V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1

1965

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМИРОВАННОЙ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

П. СУРВИЛА

1. Рассматривается последовательность независимых случайных величин

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots \tag{1}$$

с $M\xi_k=0$, $D\xi_k=\sigma_k^2$ и $M|\xi_k|^s=\beta_{sk}<\infty$ для какого-нибудь целого $s\,(s\geqslant 3)$, функциями распределения $F_k(x)$ и характеристическими функциями $f_k(t)$, $k=1,\ 2,\ \ldots$

Пусть

$$B_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2,\quad B_{\nu n}=\sum_{k=1}^{n}\beta_{\nu k},\quad L_{\nu n}=\frac{B_{\nu n}}{B_n^{\nu}},\qquad \nu=3,\ \ldots,\ s,$$

$$\overline{S}_n=B_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\xi_k,$$

A и B конечные постоянные не всегда одни и те же, $\overline{F}_n(x)$ и $\overline{f}_n(t)$ – функция распределения и характеристическая функция нормированной суммы $\overline{S}_n$.

Асимптотические разложения для $\overline{F}_n(x)$ в случае одинаково распределенных слагаемых имеются в [1]. В случае разно распределенных слагаемых асимптотические разложения получены В. В. Петровым [3] при условии быстроты роста B_n^2 и B_{sn}, а также на произведение характеристических функций слагаемых. А именно, там требовалось, чтобы

I $\varliminf\limits_{n\to\infty}\frac{B_n^2}{n}>0,\qquad \varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{B_{sn}}{n}<\infty,$

II $$\int\limits_{|t|>\varepsilon}\prod_{k=1}^{n}|f_k(t)|\,dt=o\left(\frac{1}{n^{\frac{k-2}{2}}}\right),\qquad (\varepsilon>0).$$

В настоящей работе с использованием асимптотических разложений для характеристической функции $\overline{f}_n(t)$ и для ее производных, полученных в [7], доказываются асимптотические разложения для $\overline{F}_n(x)$ по дробям Ляпунова, а не по степеням $\frac{1}{\sqrt{n}}$, как это делалось в [3]. Кроме того, остаточный член разложений получается зависящим также и от x. При этом условия касаются только быстроты роста B_{sn} по сравнению с B_n^2 и распределений $F_k(x)$ случайных слагаемых ξ_k.

Известно, что для получения асимптотических разложений для $\overline{F}_n(x)$ в случае одинаково распределенных слагаемых достаточно требовать, чтобы случайные величины удовлетворяли условию (C), т.е., чтобы

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}}\ |f_\xi(t)|<1. \tag{C}$$

Здесь приходится требовать несколько большего, а именно: потребовать, чтобы функции распределения $F_k(x)$ случайных величин последовательности имели абсолютно непрерывные компоненты, или чтобы при свертывании функций $F_k(x)$ с собой абсолютно непрерывная компонента возникала довольно быстро. При этом налагаются ограничения и на плотности, а также дисперсии абсолютно непрерывных компонент.

Введем условие.

Условие B. $\frac{1}{B_{sn}}\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|>B_n^{1-\tau}}|x|^s dF_k(x)\to 0$, *когда* $n\to\infty$, *для некоторого* $\tau>0$.

Будем пользоваться также следующими обозначениями:

$$h_{m,n}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\left[1+\sum_{\nu=}^{m}Q_{\nu n}(it)L_{\nu n}\right], \qquad m=s-1,\ s,$$

где $Q_{\nu n}(it)$ — многочлены степени 3 $\nu-2)$ с равномерно относительно n ограниченными коэффициентами (см. [4]),

$$\varphi_{m,n}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}h_{m,n}(t)\,dt,$$

$$\Phi_{m,n}(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi_{m,n}(u)\,du, \qquad m=s-1,\ s.$$

При $s=3$ и $m=2$ будем иметь следующие равенства:

$$\varphi_{2,n}(x)=\varphi(x), \quad \Phi_{2,n}(x)=\Phi(x),$$

где $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ плотность и функция распределения, соответственно, (0, 1) — нормального распределения.

2. Результаты. Основными результатами настоящей работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть случайные величины последовательности* (1) *распределены одинаково и удовлетворяют условию*

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}}\ |f_\xi(t)|<1.$$

Тогда равномерно относительно x *выполняется соотношение*

$$(1+|x|^{s-1})\left|\overline{F}_n(x)-\Phi(x)-\sum_{\nu=1}^{s-2}P_\nu(-\Phi)\frac{1}{(\sqrt{n})^\nu}\right|=o\left((\sqrt{n})^{-(s-2)}\right). \quad (n\to\infty).$$

Теорема 2. *Пусть последовательность* (1) *удовлетворяет условиям*:

1) $B_n\to\infty$, *когда* $n\to\infty$ *и существует число* $g>0$ *такое, что для достаточно больших* n *верно неравенство* $B_n^2\geqslant gB_{sn}$;

2) *существует положительное число* $C < \infty$ *такое, что в разложении функции распределения* $F_k(x)$,

$$F_k(x) = a_k \int_{-\infty}^{x} \rho_k(u)\,du + b_k S_k(x), \qquad (a_k + b_k = 1),$$

плотность абсолютно непрерывной компоненты удовлетворяла условию

$$\max_x \rho_k(x) = \bar{C}_k \leqslant C, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots;$$

3) *существует положительное число* $M < \infty$ *такое, что* $\bar{C}_k^2 \bar{\sigma}_k^2 \leqslant M$, $k = 1, 2, \ldots$, *где* $\bar{\sigma}_k^2$ — *дисперсия распределения с плотностью* $\rho_k(x)$,

4) $\frac{1}{\ln B_n} \sum_{k=1}^{n} a_k \to \infty$, *когда* $n \to \infty$. *Тогда равномерно относительно* x *выполняется соотношение*

$$(1 + |x|^{s-1})\,|\bar{F}_n(x) - \Phi_{s-1,\,n}(x)| = O(L_{sn}), \qquad (n \to \infty). \tag{2}$$

Если, кроме того, выполняется условие B, *то равномерно относительно* x

$$(1 + |x|^{s-1})\,|\bar{F}_n(x) - \Phi_{s,\,n}(x)| = o(L_{sn}), \qquad (n \to \infty). \tag{3}$$

Теорему 2 можно несколько обобщить в следующем смысле.

Теорема 3. *Утверждения теоремы 2 будут верны, если вместо условий 2—4 выполняются следующие условия:*

2а) *при свертывании функции распределения* $F_k(x)$ *случайной величины* ξ_k *с собой* ν_k*-раз получается функция распределения* $F_k^{\nu_k}(x)$, *которая имеет абсолютно непрерывную компоненту, т.е.*

$$F_k^{\nu_k}(x) = a_{\nu_k} \int_{-\infty}^{x} \rho_{\nu_k}(u)\,du + b_{\nu_k} S_{\nu_k}(x), \quad (a_{\nu_k} + b_{\nu_k} = 1),$$

причем $\max\limits_x \rho_{\nu_k}(x) \leqslant \bar{C}_{\nu_k} \leqslant C$, $C < \infty$, $k = 1,\ 2,\ \ldots;$

3а) *существует положительное число* $M < \infty$ *такое, что* $\bar{\sigma}_{\nu_k}^2 \bar{C}_{\nu_k}^2 \leqslant M$, $k = 1, 2, \ldots$, *где* $\bar{\sigma}_{\nu_k}^2$ — *дисперсия распределения с плотностью* $\rho_{\nu_k}(x)$;

4а) $\frac{1}{\ln B_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{\nu_k}}{\nu_k} \to \infty$, *когда* $n \to \infty$.

Следствия. Теорема 4. *Если выполняются условия теоремы первой, то для любого* $p > \frac{1}{s-1}$ *имеет место соотношение*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\bar{F}_n(x) - \Phi(x) - \sum_{\nu=1}^{s-2} P_\nu(-\Phi)\,\frac{1}{(\sqrt{n})^\nu}\right|^p dx = o\left(\left(\sqrt{n}\right)^{-p\,(s-2)}\right), \qquad (n \to \infty).$$

Теорема 5. *Если выполняются условия* 1—4 *теоремы второй (соответственно условия* 1, 2а, 3а, 4а *теоремы третьей), то имеет место соотношение*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\bar{F}_n(x) - \Phi_{s-1,\,n}(x)|^p\,dx = O(L_{sn}^p), \qquad (n \to \infty).$$

Если, кроме того, выполняется условие B, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\bar{F}_n(x)-\Phi_{s,n}(x)|^p\,dx = o(L_{sn}^p), \qquad (n\to\infty).$$

здесь $p>\frac{1}{s-1}$ *— любое.*

3. Вспомогательные предложения. Для доказательства только что сформулированных теорем нам понадобится несколько вспомогательных фактов.

Теорема 6. *Если последовательность* (1) *удовлетворяет условиям:*

1) $L_{sn}\to 0$, *когда* $n\to\infty$,

2) *выполняется условие* B,

то для достаточно больших n *при* $|t|\leqslant L_{sn}^{-\frac{1}{3(s-2)+\gamma}}$ *для любого* $\gamma\geqslant 1$ *имеют место следующие соотношения:*

$$\left|\frac{d^\nu}{dt^\nu}[\bar{f}_n(t)-h_{s,n}(t)]\right|\leqslant \delta_\nu(B_n, B_{sn})\,L_{sn}e^{-\frac{t^2}{3}}\{|t|^{s-\nu}+|t|^{3(s-2)+\nu+1}\},$$

где $\delta_\nu(B_nB_{sn})\to 0$ *когда* $n\to\infty$, $\nu=0, 1, \ldots, s$.

Доказательство теоремы см. в [7].

Лемма 1. *Пусть для последовательности* (1) *выполняется условие* $L_{sn}\to 0$, *когда* $n\to\infty$. *Тогда для достаточно больших* n *и при* $|t|\leqslant cL_{3n}^{-1}$ $\left(\frac{1}{5}\leqslant c<\frac{1}{4}\right.$ *— некоторое*$\left.\right)$ *имеют место соотношения:*

$$\left|\frac{d^\nu}{dt^\nu}\bar{f}_n(t)\right|\leqslant b(\nu, s)\,e^{-\frac{t^2}{4}}\{|t|^\nu+1\}, \qquad \nu=0, 1, \ldots, s.$$

Константы $b(\nu, s)$ *равномерно ограничены относительно* n.

Доказательство настоящей леммы имеется в [7].

Лемма 2. *Пусть* $F(x)$ *и* $f(t)$ *функция распределения и характеристическая функция, соответственно. Если*

$$F(x)=a\int_{-\infty}^{x}\rho(u)\,du+bS(x), \qquad (a+b=1)$$

с $0<a<1$, $\rho(x)\leqslant\bar{C}$ *и* $\bar{\sigma}^2$ *— дисперсия распределения с плотностью* $\rho(x)$, *то имеют место неравенства:*

$$|f(t)|\leqslant\begin{cases}\exp\left\{-\dfrac{\alpha_1 a}{\bar{C}^2\bar{\sigma}^2}\right\}, & \text{если } |t|\geqslant\pi\bar{\sigma}^{-1},\\[2ex] \exp\left\{-\dfrac{\alpha_2 at^2}{\bar{C}^2}\right\}, & \text{если } |t|<\pi\bar{\sigma}^{-1}.\end{cases}$$

Здесь $\alpha_1>0$ *и* $\alpha_2>0$ *— абсолютные постоянные.*

Доказательство. В [6] доказана следующая оценка для модуля характеристической функции:

если $f_\xi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ, которая имеет плотность распределения $p(x)\leqslant C$ и дисперсию σ^2, то при $|t|\geqslant\pi\sigma^{-1}$ верно неравенство

$$|f_\xi(t)|\leqslant 1-\frac{\alpha_1}{C^2\sigma^2}. \qquad (4)$$

Воспользуемся этой оценкой при доказательстве нашей леммы.

Так как $F(x)=a\int\limits_{-\infty}^{x}\rho(u)\,du+bS(x)$ и $a+b=1$, то имеем следующее равенство:

$$f(t)=a\bar{f}(t)+(1-a)\bar{\bar{f}}(t),$$

где

$$\bar{f}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\rho(x)\,dx,\qquad \bar{\bar{f}}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,dS(x).$$

Следовательно, верно неравенство

$$|f(t)|\leqslant 1-a\left(1-|\bar{f}(t)|\right). \tag{5}$$

Согласно неравенству (4), так как $\bar{f}(t)$ является характеристической функцией случайной величины, которая имеет плотность $\rho(x)$ не превышающую $\bar{C}$, при $|t|\geqslant\pi\bar{\sigma}^{-1}$ имеем неравенство

$$|\bar{f}(t)|\leqslant 1-\frac{\alpha_1}{\bar{C}^2\bar{\sigma}^2}.$$

Подставляя эту оценку в соотношение (5), получаем, что

$$|f(t)\leqslant 1-\frac{\alpha_1 a}{\bar{C}^2\bar{\sigma}^2},\quad \text{когда}\quad |t|\geqslant\pi\bar{\sigma}^{-1}. \tag{6}$$

Следовательно, при $|t|\geqslant\pi\bar{\sigma}^{-1}$ имеем неравенство

$$|f(t)|\leqslant\exp\left\{-\frac{\alpha_1 a}{\bar{C}^2\bar{\sigma}^2}\right\}. \tag{7}$$

Далее, воспользуемся следующей леммой Крамера [2].

Если $g(t)$ — характеристическая функция, такая, что $|g(t)|\leqslant k<1$ при $|t|\geqslant b$, то при $|t|<b$

$$|g(t)\leqslant 1-(1-k^2)\frac{t^2}{8b^2}.$$

Используя эту лемму, при $|t|<\pi\bar{\sigma}^{-1}$ получаем следующее неравенство:

$$|f(t)|\leqslant 1-\left\{1-\left(1-\frac{\alpha_1 a}{\bar{C}^2\bar{\sigma}^2}\right)^2\right\}\frac{t^2\bar{\sigma}^2}{8\pi^2}\leqslant 1-\frac{\alpha_1 a t^2}{8\pi^2\bar{C}^2}.$$

Отсюда при соответствующих обозначениях следует, что при $|t|<\pi\bar{\sigma}^{-1}$ верна оценка

$$|f(t)|\leqslant\exp\left\{-\frac{\alpha_2 a t^2}{\bar{C}^2}\right\}. \tag{8}$$

Из соотношений (7) и (8) и следует лемма.

Кроме названных теоремы и лемм нам понадобится следующая теорема Эссена [1], а также некоторое ее обобщение, которые приводятся ниже.

Теорема (Эссена). *Пусть A, T и $\varepsilon>0$ — постоянные, $F(x)$ — неубывающая функция, $G(x)$ — функция ограниченной вариации, $f(t)$ и $g(t)$ — соответствующие им трансформации Фурье. Если*

1) $F(-\infty)=G(-\infty)$, $F(+\infty)=G(+\infty)$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F(x)-G(x)|\,dx<\infty$;

3) $G'(x)$ *существует при всех* x *и* $|G'(x)| \leqslant A$;

4) $\int\limits_{-T}^{T} \left| \frac{f(t)-g(t)}{t} \right| dt = \varepsilon$;

то каждому числу $k>1$ *соответствует конечное положительное число* $c(k)$, *зависящее только от* k, *такое, что*

$$|F(x)-G(x)| \leqslant k \frac{\varepsilon}{2\pi} + c(k) \frac{A}{T}.$$

Теорема 7. *Пусть* A, T *и* $\varepsilon>0$ *— постоянные,* $F(x)$ *и* $G(x)$ *— неубывающие, ограниченной вариации функции,* $f(t)$ *и* $g(t)$ *— соответствующие им трансформации Фурье. Если*

1) $F(-\infty)=G(-\infty)$, $F(0)=G(0)$, $F(+\infty)=G(+\infty)$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x)-G(x)|\, dx < \infty$;

3) $G'(x)$ *существует при* $x<0$ *и* $|G'(x)| \leqslant A_1$;

4) $F'(x)$ *существует при* $x>0$ *и* $|F'x)| \leqslant A_2$;

5) $\int\limits_{-T}^{T} \left| \frac{f(t)-g(t)}{t} \right| dt = \varepsilon$;

то каждому числу $k>1$ *соответствует конечное положительное число* $c(k)$, *зависящее только от* k, *такое, что*

$$|F(x)-G(x) \leqslant k \frac{\varepsilon}{2\pi} + c(k) \frac{A}{T},$$

где $A = \max(A_1, A_2)$.

Доказательство настоящей теоремы мало чем отличается от доказательства упомянутой теоремы Эссена.

4. Доказательство основных результатов. Полностью приводим здесь доказательство только второго утверждения второй теоремы и кратко отмечаем те отличия, которые встречаются при доказательстве третьей теоремы. Доказательства теоремы первой не приводим потому, что оно проще. Доказательство же соотношения (2) отличается от проводимого здесь доказательства соотношения (3) только тем, что вместо теоремы шестой при оценке соответствующих интегралов надо воспользоваться теоремой первой из [5], при этом соответственно изменив интервал интегрирования, а также разбиение интеграла на части.

Доказательство соотношения (3). Чтобы доказать соотношение (3), достаточно доказать следующие соотношения: равномерно относительно x

$$|\bar{F}_n(x) - \Phi_{s,n}(x)| = o(L_{sn}), \qquad (n \to \infty), \tag{9}$$

$$|x|^{s-1} |\bar{F}_n(x) - \Phi_{s,n}(x)| = o(L_{sn}), \qquad (n \to \infty). \tag{10}$$

1. Используя упомянутую теорему Эссена, можем писать

$$|\bar{F}_n(x) - \Phi_{s,n}(x)| \leqslant \frac{k}{2\pi} \int\limits_{-T}^{T} \left| \frac{\bar{f}_n(t) - h_{s,n}(t)}{t} \right| dt + c(k) \frac{A(s)}{T}, \tag{11}$$

где $A(s) = \max\limits_{x} |\Phi'_{s,n}(x)|$.

Берем $T=L_{sn}^{-(1+\delta)}$ (δ можем брать любое число из интервала (0, 1)) и вычисляем интеграл

$$I=\int\limits_{|t|\leqslant L_{sn}^{-(1+\delta)}}|\bar f_n(t)-h_{s,n}(t)|\,|t|^{-1}\,dt\leqslant\int\limits_{|t|\leqslant L_{sn}^{-1/3(s-2)+\gamma}}|\bar f_n(t)-h_{s,n}(t)|\,|t|^{-1}\,dt+$$

$$+\int\limits_{|t|>L_{sn}^{-1/3(s-2)+\gamma}}|h_{s,n}(t)|\,|t|^{-1}\,dt+\int\limits_{L_{sn}^{-1/3(s-2)+\gamma}<|t|\leqslant cL_{3n}^{-1}}|t|^{-1}\,|\bar f_n(t)|\,dt+$$

$$+\int\limits_{cL_{3n}^{-1}<|t|\leqslant L_{sn}^{-(1+\delta)}}|t|^{-1}\,|\bar f_n(t)|\,dt=I_1+I_2+I_3+I_4. \qquad (12)$$

Используя теорему шестую, получаем, что

$$I_1=o(L_{sn}),\qquad (n\to\infty). \qquad (13)$$

Согласно определению $h_{s,n}(t)$, имеем

$$I_2=o(L_{sn}),\qquad (n\to\infty). \qquad (14)$$

Используя лемму первую, получаем соотношение

$$I_3=o(L_{sn}),\qquad (n\to\infty). \qquad (15)$$

Для оценки интеграла I_4 воспользуемся леммой второй. По этой лемме имеем, что

$$|f_k(t)|\leqslant\begin{cases}\exp\left\{-\dfrac{\alpha_1 a_k}{\bar C_k^2\bar\sigma_k^2}\right\} & \text{при } |t|\geqslant\pi\bar\sigma_k^{-1},\\[2mm] \exp\left\{-\dfrac{\alpha_2 a_k t^2}{\bar C_k^2}\right\} & \text{при } |t|<\pi\bar\sigma_k^{-1}, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots\end{cases}$$

Следовательно, обозначив через $\tilde\alpha=\min\left\{\dfrac{\alpha_1}{M},\ \dfrac{\alpha_2 c^2 g^{\frac{2}{s-2}}}{C_2}\right\}$, согласно условиям первому и второму теоремы, получаем неравенства

$$|f_k(t)|\leqslant\exp\{-\tilde\alpha a_k\},\quad\text{если}\quad |t|\geqslant cg^{\frac{1}{s-2}},\qquad k=1,\ 2,\ \ldots \qquad (16)$$

Делая замену переменных $t=t'B_n$ и используя условие первое теоремы, получаем, что

$$I_4\leqslant\frac{1}{cg^{\frac{1}{s-2}}}\int\limits_{cg^{\frac{1}{s-2}}<|t|\leqslant\frac{B_n^s}{B_{sn}}}\prod_{k=1}^{n}|f_k(t)|\,dt.$$

Теперь, согласно неравенствам (16) и условию четвертому теоремы, получаем неравенство

$$I_4\leqslant\frac{1}{cg^{\frac{1}{s-2}}}\int\limits_{|t|\leqslant\frac{B_n^s}{B_{ns}}}\exp\left\{-\tilde\alpha\sum_{k=1}^{n}a_k\right\}dx\leqslant AB_n^s\exp\left\{-\alpha\sum_{k=1}^{n}a_k\right\}\leqslant AB_n^{-(\tilde\alpha N_n-s)},$$

где $N_n\to\infty$, когда $n\to\infty$. Следовательно, имеем соотношение

$$I_4=o(L_{sn}),\qquad (n\to\infty). \qquad (17)$$

Из неравенства (12), согласно соотношениям (13)–(15) и (17) заключаем, что

$$I=o(L_{sn}),\qquad (n\to\infty).$$

Теперь из (11), имея в виду, что $T=L_{sn}^{-(1+\delta)}$, выводим соотношение

$$|\overline{F}_n(x)-\Phi_{s,n}(x)|\leqslant\frac{k}{2\pi}o(L_{sn})+c(k)A(s)L_{sn}^{(1+\delta)}=o(L_{sn}), \qquad (n\to\infty).$$

Следовательно, соотношение (9) имеет место.

2. Теперь выясним, что выражение $x^{s-1}[\overline{F}_n(x)-\Phi_{s,n}(x)]$ можно представить как разность двух функций, которые удовлетворяют условиям упомянутой теоремы Эссена, или условиям теоремы седьмой.

Действительно, так как для $\overline{F}_n(x)$ и для $\Phi_{s,n}(x)$ существуют моменты s-ого порядка, то имеет место соотношение

$$\int\limits_{-\infty}^{x} y^{s-1}d[\overline{F}_n(y)-\Phi_{s,n}(y)]=x^{s-1}[\overline{F}_n(x)-\Phi_{s,n}(x)]-$$
$$-(s-1)\int\limits_{-\infty}^{x} y^{s-2}[\overline{F}_n(y)-\Phi_{s,n}(y)]\,dy.$$

Следовательно, для всех x верно соотношение

$$x^{s-1}[\overline{F}_n(x)-\Phi_{s,n}(x)]=\int\limits_{-\infty}^{x} y^{s-1}d[\overline{F}_n(y)-\Phi_{s,n}(y)]+$$
$$+(s-1)\int\limits_{-\infty}^{x} y^{s-2}[\overline{F}_n(y)-\Phi_{s,n}(y)]\,dy. \tag{18}$$

Пусть s — нечетное. Тогда, вводя обозначения

$$F^*(x)=\begin{cases}-F(x), & x\leqslant 0,\\ 1-F(x), & x>0,\end{cases}$$

получим, что

$$x^{s-1}[\overline{F}_n(x)-\Phi_{s,n}(x)]=\overline{V}_{1s}(x)-\overline{V}_{2s}(x), \tag{19}$$

где

$$\overline{V}_{1s}(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} y^{s-1}d\overline{F}_n(y)+(s-1)\int\limits_{-\infty}^{x} y^{s-2}\Phi^*_{s,n}(y)\,dy,$$

$$\overline{V}_{2s}(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} y^{s-1}d\Phi_{s,n}(y)+(s-1)\int\limits_{-\infty}^{x} y^{s-2}\overline{F}^*_n(y)\,dy.$$

Функции $\overline{V}_{1s}(x)$ и $\overline{V}_{2s}(x)$ — неотрицательны, не убывают и имеют ограниченные вариации. Кроме того, легко проверяются следующие соотношения:

1) $\overline{V}_{1s}(-\infty)=\overline{V}_{2s}(-\infty)$, $\overline{V}_{1s}(+\infty)=\overline{V}_{2s}(+\infty)$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\overline{V}_{1s}(x)-\overline{V}_{2s}(x)|\,dx<\infty$;

3) $\overline{V}'_{2s}(x)$ существует при всех x и $|\overline{V}'_{2s}(x)|\leqslant A_s$ (легко проверяется, что $\overline{V}_{2s}(x)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем 1).

Следовательно, функции $\overline{V}_{1s}(x)$ и $\overline{V}_{2s}(x)$ удовлетворяют условиям упомянутой теоремы Эссена.

Пусть s — четное. В этом случае при $x\leqslant 0$ из соотношения (18) получаем, что

$$x^{s-1}[F_n(x)-\Phi_{s,n}(x)]=\tilde V_{1s}(x)-\tilde V_{2s}(x), \tag{20}$$

где

$$\tilde V_{1s}(x)=-\int_{-\infty}^{x} y^{s-1}d\Phi_{s,n}(y)+(s-1)\int_{-\infty}^{x} y^{s-2}\bar F_n(y)\,dy,$$

$$\tilde V_{2s}(x)=-\int_{-\infty}^{x} y^{s-1}d\bar F_n(y)+(s-1)\int_{-\infty}^{x} y^{s-2}\Phi_{s,n}(y)\,dy.$$

При $x>0$ из соотношения (18) получаем следующее равенство:

$$x^{s-1}[\bar F_n(x)-\Phi_{s,n}(x)]=\tilde{\tilde V}_{1s}(x)-\tilde{\tilde V}_{2s}(x), \tag{21}$$

где

$$\tilde{\tilde V}_{1s}(x)=\tilde V_{1s}(0)+\int_0^x y^{s-1}d\bar F_n(y)+(s-1)\int_0^x y^{s-2}[1-\Phi_{s,n}(y)]\,dy,$$

$$\tilde{\tilde V}_{2s}(x)=\tilde V_{2s}(0)+\int_0^x y^{s-1}d\Phi_{s,n}(y)+(s-1)\int_0^x y^{s-2}[1-\bar F_n(y)]dy.$$

Обозначив через

$$\bar{\bar V}_{1s}(x)=\begin{cases}\tilde V_{1s}(x) & \text{при} \quad x\leqslant 0,\\ \tilde{\tilde V}_{1s}(x) & \text{при} \quad x>0,\end{cases} \qquad \bar{\bar V}_{2s}(x)=\begin{cases}\tilde V_{2s}(x) & \text{при} \quad x\leqslant 0,\\ \tilde{\tilde V}_{2s}(x) & \text{при} \quad x>0,\end{cases}$$

согласно соотношениям (20) и (21), имеем, что

$$x^{s-1}[\bar F_n(x)-\Phi_{s,n}(x)]=\bar{\bar V}_{1s}(x)-\bar{\bar V}_{2s}(x). \tag{22}$$

Функции $\bar{\bar V}_{1s}(x)$ и $\bar{\bar V}_{2s}(x)$ — неотрицательны, не убывают и имеют ограниченные вариации. Кроме того, легко проверяются следующие соотношения:

1) $\bar{\bar V}_{1s}(-\infty)=\bar{\bar V}_{2s}(-\infty)$, $\bar{\bar V}_{1s}(0)=\bar{\bar V}_{2s}(0)$, $\bar{\bar V}_{1s}(+\infty)=\bar{\bar V}_{2s}(+\infty)$;

2) $\int_{-\infty}^{\infty} |\bar{\bar V}_{1s}(x)-\bar{\bar V}_{2s}(x)|\,dx<\infty$;

3) при x_1, $x_2<0$ и $x_2>x_1$ имеем, что

$$\bar{\bar V}_{1s}(x_2)-\bar{\bar V}_{1s}(x_1)=-\int_{x_1}^{x_2} y^{s-1}d\Phi_{s,n}(y)+(s-1)\int_{x_1}^{x_2} y^{s-2}\bar F_n(y)\,dy.$$

Но $y^{s-1}d\Phi_{s,n}(y)=y^{s-1}\varphi_{s,n}(y)\,dy$ и $|y^{s-1}\varphi_{s,n}(y)\leqslant A(s)$. Кроме того, при $y<-1$ будет верно неравенство

$$y^{s-2}\bar F_n(y)\leqslant y^{s-2}P\{\bar S_n\geqslant|y|\}\leqslant \int_{|x|>|y|} |x|^{s-2}d\bar F_n(x)\leqslant B(s).$$

Итак, $|y^{s-2}\bar F_n(y)|\leqslant B(s)$ при $y\leqslant 0$, откуда следует, что при $x_1<x_2<0$ справедлива оценка

$$\bar{\bar V}_{1s}(x_2)-\bar{\bar V}_{1s}(x_1)\leqslant A(s)(x_2-x_1)+(s-1)B(s)(x_2-x_1),$$

а, следовательно, и

$$|\bar{\bar V}{}'_{1s}(x)|\leqslant A(s)+(s-1)B(s)=A_1(s), \qquad (x<0).$$

3. При $x_2 > x_1 > 0$ имеем, что

$$\overline{\overline{V}}_{2s}(x_2) - \overline{\overline{V}}_{2s}(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} y^{s-1} d\Phi_{s,n}(y) + (s-1) \int_{x_1}^{x_2} y^{s-2} [1 - \overline{F}_n(y)]\, dy.$$

Точно также получаем неравенство

$$|\overline{\overline{V}}{}'_{2s}(x)| \leqslant A_1(s) \quad \text{при} \quad x > 0.$$

Следовательно, функции $\overline{\overline{V}}_{1s}(x)$ и $\overline{\overline{V}}_{2s}(x)$ удовлетворяют $1-4$ условиям теоремы седьмой, когда s – четное.

Обозначив через

$$V_{js}(x) = \begin{cases} \overline{V}_{js}(x), & \text{когда } s \text{ – нечетное,} \\ \overline{\overline{V}}_{js}(x), & \text{когда } s \text{ – четное,} \qquad j = 1,\ 2, \end{cases}$$

согласно соотношениям (19) и (22) получаем, что

$$x^{s-1} [\overline{F}_n(x) - \Phi_{s,n}(x)] = V_{1s}(x) - V_{2s}(x). \tag{23}$$

В выражении (23) функции $V_{1s}(x)$ и $V_{2s}(x)$ удовлетворяют условиям выписанной теоремы Эссена, когда s – нечетное, и условиям теоремы седьмой, когда s – четное.

Разность соответствующих им трансформаций Фурье, согласно соотношению (23), выражается следующим образом:

$$v_{1s}(t) - v_{2s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\{x^{s-1} [\overline{F}_n(x) - \Phi_{s,n}(x)]\}.$$

Теперь вычислим эту разность. Имеем

$$v_{1s}(t) - v_{2s}(t) = (-i)^{s-1} \left[\frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}} \left(\bar{f}_n(t) - h_{s,n}(t) \right) \right] +$$

$$+ (s-1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} x^{s-2} [\overline{F}_n(x) - \Phi_{s,n}(x)]\, dx.$$

Так как существует s-ый момент для $\overline{F}_n(x)$ и для $\Phi_{s,n}(x)$, то методом индукции легко получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} x^{s-2} [\overline{F}_n(x) - \Phi_{s,n}(x)]\, dx = \sum_{\nu=0}^{s-2} \frac{(s-2)!\, i^{s-1-2\nu}}{\nu!\, t^{s-1-\nu}} \frac{d^\nu}{dt^\nu} [\bar{f}_n(t) - h_{s,n}(t)].$$

Следовательно, имеем

$$v_{1s}(t) - v_{2s}(t) = \sum_{\nu=0}^{s-1} \frac{(s-1)!\, i^{s-2\nu-1}}{\nu!\, t^{s-1-\nu}} \frac{d^\nu}{dt^\nu} [\bar{f}_n(t) - h_{s,n}(t)],$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} [V_{1s}(x) - V_{2s}(x)]\, dx = \sum_{\nu=0}^{s-1} \frac{(s-1)!\, i^{s-2\nu}}{\nu!\, t^{s-\nu}} \frac{d^\nu}{dt^\nu} [\bar{f}_n(t) - h_{s,n}(t)].$$

Согласно теореме Эссена при s – нечетном и теореме седьмой при s – четном, получаем следующее неравенство:

$$|V_{1s}(x) - V_{2s}(x)| \leqslant \frac{k}{2\pi} \int_{-T}^{T} \sum_{\nu=0}^{s-1} \frac{(s-1)!}{\nu!} |t|^{\nu-s} \left| \frac{d^\nu}{dt^\nu} [\bar{f}_n(t) - h_{s,n}(t)] \right| dt + c(k) \frac{A_1(s)}{T}.$$

Выбрав $T=L_{sn}^{-(1+\delta)}$ и используя соотношение (23), получаем, что

$$|x|^{s-1}|\bar{F}_n(x)-\Phi_{s,n}(x)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{k(s-1)}{2\pi}\int\limits_{|t|\leqslant L_{sn}^{-(1+\delta)}}\sum_{\nu=0}^{s-1}\frac{|t|^{\nu-s}}{\nu!}\left|\frac{d^\nu}{dt^\nu}[\bar{f}_n(t)-h_{s,n}(t)]\right|dt+c(k)A_1(s)L_{sn}^{(1+\delta)}. \tag{24}$$

Оцениваем интеграл

$$\varepsilon=\int\limits_{|t|\leqslant L_{sn}^{-(1+\delta)}}\sum_{\nu=0}^{s-1}\frac{|t|^{\nu-s}}{\nu!}\left|\frac{d^\nu}{dt^\nu}[\bar{f}_n(t)-h_{s,n}(t)]\right|dt\leqslant\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4, \tag{25}$$

где

$$\varepsilon_1=\int\limits_{|t|\leqslant L_{sn}^{-1/3(s-2)+\gamma}}\sum_{\nu=0}^{s-1}\frac{|t|^{\nu-s}}{\nu!}\left|\frac{d^\nu}{dt^\nu}[\bar{f}_n(t)-h_{s,n}(t)]\right|dt,$$

$$\varepsilon_2=\int\limits_{|t|>L_{sn}^{-1/3(s-2)+\gamma}}\sum_{\nu=0}^{s-1}\frac{|t|^{\nu-s}}{\nu!}\left|\frac{d^\nu}{dt^\nu}h_{s,n}(t)\right|dt,$$

$$\varepsilon_3=\int\limits_{L_{sn}^{-1/3(s-2)+\gamma}<|t|\leqslant cL_{sn}^{-1}}\sum_{\nu=0}^{s-1}\frac{|t|^{\nu-s}}{\nu!}\left|\frac{d^\nu}{dt^\nu}\bar{f}_n(t)\right|dt,$$

$$\varepsilon_4=\int\limits_{cL_{3n}^{-1}<|t|\leqslant L_{sn}^{-(1+\delta)}}\sum_{\nu=0}^{s-1}\frac{|t|^{\nu-s}}{\nu!}\left|\frac{d^\nu}{dt^\nu}\bar{f}_n(t)\right|dt,$$

По теореме шестой при $|t|\leqslant L_{sn}^{-1/3(s-2)+\gamma}$ имеем неравенство

$$|t|^{\nu-s}\left|\frac{d^\nu}{dt^\nu}[\bar{f}_n(t)-h_{s,n}(t)]\right|\leqslant\delta_\nu(B_n,\ B_{sn})e^{-\frac{t^2}{3}}\{1+|t|^{2(s-3)+2\nu+1}\}L_{sn},$$

где $\delta_\nu(B_n,\ B_{sn})\to 0$, когда $n\to\infty$; $\nu=0,\ 1,\ \ldots,\ s-1$. Следовательно, при $|t|\leqslant L_{sn}^{-1/3(s-2)+\gamma}$ верна оценка:

$$\sum_{\nu=0}^{s-1}\frac{|t|^{\nu-s}}{\nu!}\left|\frac{d^\nu}{dt^\nu}[\bar{f}_n(t)-h_{s,n}(t)]\right|\leqslant\bar{\delta}(B_n,\ B_{sn})\ e^{-\frac{t^2}{3}}L_{sn}\{1+|t|^{4(s-2)+1}\}.$$

Используя эту оценку, получаем соотношение

$$\varepsilon_1=o(L_{sn}),\qquad (n\to\infty). \tag{26}$$

Согласно определению $h_{s,n}(t)$ имеем, что и

$$\varepsilon_2=o(L_{sn}),\qquad (n\to\infty). \tag{27}$$

По лемме первой при $L_{sn}^{-1/3(s-2)+\gamma}<|t|\leqslant cL_{3n}^{-1}$ получаем следующее неравенство:

$$\sum_{\nu=0}^{s-1}\frac{|t|^{\nu-s}}{\nu!}\left|\frac{d^\nu}{dt^\nu}\bar{f}_n(t)\right|\leqslant B(s)e^{-\frac{t^2}{4}}|t|^{s-2}.$$

Следовательно, имеет место соотношение

$$\varepsilon_3=o(L_{sn}),\qquad (n\to\infty). \tag{28}$$

В (7) доказано, что

$$\left|\frac{d^\nu}{dt^\nu}\bar{f}_n(t)\right| \leqslant B(\nu)\{1+|t|^\nu\} \max_{1\leqslant k_1\neq\ldots\neq k_{s-1}\leqslant n} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq k_1\neq\ldots\neq k_{s-1}}}^{n} \left|f_r\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|,$$

$$\nu=0,\ 1,\ \ldots,\ s.$$

Используя эти соотношения, заключаем, что при $cL_{3n}^{-1}<|t|\leqslant L_{sn}^{-(1+\delta)}$ имеет место неравенство

$$\sum_{\nu=0}^{s=1} \frac{|t|^{\nu-s}}{\nu!}\left|\frac{d^\nu}{dt^\nu}\bar{f}_n(t)\right| \leqslant B_1(s)|t|^{s-2} \max_{1\leqslant k_1\neq\ldots\neq k_{s-1}\leqslant n} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq k_1\neq\ldots\neq k^s_{-1}}}^{n} \left|f_r\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|.$$

Итак, имеем, что

$$\varepsilon_4 \leqslant B_1(s)B_n^{s-1} \int\limits_{cg^{\frac{1}{s-2}}\leqslant|t|\leqslant\frac{B_n^s}{B_{sn}}} |t|^{s-2} \max_{1\leqslant k_1\neq\ldots\neq k_{s-1}\leqslant n} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq k_1\neq\ldots\neq k_{s-1}}}^{n} |f_r(t)|\,dt.$$

Используя оценки (16), при $|t|\geqslant cg^{\frac{1}{s-2}}$ получаем неравенство

$$\max_{1\leqslant k_1\neq\ldots\neq k_{s-1}\leqslant n} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq k_1\neq\ldots\neq k_{s-1}}}^{n} |f_r(t)| \leqslant e^{\bar{\alpha}(s-1)}\exp\left\{-\alpha\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon_4 \leqslant L_{sn}\frac{B_1(s)B_n^{s^2}}{B_{sn}^2}\exp\left\{-\bar{\alpha}\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}.$$

Из условия четвертого теоремы следует, что

$$\exp\left\{-\bar{\alpha}\sum_{k=1}^{n} a_k\right\} \leqslant B_n^{-\bar{\alpha}N_n},\quad \text{где}\quad N_n\to\infty,\quad \text{когда}\quad n\to\infty.$$

Итак, имеем соотношение

$$\varepsilon_4 = o(L_{sn}),\qquad (n\to\infty). \tag{29}$$

Из соотношений (25)—(29) следует, что

$$\varepsilon = o(L_{sn}),\qquad (n\to\infty).$$

Используя это соотношение, согласно (24) мы можем написать, что

$$|x|^{s-1}|\bar{F}_n(x)-\Phi_{s,n}(x)| = o(L_{sn}),\qquad (n\to\infty).$$

Этим соотношение (10) доказано, а, следовательно, доказано и утверждение (3) теоремы.

При доказательстве теоремы третьей все рассуждения аналогичны. Только при оценках интегралов I_4 и ε_4 надо воспользоваться не (16) неравенствами, а несколько модифицированными.

Используя лемму вторую, согласно условию 2а, получаем следующие неравенства:

$$|f_k(t)|^{\nu_k} \leqslant \begin{cases} \exp\left\{-\dfrac{\alpha_1 a_{\nu_k}}{\bar{C}_{\nu_k}^2\bar{\sigma}_{\nu_k}^2}\right\} & \text{при}\quad |t|\geqslant\pi\bar{\sigma}_{\nu_k}^{-1},\\[2ex] \exp\left\{-\dfrac{\alpha_2 a_{\nu_k}t^2}{\bar{C}_{\nu_k}^2}\right\} & \text{при}\quad |t|<\pi\bar{\sigma}_{\nu_k}^{-1},\qquad k=1,\ 2,\ \ldots \end{cases}$$

Отсюда, используя условие 3а, имеем, что при $|t|>cg^{\frac{1}{s-1}}$ верны оценки

$$|f_k(t)|\leqslant \exp\left\{-\frac{\tilde{\alpha}\, a_{\nu_k}}{\nu_k}\right\},\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,$$

где

$$\tilde{\alpha}=\min\left\{\frac{\alpha_1}{M},\ \frac{\alpha_2 c^2 g^{\frac{2}{s-2}}}{C^2}\right\}.$$

Этими неравенствами и следует воспользоваться при оценке интегралов I_4 и ε_4.

Теоремы четвертая и пятая доказываются возведением в степень и интегрированием соответствующих выражений.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить В. А. Статулявичюса за внимание к настоящей работе.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
23.IV.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М., 1949 Л.
2. Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, Москва, 1947.
3. В. В. Петров. Асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее примен., 4, 2 (1959), 220–224.
4. В. А. Статулявичюс, Об асимптотическом разложении характеристической функции суммы независимых случайных величин, Лит. мат. сб, 2, 2 (1962).
5. П. Сурвила, Остаточный член в асимптотическом разложении для плотностей, Лит. мат. сб., 2, 2 (1962).
6. П. Сурвила, О локальной предельной теореме для плотностей, Лит. мат. сб., 3, 1 (1963).
7. П. Сурвила, Асимптотические разложения для плотностей, Лит. мат. сб., 3, 2 (1963).

NEPRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ NORMUOTOS SUMOS PASISKIRSTYMO FUNKCIJOS ASIMPTOTINIS IŠDĖSTYMAS

P. SURVILA

(*Reziumė*)

Darbe įrodomas nepriklausomų atsitiktinių dydžių normuotos sumos pasiskirstymo funkcijos simptotinis išdėstymas, įvertinant liekamąjį narį n atžvilgiu ir x atžvilgiu. Pirmoji teorema paskirta vienodai pasiskirsčiusiems, antroji – nevienodai pasiskirsčiusiems dėmenims.

DIE ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNG FÜR DIE VERTEILUNGSFUNKTION DER NORMIERTEN SUMMEN UNABHÄNGIGER ZUFALLSGRÖßEN

P. SURWILA

(*Zusammenfassung*)

Im vorliegenden Artikel wird die asymptotische Entwicklung mit Restglied, der von n und von x abhängt, für die Verteilungsfunktion der normierten Summen unabhängiger Zuallsgrößen gegeben (Theoremen 1 und 2).