V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1965

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЦ ПРИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ ДЕЙСТВИЯХ СО СТЕПЕННЫМИ РЯДАМИ

А. ЯСЮЛЁНИС

„Развитие современных цифровых вычислительных машин, легко осуществляющих основные матричные операции, сообщило дополнительный толчок широкому использованию матриц в различных областях знания" [I, стр. 305, 484]. Применяя матричную запись степенных рядов, аналогичную запись тригонометрических рядов [3], в работе получены алгорифмы в матричной форме, удобной для программирования и для решения некоторых обратных задач.

1. Матричная запись. Множество: $x^0,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n, \ldots$ будем считать координатами ∞-мерного вектора, который назовем степенным и обозначим

$$(x^n)=(1,\ x,\ \ldots,\ x^n, \ldots). \tag{1}$$

Из коэффициентов степенного ряда составляем вектор коэффициентов

$$(a)=(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n, \ldots). \tag{2}$$

Тогда степенной ряд запишем ввиде скалярного произведения ∞-мерных векторов (1) и (2)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=(a)\cdot(x^n). \tag{3}$$

От записи (3) нетрудно перейти к матричной записи

$$f(x)=[a]\{x^n\}=[x^n]\{a\}, \tag{4}$$

где первый множитель матрица-строка, а второй матрица-столбец, обозначенный в фигурных скобках. В дальнейшем будем пользоваться первой записью (4).

2. Умножение рядов. Ряд (4) умножаем на ряд

$$\varphi(x)=[b]\{x^n\}, \tag{5}$$

вектор коэффициентов которого задан. Искомый вектор коэффициентов произведения рядов обозначим $[c]$. Нетрудно видеть, что его можно выразить двояко

$$[c]=[a][D(b)]=[b][D(a)], \tag{6}$$

где

$$[D(b)]=\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \ldots \\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots \\ 0 & 0 & b_0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$[D(a)]=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots \\ 0 & 0 & a_0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}. \tag{7a}$$

3. Деление рядов. Искомый вектор коэффициентов частного рядов обозначим $[w]$. Пусть

$$[a]\{x^n\}([b]\{x^n\})^{-1}=[w]\{x^n\}.$$

Применяя (6), получаем

$$[a]=[w][D(b)].$$

Если $b_0 \neq 0$, то обратная матрица к матрице (7) является невырожденной, и последнее равенство справа умножаем на нее. Получаем

$$[w]=[a][D(b)]^{-1}. \tag{8}$$

Возьмем матрицу (7) порядка n. Тогда элементы единичной матрицы, выраженные по правилам умножения матриц (7) и $[D(b)]^{-1}$, дают n^2 уравнений, из которых можно определить все элементы обратной матрицы. Из этих уравнений нетрудно заключить, что обратная матрица треугольная с одинаковыми элементами, лежащими на линиях параллельных диагоналей, как и матрица (7). Элементы первой строки обратной матрицы обозначим: v_0, $v_1, \ldots, v_{n-1}$.

Умножая первую строку матрицы (7) на первый, второй, третий и т.д. столбцы обратной матрицы, получаем n уравнений

$$1)\ b_0v_0=1,\quad 2)\ b_0v_1+b_1v_0=0,\ \ldots,\ n)\ b_0v_{n-1}+b_1v_{n-2}+\ldots+b_{n-1}v_0=0. \tag{9}$$

Используя миноры определителя матрицы (7)

$$d_1=b_1;\quad d_2=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix};\ \ldots\qquad d_{n-1}=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-2} \\ 0 & b_0 & \ldots & b_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_0 \end{vmatrix},$$

сокращаем запись уравнения (9), определяющего элементы обратной матрицы:

$$1)\ b_0v_0=1,\quad 2)\ b_0^2v_1=-d_1,\ \ \ldots,\ n)\ b_0^nv_{n-1}=(-1)^{n-1}d_{n-1}. \tag{9a}$$

Составляем обратную матрицу, которая является оператором деления рядов

$$[D(b)]^{-1}=\begin{vmatrix} b_0^{-1} & -b_0^{-2}d_1 & \ldots & (-1)^{n-1}b_0^{-n}\ d_{n-1} \\ 0 & b_0^{-1} & \ldots & (-1)^{n-2}b_0^{-n+1}d_{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & (-1)^{n-3}b_0^{-n+2}d_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}. \tag{10}$$

4. Возведение в степень. Ряд (4) возведем в степень $q=2, 3, 4\ldots$ Вектор коэффициентов полученного ряда обозначим $[a^{(q)}]$. При $[a]=[b]$ путем применения алгорифма (6) $q-1$ раз получаем

$$[a^{(q)}]=[a][D(a)]^{q-1}. \tag{11}$$

Треугольная матрица оператора имеет вид (7) и для ее составления достаточно найти n элементов первой строки. При последовательном возведении в степень $(q-1)$ в конечном итоге расчет по (11) требует определения $(q-1)$ n координат или элементов. Это количество вычислительной работы можно уменьшить путем использования нижеуказанных свойств матрицы оператора возведения в степень.

Свойство I. Вектор коэффициентов $[a^{(q)}]$ ряда, возведенного в степень q, можно получить при помощи линейных преобразований вектора $[a^{(k)}]$, где $1 \leqslant k < q-1$.

Из (11)

$$[a^{(k)}] = [a]\,[D(a)]^{k-1}. \qquad (a)$$

В (11) матрицу $[D(a)]^{q-1}$ заменяем произведением $[D(a)]^{k-1}\,[D(a)]^{q-k}$ и, используя (a), получаем

$$[a^{(q)}] = [a^{(k)}]\,[D(a)]^{q-k}. \qquad (12)$$

Следствие. Если $q = k_1 + k_2 + \ldots + k_i + \ldots + k_l$, то

$$[a^{(q)}] = [a^{(k_i)}]\,[D(a)]^{k_1}\,[D(a)]^{k_2}\ldots[D(a)]^{k_{i-1}}\,[D(a)]^{k_{i+1}}\ldots[D(a)]^{k_l}. \qquad (13)$$

(13) уменьшает трудоемкость расчета по сравнению с (11), если известна хотя бы одна степень $[D(a)]$.

Свойство II. Строки матрицы $[D(a)]^k$ порядка n составляют все координаты или часть координат n-мерного вектора $[a^{(k)}]$.

n-мерный вектор коэффициентов ряда (4), возведенного в степень q, записываем

$$[a^{(q)}] = [a_0^{(q)},\ a_1^{(q)},\ a_2^{(q)}\ \ldots\ a_{n-1}^{(q)}].$$

Сравниваем два выражения $[a^{(q+1)}]$: одно, полученное умножением ряда (4) на ряд $[a^{(q)}]\{x^n\}$ по (6), и другое, полученное путем применения (11). Получаем

$$[D(a)]^q = [D(a^{(q)})] = \begin{bmatrix} a_0^{(q)} & a_1^{(q)} & a_2^{(q)} & \ldots & a_{n-1}^{(q)} \\ 0 & a_0^{(q)} & a_1^{(q)} & \ldots & a_{n-2}^{(q)} \\ 0 & 0 & a_0^{(q)} & \ldots & a_{n-3}^{(q)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0^{(q)} \end{bmatrix}. \qquad (14)$$

Очевидно и обратное: первая строка матрицы $[D(a)]^q$ является вектором $[a^{(q)}]$. Это можно записать следующим образом

$$[a^{(q)}] = [1,\ 0,\ 0\ \ldots]\,[D(a)]^q. \qquad (15)$$

Пример. Дано $[a]$. Найти 10 координат вектора $[a^{(9)}]$. Расчет по (11) потребует определения всего $8 \cdot 10 = 80$ координат (элементов).

Принимаем $k_1 = k_2 = k_3 = 3$ и применяем алгорифм (13)

$$[a^{(9)}] = [a^{(3)}]\,[D(a)]^3\,[D(a)]^3. \qquad (б)$$

Для получения $[a^{(3)}]$ необходимо вычислить 20 координат (элементов). После этого составляем матрицу $[D(a)]^3$ и производим остальные операции, которые потребуют определить еще 20 координат (элементов). Следовательно, трудоемкость расчета по (б) в два раза меньше, чем по (11).

Применяя (11), находим

$$[a^{(2)}] = 2\left[\frac{a_0^2}{2},\ a_0 a_1,\ \left(a_0 a_2 + \frac{a_1^2}{2}\right), (a_0 a_3 + a_1 a_2),\ \ldots\ (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \ldots), \ldots\right], \qquad (16)$$

$$[a^{(3)}] = 3\left[\frac{a_0^3}{3},\ a_0^2 a_1,\ (a_0^2 a_2 + a_0 a_1^2),\ \left(a_0^2 a_3 + 2 a_0 a_1 a_2 + \frac{a_1^3}{3}\right),\ (a_0^2 a_4 + \right.$$
$$\left. + 2 a_0 a_1 a_3 + a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2),\ (a_0^2 a_5 + 2 a_0 a_1 a_4 + 2 a_0 a_2 a_3 + a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2),\ \ldots\right]. \qquad (17)$$

5. Отрицательные целые степени. Допустим, что требуется определить вектор коэффициентов $[a^{(-q)}]$ ряда (4), возведенного в степень $(-q)$.

Единицу делим на ряд (4), возведенный в степень (q). Для этого применяем алгорифм (8), где вместо $[a]$ вставим единичный вектор. Получаем

$$[a^{(-q)}]=[1,\ 0,\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots][D(a^{(q)})]^{-1}. \tag{18}$$

6. Дробные степени. Принимаем показатель степени $q=\frac{r}{s}$. Вектор коэффициентов ряда (4), возведенного в степень $\frac{1}{s}$, обозначаем $[\alpha]$. Тогда

$$([a]\{x^n\})^{\frac{1}{s}}=[\alpha]\{x^n\}.$$

Последнее равенство возводим в степень s и получаем

$$[a]=[\alpha^{(s)}]. \tag{19}$$

Искомым координатам последнего вектора можно придать вид аналогичный (16) и (17). При размерности векторов, равной n, векторное уравнение (19) дает n скалярных уравнений, из которых последовательно определяем n координат $[\alpha]$.

Пример. Дано $[a]=[a_0,\ a_1,\ a_2\ \ldots]$ и $s=3$. Требуется определить $[\alpha]$.

Из (17) и (19) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
a_0&=\alpha_0^3,\\
a_1&=3\,\alpha_0^2\,\alpha_1,\\
a_2&=3\,\alpha_0^2\,\alpha_2+3\,\alpha_0\,\alpha_1^2,\\
a_3&=3\,\alpha_0^2\,\alpha_3+6\,\alpha_0\,\alpha_1\,\alpha_2+\alpha_1^3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{19a}$$

— из которых последовательно определяем $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots$

7. Подстановка ряда в ряд. Дана сложная функция

$$\psi(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n y^n=[\beta]\{y^n\}, \tag{20}$$

где

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n=[\alpha]\{x^n\}. \tag{21}$$

Следует подставить функцию (21) в ряд (20) и получить ряд сложной функции от x, вектор коэффициентов которого обозначаем $[\varphi]$.

Используя обозначение вектора коэффициентов ряда, возведенного в степень n, запишем искомый вектор

$$[\varphi]=\beta_0[1,\ 0,\ 0\ \ldots]+\beta_1[\alpha]+\beta_2[\alpha^{(2)}]+\ldots+\beta_n[\alpha^{(n)}]+\ldots=[\beta]\{[\alpha^{(n)}]\}. \tag{22}$$

Фигурные скобки обозначают столбец, элементы которого являются векторами: первый элемент — единичным вектором, второй элемент — вектором коэффициентов $[\alpha]$ ряда функции (21), третий — вектором коэффициентов $[\alpha^{(2)}]$ ряда функций (21), возведенной в квадрат, четвертый — $[\alpha^{(3)}]$ и т.д. Такой столбец составляет матрицу $[P]$ оператора подстановки ряда в ряд

$$[P]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots \\ \alpha_0^{(2)} & \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \alpha_3^{(2)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_0^{(n)} & \alpha_1^{(n)} & \alpha_2^{(n)} & \alpha_3^{(n)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Из (22) и (23) получаем

$$[\varphi]=[\beta][P]. \tag{24}$$

Нетрудно решается и обратная задача. Допустим (24), что дано (21) при условии $\alpha_0=0$, $\alpha_1\neq 0$ и

$$\psi(x)=[\varphi]\{x^n\}.$$

Для получения вектора коэффициентов $[\beta]$ ряда $\psi(y)$ умножаем справа левую и правую части равенства (24) на обратную матрицу. Получаем

$$[\beta]=[\varphi][P]^{-1}. \tag{25}$$

Если $\psi(x)=x$, то из (25) следует, что вторая строка $[P]^{-1}$ является вектором коэффициентов обращенного степенного ряда.

Пример 1. Дано $\psi(y)=\ln(1+y)=[\beta]\{y^n\}$ и $y(x)=\sin x=[\alpha]\{x^n\}$, $[\beta]= =[0,\ 1,\ -^1/_2,\ ^1/_3,\ -^1/_4,\ ^1/_5,\ -^1/_6]$ и $[\alpha]=[0,\ 1,\ 0,\ -^1/_6,\ 0,\ ^1/_{120},\ 0]$.

Найти ряд сложной функции ψ от аргумента x с точностью до седьмой координаты включительно.

По (16), (17) или (11) находим векторы коэффициентов $[\alpha^{(2)}]$ и $[\alpha^{(3)}]$ функции y^2 и y^3. После использования (12) и (13) получаем $[\alpha^{(4)}]$, $[\alpha^{(5)}]$ и $[\alpha^{(6)}]$ и составляем матрицу (23)

$$[P]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{120} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{45} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Умножая заданный вектор $[\beta]$ на полученный оператор, определяем вектор коэффициентов $[\varphi]$ ряда $\psi(x)$

$$[\varphi]=\left[0,\ 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{12},\ \frac{1}{24},\ -\frac{1}{45}\right]. \tag{a}$$

Пример 2. Дано: $\psi(x)$ и $y(x)$, т. е. $[\varphi]$ и $[\alpha]$, численные значения которых, как и в примере 1. Найти вектор коэффициентов $[\beta]$ ряда $\psi(y)$.

Находим обратную матрицу

$$[P]^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{3}{40} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{8}{45} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и по (25) получаем $[\beta]$.

8. Прореженные и уплотненные ряды. Степенной ряд (4) и тригонометрические ряды [3] назовем прореженными рядами четного порядка, если $n=2v$ $(v=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$.

При $n=2v+1$ ряды будем называть прореженными рядами нечетного порядка.

Степенные и тригонометрические векторы прореженных рядов имеют нулевые координаты, которые чередуются с ненулевыми. При действиях с прореженными рядами удобно пропустить не записывая их нулевые координаты этих векторов и соответствующие им координаты вектора коэффициентов. Записанные таким образом ряды будем называть уплотненными рядами.

Векторы коэффициентов уплотненных рядов обозначим звездочками: одной – если пропущены координаты нечетных порядковых номеров (1-ая, 3-ья и т. д.), двумя – если пропущены координаты четных порядковых номеров.

Матрицы оператора для уплотненных рядов получаем из соответствующих матриц оператора непрореженных рядов, путем вычеркивания из последних строк, соответствующих незаписанным (нулевым) координатам вектора коэффициентов, который преобразует оператор. Вычеркиваем также полученные после этого нулевые столбцы. Если после вычеркивания строк не получаем нулевых столбцов, чередующихся с нулевыми, то полученный ряд будет непрореженным. Полученные матрицы обозначаем тем же символом со звездочками, как и векторы коэффициентов.

9. Преобразование рядов при $x=\cos\alpha$ и $x=\sin\alpha$. Пусть радиус сходимости степенного ряда (4) $R\geqslant 1$ и $x=\cos\alpha$. Тогда

$$f(\alpha)=[a]\{\cos^n\alpha\}. \tag{26}$$

Преобразуем степенной столбец, используя формулы тригонометрии. Пол

$$\{\cos^n\alpha\}=[F]\{\cos n\alpha\}, \tag{27}$$

где

$$[F]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 2^{-2}C_2^1 & 0 & 2^{-1} & 0 & \dots \\ 0 & 2^{-2}C_3^1 & 0 & 2^{-2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2^{-2v}C_{2v}^v & 0 & 2^{-2v+1}C_{2v}^{v-1} & 0 & \dots \\ 0 & 2^{-2v}C_{2v+1}^v & 0 & 2^{-2v}C_{2v+1}^{v-1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \qquad (27a)$$

После подстановки (27) в (26) или умножения слева правой и левой части равенства (27) на матрицу-строку $[a]$ получаем

$$f(\alpha)=[a]\,[F]\,\{\cos n\alpha\}. \qquad (28)$$

Для получения обратного преобразования левую и правую части равенства (27) умножаем слева на обратную матрицу. Получаем

$$\{\cos n\alpha\}=[F]^{-1}\{\cos^n\alpha\}. \qquad (29)$$

Матрицу $[F]^{-1}$ можно получить так же, как и (27а).

Для уплотненных рядов четного или нечетного порядка

$$\{\cos^{2v}\alpha\}=[F]^{**}\{\cos 2v\alpha\}, \qquad (30)$$

$$\{\cos^{2v+1}\alpha\}=[F]^{*}\{\cos(2v+1)\alpha\} \qquad (31)$$

легко получить и обратное преобразование вида (29).

Левую и правую часть равенства (30) умножаем на скалярный множитель $\cos\alpha$. Используя оператор [cocos 1], указанный в [3], получаем

$$[F]^{*}=[F]^{**}[\text{cocos }1]^{**}, \qquad (32)$$

где

$$[\text{cocos }1]^{**}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Столбец левой части равенства (30) преобразуем путем применения бинома Ньютона для $\cos^{2v}\alpha=(1-\sin^2\alpha)^v$. Получаем

$$\{\cos^{2v}\alpha\}=[I]\{\sin^{2v}\alpha\} \qquad (v=0,\ 1,\ 2,\ 3\ \dots), \qquad (33)$$

где

$$[I]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -C_1^1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -C_2^1 & C_2^2 & 0 & \dots \\ 1 & -C_3^1 & C_3^2 & -C_3^3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -C_v^1 & C_v^2 & -C_v^3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \qquad (33a)$$

После возведения последней матрицы в квадрат, получаем единичную матрицу. Следовательно

$$[I]=[I]^{-1}. \qquad (34)$$

Из (30), (33) и (34) получаем

$$\{\sin^{2v}\alpha\}=[I]\,[F]^{**}\{\cos 2v\alpha\}. \qquad (35)$$

Кроме (34) матрица (33а) обладает еще одним свойством: после замены знака всех элементов 2-го, 4-го и 6-го и т. д. столбцов матрицы $[F]^{**}$ на противоположный, получим произведение матриц $[I][F]^{**}$.

Путем умножения левой и правой части последнего равенства на $\sin\alpha$ и используя оператор [cosin 1] такого умножения [3], получаем

$$\{\sin^{2v+1}\alpha\}=[I][F]^{**}[\text{cosin }1]^{**}\{\sin(2v+1)\alpha\}, \tag{36}$$

где

$$[\text{cosin }1]^{**}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}.$$

Произведение матриц равенства (35) обозначим (G), а равенства (36) — $[H]$. Тогда

$$\{\cos 2v\alpha\}=[G]^{-1}\{\sin^{2v}\alpha\} \tag{37}$$

и

$$\{\sin(2v+1)\alpha\}=[H]^{-1}\{\sin^{2v+1}\alpha\}. \tag{38}$$

Умножая матричные равенства (29), (30), (31), (33), (35), (36), (37) и (38) слева на вектор коэффициентов, получаем алгорифмы преобразования степенных рядов при $x=\cos\alpha$ или $x=\sin\alpha$ в тригонометрические или наоборот. Матрицы операторов этих преобразований получаем при помощи 4 матриц, из которых только $[F]^{**}$ найдено с помощью тригонометрических формул.

Матричная форма преобразований рядов и полиномов дает алгорифмы обратных преобразований простого вида.

10. Полином Чебышева. Возьмем N-тый полином Чебышева, где $N=2k+r$ и $r=0$ или 1,

$$T_N(x)=x^N-C_N^2x^{N-2}(1-x^2)+\ldots+(-1)^jC_N^{2j}x^{N-2j}(1-x^2)^j+\ldots \tag{39}$$

Запишем его в матричной форме

$$T_N(x)=[c]\{\bar{x}\}, \tag{40}$$

$$[c]=[1,\ -C_N^2,\ \ldots\ (-1)^jC_N^{2j}\ \ldots\ (-1)^kC_N^{2k}], \tag{40a}$$

$$\{\bar{x}\}=\{x^N,\ x^{N-2}(1-x^2)\ \ldots\ x^{N-2j}(1-x^2)^j\ \ldots\}. \tag{40б}$$

Последний вектор выразим через степенной вектор $\{x^{N-2j}\}$

$$\}=[R]_N\{x^{N-2j}\}\qquad (j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ k), \tag{41}$$

где

$$[R]_N=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ -C_1^1 & 1 & 0 & \ldots \\ C_2^2 & -C_2^1 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (-1)^kC_k^k & (-1)^{k-1}C_k^{k-1} & (-1)^{k-2}C_k^{k-2} & \ldots \end{bmatrix}. \tag{41a}$$

После умножения слева правой и левой частей равенства (41) на обратную матрицу получаем

$$\{x^{N-2j}\}=[R]_N^{-1}\{x\}. \tag{42}$$

Пользуясь последним преобразованием, полином

$$P_N(x) = x^N + d_{N-2}x^{N-2} + \ldots + d_{N-2j}x^{N-2j} + \ldots = [d]\{x^{N-2j}\}, \tag{43}$$

где

$$[d] = [1, d_{N-2}, \ldots, d_{N-2j}, \ldots, d_{N-2k}],$$

имеющий степенной вектор

$$\{x^{N-2i}\} = \{x^N, x^{N-2}, \ldots, x^{N-2j}, \ldots, x^{N-2k}\},$$

преобразуем в полином с вектором $\{\bar{x}\}$. Для этого в (43) подставляем значение (42) и получаем

$$P_N(x) = [d][R]_N^{-1}\{\bar{\ }\}, \tag{44}$$

где степенной вектор $\{\bar{x}\}$ такой же, как и у полинома Чебышева (39).

Литовская сельскохозяйственная академия

Поступило в редакцию 15.V.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Ф. Беккенбах, под ред. Современная математика для инженеров, Издат. иностр. литературы, 1959.
2. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II, Гостехиздат, 1959.
3. А. И. Ясюлёнис, Применение матриц при алгебраических действиях тригонометрических рядов. Лит. мат. сб., т. III, вып. 2, 1964.

MATRICŲ TAIKYMAS LAIPSNINIŲ EILUČIŲ ALGEBRINIAMS IR KAI KURIEMS KITIEMS VEIKSMAMS ATLIKTI

A. JASIULIONIS

(Reziumė)

Autoriaus pasiūlytą matricinių eilučių užrašymo būdą [3] taikant laipsninėms eilutėms (3), gaunami žemiau išvardyti algoritmai, kaip tiesinė transformacija afininėje erdvėje, būtent: eilučių daugybos (6) ir (7), eilučių dalybos (8) ir (10), eilučių kėlimo[1] sveiku teigiamu (11) ir (12), sveiku neigiamu (18) ir trupmeniniu (19), (19a) laipsniais, eilutės įstatymo į eilutę (23), (24) ir jam atvirkštinio uždavinio (25), laipsninių eilučių, kai $x = \cos\alpha$ arba $x = \sin\alpha$ transformavimo į trigonometrines eilutes (28), (30), (31), (35) ir (36). Išskyrus (23), visų paminėtų veiksmų operatorių matricos yra trikampės, begalinės, su dviem įėjimais. Matricos (23) elementai yra (16) ir (17) pavidalo vektoriai.

Laipsninių eilučių daugybos algoritmas yra paprastesnis, negų Furjė eilučių daugybos algoritmas [3]. Eilučių dalybos operatoriaus matricos [10] elementai išreikšti [7] matricos minorais.

Tiesioginių uždavinių algoritmuose operatoriaus matricą pakeitus atvirkštine matrica, gaunamas atvirkštinio uždavinio algoritmas. Sprendžiant atvirkštinius uždavinius, pvz., (25), ši savybė yra reikšminga.

ANWENDUNG VON MATRIZEN FÜR ALGEBRAISCHE UND ANDERE OPERATIONEN MIT POTENZREIHEN

A. JASIULIONIS

Zusammenfassung

Die vom Verfasser vorgeschlagene Darstellung der Potenzreihen (3) in Matrizenform [3] ergibt fol... Algorithmen als Linear-Transformation im Affinraum, nämlich: Algorithmen der Multiplikation der Reihen (6) und (7), der Division der Reihen (8) und (10), des Poten-

zierens der Reihen mit ganzen und positiven (11) und (12) bzw. negativen (18) und bruchzahligen Potenzen (19), (19a), des Einsetzens der Reihen in Reihen (23), (24) und der umgekehrten Aufgabe (25), der Transformation der Potenzreihen in Fourier-Reihen, wobei $x=\cos\alpha$ bzw. $x=\sin\alpha$, (28), (30), (31), (35) und (36). Mit Ausnahme von (23) sind sämtliche obenerwähnten Transformationsmatrizen unendliche dreieckige Matrizen mit zwei Einsprüngen. Elemente der Transformationsmatrizen (23) sind Vektoren, wie es für (16) und (17) der Fall ist.

Der Algorithm der Multiplikation von Potenzreihen ist einfacher, als der der Multiplikation von Fourier-Reihen [3]. Elemente der Division des Transformationsmatrix (10) sind als Minore der Matrix (7) dargestellt.

Durch Einsetzen einer inversen Matrix anstatt der Transformationsmatrix in Algorithmen der direkten Aufgaben, erhält man einen Algorithm der inversen Aufgabe. Für einzelne Fälle der inversen Aufgaben, wie z.B. für (25), ist diese Eigenschaft als nützliche anzusehen.