имеем

$$-\alpha-\delta<\varphi_n<\alpha+\delta.$$

Тогда, как и при доказательстве теоремы 3, получаем

$$|R_k(z)|\int\limits_{l_k}|e^{-u(\xi-z)}|ds<C\int\limits_{l_k}|e^{-u(\xi-z_1)}|ds<$$

$$<\frac{C}{|\xi-z_1|\sin\delta}\left(|e^{-\lambda_k(\xi-z_1)}|-|e^{-\lambda_{k+1}(\xi-z_1)}|\right).$$

Аналогично устанавливаем, что

$$|R_k(z)|\int\limits_{l_k}|e^{-u(\eta-z)}|ds<\frac{C}{|\eta-z_2|\sin\delta}\left(|e^{-\lambda_k(\eta-z_2)}|-|e^{-\lambda_{k+1}(\eta-z_2)}|\right).$$

Из всех этих оценок и (21) получаем

$$|S_{n,m}(\zeta)|<\sum_{k=n+1}^{m-1}\frac{C|\zeta-z|}{\sin\delta}\left[\frac{1}{|\xi-z_1|}\left(|e^{-\lambda_k(\xi-z_1)}|-|e^{-\lambda_{k+1}(\xi-z_1)}|\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{|\eta-z_2|}\left(|e^{-\lambda_k(\eta-z_2)}|-|e^{-\lambda_{k+1}(\eta-z_2)}|\right)\right]+C\left(|e^{-\lambda_{n+1}(\xi-z_1)}|+\right.$$

$$\left.+|e^{-\lambda_{n+1}(\eta-z_2)}|+C(|e^{-\lambda_m(\xi-z_1)}|+|e^{-\lambda_m(\eta-z_2)}|\right).$$

Как нетрудно видеть, мы можем найти такую постоянную $K>0$, что будет

$$|S_{n,m}(\zeta)|<K\left(|e^{-\lambda_{n+1}(\xi-z_1)}|+|e^{-\lambda_{n+1}(\eta-z_2)}|\right),$$

где $K$ зависит от $z$, $z_1$, $z_2$, $\xi$, $\eta$ и $\zeta$.

Последнее неравенство показывает, что

$$\lim_{n\to\infty}S_{n,m}(\zeta)=0.$$

## § 3. Единственность ряда Дирихле

**Теорема 5.** *Если последовательность* $\{\lambda_n\}$ *удовлетворяет условию* (2) *и сумма ряда* (1) $f(z) \equiv 0$, то $a_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Теорему докажем рассуждением от противного. Допустим, что сумма ряда (1) $f(z) \equiv 0$, но хотя один из коэффициентов не равен нулю. Из условия (2) следует, что последовательность $\{\operatorname{Re}\lambda_n\}$ возрастает, начиная с некоторого номера $n = n_0$. Поэтому в последовательности $\{\operatorname{Re}\lambda_n\}$ имеется наименьшее число. Пусть это число будет $\operatorname{Re}\lambda_k$. Мы можем предположить, что $a_k \neq 0$. В самом деле, мы можем считать, что в ряду (1) были пропущены все члены $a_s e^{-\lambda_s z}$, для которых $a_s = 0$. Предположим ещё сначала, что $\operatorname{Re}\lambda_k < \operatorname{Re}\lambda_n$, $n \neq k$ (то есть, что в последовательности $\{\operatorname{Re}\lambda_n\}$ имеется единственное наименьшее число).

Для упрощения рассуждений допустим, что ряд (1) сходится в точке $z = 0$, что всегда можно достичь переносом начала координат. Тогда ряд Дирихле (1) сходится в угле

$$|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad z = x + iy.$$

Ряд (1) представим в виде

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x) \equiv 0, \quad x > 0, \quad n > k,$$

где

$$S_n(x) = \sum_{m=1}^{n} a_m e^{-\lambda_m x}, \quad R_n(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m x}.$$

Как было показано $\Big($см. (17)$\Big)$,

$$|R_n(x)| \leq C |e^{-\lambda_{n+1} x}| = C e^{-x \operatorname{Re}\lambda_{n+1}}.$$

Мы имеем

$$f(x) e^{\lambda_k x} = a_1 e^{-(\lambda_1 - \lambda_k) x} + \ldots + a_k + \ldots + a_n e^{-(\lambda_n - \lambda_k) x} + R_n(x) e^{\lambda_k x} \equiv 0.$$

Так как

$$|R_n(x) e^{\lambda_k x}| < C e^{-x \operatorname{Re}(\lambda_{n+1} - \lambda_k)},$$

то при $x \to +\infty$ получаем $a_k = 0$, что противоречит раньше установленному соотношению $a_k \neq 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда в последовательности $\{\operatorname{Re}\lambda_n\}$ имеется несколько наименьших чисел. Их будет конечное число $\Big($см. (2)$\Big)$. Пусть это будут числа $\operatorname{Re}\lambda_{k_1} = \operatorname{Re}\lambda_{k_2} = \ldots = \operatorname{Re}\lambda_{k_s}$. Этот случай сведём к предыдущему заменой $z = \xi e^{i\gamma}$, если $\gamma \neq 0$, $|\gamma| < \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Тогда ряд (1) примет вид

$$f(\xi e^{i\gamma}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n e^{i\gamma}\xi} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda'_n \xi},$$

где

$$\lambda'_n = \lambda_n e^{i\gamma}.$$

Если угол $\gamma$ взять достаточно малым, то действительные части $\mathrm{Re}\lambda'_{ki}$ $(i=1, 2, \ldots, s)$ будут различными и наименьшее число из них будет единственным наименьшим числом в последовательности $\{\mathrm{Re}\lambda'_n\}$. Доказательство теоремы заканчиваем как и в первом случае.

В заключение автор благодарит А. Г. Нафталевича за советы и указания.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 1.VI.1964

## ЛИТЕРАТУРА


1. А. Мишкелявичус, О сходимости рядов Дирихле, Лит. мат. сб., т. III, № 2, 1963, 105–113.
2. Väisälä, Verallgemeinerung des Begriffes der Dirichletschen Reihen, Acta Universitatis Dorpatensis, 1921.


## DIRICHLE EILUTĖS KONVERGENCIJOS SRITIS

A. MIŠKELEVIČIUS


*(Reziumė)*

Šiame straipsnyje nagrinėjama Dirichle eilutė (1), kur $a_n$ ir $\lambda_n$ yra kompleksiniai skaičiai, o $z$ – kompleksinis kintamasis.

Įrodoma, kad jeigu eilutė konverguoja (diverguoja) taške $z_0$, ji taip pat konverguoja (diverguoja) kampe $U(z_0)$ $\left(U^*(z_0)\right)$, kuris yra apibrėžiamas (5) $\left((7)\right)$ nelygybe. Toliau įrodoma, kad eilutės (1) konvergencijos sritis yra iškili.


## SUR LE DOMAINE DE CONVERGENCE DE SÉRIE DE DIRICHLE

A. MIŠKELEVIČIUS


*(Résumé)*

On considère dans cet article une série de Dirichle (1), où $a_n$ et $\lambda_n$ sont des nombres complexes et $z$ – un variable complexe.

On démontre que, si la série (1) converge (diverge) en un point $z_0$, elle converge (diverge) aussi dans l'angle $U(z_0)$ $\left(U^*(z_0)\right)$, qui est défini par l'inégalité (5) $\left((7)\right)$; on démontre aussi que le domaine de convergence de série (1) est convexe.