V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1965

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУГРУППАХ С РЕГУЛЯРНОЙ НОРМИРОВКОЙ

З. ЮШКИС

1. Известно [2], что для некоторых аддитивных арифметических функций можно получить асимптотическое разложение законов распределения этих функций. В настоящей работе теорема об асимптотическом разложении обобщается на упорядоченные полугруппы с регулярной нормировкой (см., например, [3]). Для простоты мы рассмотрим лишь функцию $\omega(m)$, которая означает число различных образующих элементов, делящих m.

В дальнейшем c_1, c_2, ... – абсолютные положительные постоянные, B – число, ограниченное по модулю константой; x – большое вещественное число. Полугруппу, для которой

$$\nu(x)=\sum_{N(m)\leqslant x} 1=Cx^{\Theta}+Bx^{\Theta_1},$$

где C, Θ, Θ_1 – константы, $C>0$, $0\leqslant\Theta_1<\Theta$, будем называть упорядоченной полугруппой с регулярной нормировкой, или, коротко, полугруппой G.

Введем еще обозначения: m, n – элементы полугруппы G; p – образующие элементы G; P – множество образующих элементов G; $\lambda_x\{\omega(m)<\ln\ln x+y\sqrt{\ln\ln x}\}$ – частота элементов G, для которых $\omega(m)<\ln\ln x+y\sqrt{\ln\ln x}$, т. е. отношение числа элементов $m\in G$, $N(m)\leqslant x$, $\omega(m)<\ln\ln x+y\sqrt{\ln\ln x}$ к числу $\nu(x)$.

2. Для асимптотического разложения функции распределения $\omega(m)$ нам будут необходимы некоторые свойства функции

$$\zeta_G(s)=\sum_{m\in G}\frac{1}{N(m)^s}, \tag{1}$$

где $s=\sigma+it$ – комплексное переменное. Как известно (см. [1]), этот ряд равномерно сходится для $\sigma>\Theta+\delta$ при любом фиксированном $\delta>0$ и, следовательно, $\zeta_G(s)$ является регулярной при $\sigma>\Theta$.

Лемма 1. *Функция $\zeta_G(s)$, определенная для $\sigma>\Theta$ формулой (1), аналитически продолжаема на полуплоскость $\sigma>\Theta_1$, причем в этой полуплоскости она однозначна и имеет единственной особенностью простой полюс в точке $s=\Theta$ с вычетом $C\Theta$.*

Доказательство. Оценке для $\nu(x)$ придадим вид

$$\nu(x)=Cx^{\Theta}+\rho(x)x^{\Theta_1},$$

где

$$\sup_{x\geqslant 1}|\rho(x)|\leqslant c_1. \tag{2}$$

Используя частичное суммирование, имеем:

$$\sum_{N(m)\leqslant x}\frac{1}{N(m)^s}=\frac{\nu(x)}{x^s}+s\int_1^x\frac{\nu(u)\,du}{u^{s+1}}=$$

$$=\frac{C}{x^{s-\Theta}}+\frac{\rho(x)}{x^{s-\Theta_1}}+\frac{Cs}{s-\Theta}-\frac{Cs}{(s-\Theta)\,x^{s-\Theta}}+s\int_1^x\frac{\rho(u)\,du}{u^{s+1-\Theta_1}}. \tag{3}$$

Предполагая $\sigma>\Theta$ и замечая, что

$$\left|\frac{1}{x^{s-\Theta}}\right|=\frac{1}{x^{\sigma-\Theta}},\qquad \left|\frac{\rho(x)}{x^{s-\Theta_1}}\right|\leqslant\frac{c_1}{x^{\sigma-\Theta_1}},$$

получаем

$$\zeta_G(s)=\frac{Cs}{s-\Theta}+s\int_1^\infty\frac{\rho(u)\,du}{u^{s+1-\Theta_1}}. \tag{4}$$

Последний интеграл сходится равномерно для $\sigma>\delta$, где $\delta>\Theta_1$ – любое фиксированное число. Формула (4) и дает аналитическое продолжение $\zeta_G(s)$ на полуплоскость $\sigma>\Theta_1$.

Лемма 2. *Для функции $\zeta_G(s)$ в окрестности точки $s=\Theta$ справедливы оценки*

$$\zeta_G(s)=\frac{B}{s-\Theta}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{\zeta_G(s)}=B(s-\Theta). \tag{6}$$

Доказательство. Оценки (5) и (6) непосредственно следуют из формулы (4).

Лемма 3. *Для $\sigma\geqslant\frac{1}{2}(\Theta+\Theta_1)$, $|t|\geqslant c_2$ справедлива оценка*

$$\zeta_G(s)=B\,|t|^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Доказательство. При $\sigma\geqslant 2\Theta$ ряд $\zeta_G(s)$ сходится абсолютно [1] и в этом случае наша лемма тривиальна. Поэтому мы будем считать, что $\sigma<2\Theta$.

Из (4) и (3) следует, что

$$\zeta_G(s)-\sum_{N(m)\leqslant x}\frac{1}{N(m)^s}=\frac{C\Theta}{(s-\Theta)\,x^{s-\Theta}}-\frac{\rho(x)}{x^{s-\Theta_1}}+s\int_x^\infty\frac{\rho(u)\,du}{u^{s+1-\Theta_1}}.$$

Следовательно,

$$|\zeta_G(s)|\leqslant\sum_{N(m)\leqslant x}\frac{1}{N(m)^\sigma}+\frac{C\Theta}{|s-\Theta|\,x^{\sigma-\Theta}}+\frac{|\rho(x)|}{x^{\sigma-\Theta_1}}+|s|\int_x^\infty\frac{\rho(u)\,du}{u^{\sigma+1-\Theta_1}}.$$

В силу (2) и оценок $|s-\Theta|\geqslant|t|$, $|s|<2\Theta+|t|<c_3|t|$, которые справедливы для $\frac{1}{2}(\Theta+\Theta_1)\leqslant\sigma<2\Theta$, имеем:

$$|\zeta_G(s)|<\sum_{N(m)\leqslant x}\frac{1}{N(m)^\sigma}+\frac{C\Theta}{|t|\,x^{\sigma-\Theta}}+\frac{c_1}{x^{\sigma-\Theta_1}}+\frac{c_1c_3|t|}{x^{\sigma-\Theta_1}}. \tag{8}$$

Так как $\sigma\geqslant\frac{1}{2}(\Theta+\Theta_1)$, получаем

$$|\zeta_G(s)|<\sum_{N(m)\leqslant x}\frac{1}{N(m)^{\frac{1}{2}(\Theta+\Theta_1)}}+C\Theta\,|t|^{-1}x^{\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)}+$$

$$+c_1x^{\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta)}+c_1c_3\,|t|\,x^{\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta)}.$$

Оценивая по формуле частичного суммирования, находим

$$\sum_{N(m)\leqslant x} \frac{1}{N(m)^{\frac{1}{2}(\Theta+\Theta_1)}} = \frac{\nu(x)}{x^{\frac{1}{2}(\Theta+\Theta_1)}} + \frac{\Theta+\Theta_1}{2} \int_1^x \frac{\nu(u)\,du}{u^{\frac{1}{2}(\Theta+\Theta_1)+1}} = Bx^{\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)}.$$

Полагая $x=|t|^{\frac{1}{\Theta-\Theta_1}}$, получаем (7).

Лемма 4. *Для полугруппы G справедлива оценка*

$$\sum_{N(m)\leqslant x} \frac{1}{N(m)^{\Theta}} = C\Theta \ln x + c_4 + Bx^{\Theta_1-\Theta}. \tag{9}$$

Доказательство. Применяя частичное суммирование, имеем

$$\sum_{N(m)\leqslant x} \frac{1}{N(m)^{\Theta}} = \frac{\nu(x)}{x^{\Theta}} + \Theta \int_1^x \frac{\nu(u)\,du}{u^{\Theta+1}} = C + Bx^{\Theta_1-\Theta} + C\Theta \ln x + B\int_1^x u^{\Theta_1-\Theta-1}\,du =$$
$$= C\Theta \ln x + c_4 + Bx^{\Theta_1-\Theta}.$$

Лемма 5. *Для* $\sigma \geqslant \Theta - \frac{c_5}{\ln(|t|+2)}$, $|t|\geqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\zeta_G(s) = B\ln(|t|+2). \tag{10}$$

Доказательство. Как показывает формула (4), $\zeta_G(\sigma+it)$ и $\zeta_G(\sigma-it)$ имеют сопряженные комплексные значения. Поэтому мы можем ограничиваться верхней полуплоскостью значений t, т.е. $t\geqslant 1$. Из (8) имеем

$$|\zeta_G(s)| < \sum_{N(m)\leqslant x} \frac{N(m)^{\frac{c_5}{\ln(t+2)}}}{N(m)^{\Theta}} + C\Theta t^{-1} x^{\frac{c_5}{\ln(t+2)}} +$$
$$+ c_1 x^{\Theta_1-\Theta+\frac{c_5}{\ln(t+2)}} + c_1 c_3 t x^{\Theta_1-\Theta+\frac{c_5}{\ln(t+2)}}.$$

В силу (9) получаем, что

$$\sum_{N(m)\leqslant x} \frac{N(m)^{\frac{c_5}{\ln(t+2)}}}{N(m)^{\Theta}} = Bx^{\frac{c_5}{\ln(t+2)}} \ln x.$$

Полагая $x=t^{\frac{1}{\Theta-\Theta_1}}$, найдем

$$\zeta_G(s) = Bt^{\frac{c_5}{(\Theta-\Theta_1)\ln(t+2)}} \ln t + Bt^{1+\frac{1}{\Theta-\Theta_1}\left(\Theta_1-\Theta+\frac{c_5}{\ln(t+2)}\right)} = B\ln(t+2).$$

Лемма 6. *Пусть $f(s)$ регулярна в круге $|s-s_0|\leqslant r$, $f(s_0)\neq 0$,*

$$\left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| < e^M \quad (M>1) \quad \text{для} \quad |s-s_0|\leqslant r.$$

Пусть, далее, $f(s)\neq 0$ в правом полукруге $|s-s_0|\leqslant r$, $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$. Тогда

1°. $-\operatorname{Re}\frac{f'(s_0)}{f(s_0)} < \frac{c_6 M}{r}$.

2°. *Если, кроме того, $f(s)$ имеет нуль ρ между $s_0 - \frac{1}{2}r$ и s_0, то*

$$-\operatorname{Re}\frac{f'(s_0)}{f(s_0)} < \frac{c_6 M}{r} - \frac{1}{s_0-\rho}.$$

Доказате ьство см. в [4].

Лемма 7. *Существует положительная константа* c_7 *такая, что* $\zeta_G(s)\neq 0$ *в области*

$$\sigma \geqslant \Theta - \frac{c_7}{\ln(|t|+2)}.$$

Доказательство. Так как функция $\zeta_G(s)$ регулярна в окрестности точки Θ, а в этой точке имеет простой полюс, то можно подобрать такое положительное число c_8, чтобы $\zeta_G(s)$ не имела нулей в квадрате $|\sigma-\Theta|\leqslant c_8$, $|t|\leqslant c_8$. Как и в лемме 5, мы ограничимся полуплоскостью $t>0$ и будем считать, что $t>c_8$. Как известно [1], при $\sigma>\Theta$ можно записать

$$\zeta_G(s)=\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{N(p)^s}\right)^{-1},$$

где произведение сходится абсолютно. Следовательно, $\zeta_G(s)$ не имеет нулей при $\sigma>\Theta$ и мы предполагаем, что $\sigma<2\Theta$.

Пусть $\zeta_G(s)=0$ при $s=\beta+\gamma i$, где $\gamma>c_8$. Для краткости обозначим

$$c_9=\frac{3}{4}\min\left(c_8,\ \frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)\right), \tag{11}$$

$$\sigma_0=\Theta+\frac{c_{10}}{\ln(\gamma+2)}, \tag{12}$$

где

$$c_{10}\leqslant\frac{1}{4}c_9\ln(c_8+2). \tag{13}$$

Если

$$\beta\leqslant\sigma_0-\frac{2c_{10}}{\ln(c_8+2)},$$

то лемма тривиальна, так как тогда в силу (12)

$$\beta\leqslant\Theta-\frac{c_{10}}{\ln(\gamma+2)}-\frac{2c_{10}}{\ln(c_8+2)}<\Theta-\frac{c_{10}}{\ln(\gamma+2)}.$$

Поэтому будем считать, что

$$\beta>\sigma_0-\frac{2c_{10}}{\ln(c_8+2)}, \tag{14}$$

и исследуем точки $s_0=\sigma_0+\gamma i$ и $\bar{s}_0=\sigma_0+2\gamma i$.

Обозначим через $\mu(m)$ – функцию Мёбиуса, определенную на полугруппе G [3]. Тогда

$$\zeta_G(s_0)\cdot\sum_{m\in G}\frac{\mu(m)}{N(m)^{s_0}}=\sum_{m\in G}\frac{\alpha_m}{N(m)^{s_0}},$$

где

$$\alpha_m=\sum_{d|m}\mu(d),$$

Если e – единичный элемент полугруппы G, то [3]

$$\sum_{d|m}\mu(d)=\begin{cases}1, & \text{если } m=\bar{e},\\ 0, & \text{если } m\neq\bar{e},\end{cases}$$

поэтому

$$\zeta_G(s_0)\cdot\sum_{m\in G}\frac{\mu(m)}{N(m)^{s_0}}=1.$$

Отсюда получаем, что

$$\left|\frac{1}{\zeta_G(s_0)}\right|=\left|\sum_{m\in G}\frac{\mu(m)}{N(m)^{s_0}}\right|\leqslant\zeta_G(\sigma_0),$$

а в силу (5) и (12) имеем

$$\left|\frac{1}{\zeta_G(s_0)}\right| < \frac{c_{11}}{\sigma_0-\Theta} = c_{12}\ln(\gamma+2), \qquad c_{12}=\frac{c_{11}}{c_{10}}. \tag{15}$$

Аналогично находим, что

$$\left|\frac{1}{\zeta_G(\bar{s}_0)}\right| < c_{12}\ln(\gamma+2). \tag{16}$$

В силу (11) функция $\zeta_G(s)$ регулярна в круге $|s-\bar{s}_0|\leqslant c_9$. Так как $\sigma_0>\Theta$, то $\zeta_G(\bar{s}_0)\neq 0$ и $\zeta_G(s)\neq 0$ при $\sigma>\sigma_0$. Из (7) и (16) получаем, что

$$\left|\frac{\zeta_G(s)}{\zeta_G(\bar{s}_0)}\right| < c_{13}\gamma^{\frac{1}{2}}\ln(\gamma+2)\leqslant(\gamma+2)^{c_{14}}=e^{c_{14}\ln(\gamma+2)}, \tag{17}$$

и, аналогично, в силу (7) и (15)

$$\left|\frac{\zeta_G(s)}{\zeta_G(s_0)}\right| < e^{c_{14}\ln(\gamma+2)}. \tag{18}$$

Кроме того, из (13), (14) и из условий $\beta\leqslant\Theta\leqslant\sigma_0$ имеем

$$\frac{c_9}{2}\geqslant\frac{2c_{10}}{\ln(c_8+2)},$$

или

$$\sigma_0-\frac{c_9}{2}\leqslant\sigma_0-\frac{2c_{10}}{\ln(c_8+2)}<\beta<\sigma_0. \tag{19}$$

Из (17) и выше изложенных утверждений видно, что условия леммы 6,1° выполнены, и мы получаем

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'_G(\bar{s}_0)}{\zeta_G(\bar{s}_0)} < \frac{c_6 c_{14}\ln(\gamma+2)}{c_9} = c_{15}\ln(\gamma+2), \qquad c_{15}=\frac{c_6 c_{14}}{c_9}, \tag{20}$$

а из (18) и (19) в силу леммы 6,2° находим

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'_G(s_0)}{\zeta_G(s_0)} < c_{15}\ln(\gamma+2)-\frac{1}{\sigma_0-\beta}. \tag{21}$$

Точка $s=\Theta$ является полюсом первого порядка для функции $\zeta_G(s)$. Как известно из теории функций комплексного переменного, при $\sigma_0\to\Theta+0$

$$-\frac{\zeta'_G(\sigma_0)}{\zeta_G(\sigma_0)}\sim\frac{1}{\sigma_0-\Theta}.$$

Отсюда при достаточно малой постоянной c_{10} в силу (12) следует

$$-\frac{\zeta'_G(\sigma_0)}{\zeta_G(\sigma_0)} < \frac{1{,}1}{\sigma_0-\Theta} = \frac{1{,}1\ln(\gamma+2)}{c_{10}}. \tag{22}$$

Для полугруппы G введем функцию Мангольдта

$$\Lambda(m)=\begin{cases}\ln N(p), & \text{если } m=p^\alpha,\\ 0, & \text{если } m\neq p^\alpha.\end{cases}$$

Очевидно, при $\sigma>\Theta$

$$\ln\zeta_G(s)=-\sum_{p\in P}\ln\left(1-N(p)^{-s}\right)=\sum_{\substack{p\in P\\ \alpha\geqslant 1}}\frac{1}{\alpha N(p)^{\alpha s}},$$

откуда

$$-\frac{\zeta'_G(s)}{\zeta_G(s)}=\sum_{\substack{p\in P\\ \alpha\geqslant 1}}\frac{\ln N(p)}{N(p)^{\alpha s}}=\sum_{m\in G}\frac{\Lambda(m)}{N(m)^s}, \tag{23}$$

или

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'_G(s)}{\zeta_G(s)}=\sum_{m\in G}\frac{\Lambda(m)}{N(m)^\sigma}\cos\left(t\ln N(m)\right).$$

Так как $\sigma_0 > \Theta$, то в силу элементарного неравенства

$$3+4\cos A+\cos 2A \geqslant 0,$$

справедливого для любых вещественных A, получаем

$$-3\frac{\zeta_G'(\sigma_0)}{\zeta_G(\sigma_0)}-4\operatorname{Re}\frac{\zeta_G'(s_0)}{\zeta_G(s_0)}-\operatorname{Re}\frac{\zeta_G'(\bar{s}_0)}{\zeta_G(\bar{s}_0)} \geqslant 0.$$

Подставляя (20), (21) и (22), имеем

$$5c_{15}\ln(\gamma+2)+\frac{3{,}3}{c_{10}}\ln(\gamma+2)-\frac{4}{\sigma_0-\beta} > 0.$$

Решая последнее неравенство относительно $\Theta-\beta$ и применяя (12), находим

$$\Theta-\beta > \Theta-\sigma_0+\frac{4}{\left(5c_{15}+\frac{3{,}3}{c_{10}}\right)\ln(\gamma+2)}=\left(\frac{4}{5c_{15}+\frac{3{,}3}{c_{10}}}-c_{10}\right)\frac{1}{\ln(\gamma+2)}.$$

Если c_{10} — достаточно малое постоянное, то константа

$$c_{16}=\frac{4}{5c_{15}+\frac{3{,}3}{c_{10}}}-c_{10}$$

положительна и

$$\beta < \Theta-\frac{c_{16}}{\ln(\gamma+2)}.$$

Полагая $c_7=\min(c_{10}, c_{16})$, получаем лемму.

Лемма 8. *Пусть $f(s)$ удовлетворяет условиям леммы* 6 *и*

$$\left|\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}\right| < \frac{M}{r}.$$

Далее, предположим, что $f(s)\neq 0$ при $|s-s_0|\leqslant r$, $\operatorname{Re}s\geqslant \operatorname{Re}s_0-2r'$, где $0<r'<\frac{1}{4}r$. Тогда в круге $|s-s_0|\leqslant r'$ будет выполнятся неравенство

$$\left|\frac{f'(s)}{f(s)}\right| < \frac{c_{17}M}{r}.$$

Доказательство см. в [5].

Лемма 9. *Для $\sigma\geqslant\Theta-\frac{c_{19}}{\ln(|t|+2)}$, $|t|\geqslant 1$ справедлива оценка*

$$\frac{1}{\zeta_G(s)}=B\ln(|t|+2). \tag{24}$$

Доказательство. Из леммы 7 мы знаем, что $\zeta_G(s)\neq 0$ в области $\sigma\geqslant\Theta-\frac{c_7}{\ln(|t|+2)}$. Введем обозначения: $s_0=\sigma_0+it_0$, где

$$\sigma_0=\Theta+\frac{c_7}{4\ln(t_0+2)}, \qquad t_0\geqslant 1,$$

$$c_{19}=\frac{3}{4}\min(1,\ \Theta-\Theta_1).$$

Тогда функция $\zeta_G(s)$ регулярна в круге $|s-s_0|\leqslant c_{19}$, $\zeta_G(s_0)\neq 0$ и $\zeta_G(s)\neq 0$ при $\sigma>\sigma_0$.

Рассуждая как и при доказательстве (17), получаем

$$\left|\frac{1}{\zeta_G(s_0)}\right| < c_{20}\ln(t_0+2), \tag{25}$$

$$\left|\frac{\zeta_G(s)}{\zeta_G(s_0)}\right| < e^{c_{21}\ln(t_0+2)}.$$

В силу (23) и (22)

$$\left|\frac{\zeta_G'(s_0)}{\zeta_G(s_0)}\right| \leqslant \sum_{m\in G}\frac{\Lambda(m)}{N(m)^{\sigma_0}} = -\frac{\zeta_G'(\sigma_0)}{\zeta_G(\sigma_0)} < \frac{c_{23}}{\sigma_0-\Theta} < c_{23}\ln(t_0+2).$$

Так как $t_0 \geqslant 1$, то $\zeta_G(s)$ не имеет нулей в части круга, где

$$\sigma > \Theta - \frac{c_7}{2\ln(t_0+2)}.$$

Следовательно, мы можем применить лемму 8с

$$r=c_{19},\quad r'=\frac{3c_7}{8\ln(t_0+2)},\quad M=\max(c_{21},\ c_{23})\ln(t_0+2),$$

откуда следует, что

$$\frac{\zeta_G'(\sigma+it_0)}{\zeta_G(\sigma+it_0)} = B\ln(t_0+2)$$

для

$$\Theta - \frac{c_7}{8\ln(t_0+2)} \leqslant \sigma \leqslant \Theta + \frac{c_7}{4\ln(t_0+2)}.$$

Далее, для

$$\sigma \geqslant \Theta - \frac{c_7}{8\ln(t+2)}$$

имеем, что

$$\ln\frac{1}{|\zeta_G(s)|} = -\operatorname{Re}\ln\zeta_G(s) =$$

$$= -\operatorname{Re}\ln\zeta_G\left(\Theta + \frac{c_7}{4\ln(t+2)} + it\right) + \int\limits_{\sigma}^{\Theta+\frac{c_7}{4\ln(t+2)}} \operatorname{Re}\frac{\zeta_G'(u+it)}{\zeta_G(u+it)}\,du \leqslant$$

$$\leqslant \ln\zeta_G\left(\Theta + \frac{c_7}{4\ln(t+2)}\right) + B\ln(t+2)\cdot\frac{3c_7}{8\ln(t+2)} = \ln\left(B\ln(t+2)\right) + B.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\zeta_G(s)} = B\ln(t+2) \quad \text{для} \quad \Theta - \frac{c_7}{8\ln(t+2)} \leqslant \sigma \leqslant \Theta + \frac{c_7}{4\ln(t+2)}.$$

Оценка леммы при $\sigma \geqslant \Theta + \frac{c_7}{4\ln(t+2)}$ получается из (25).

3. Докажем еще несколько вспомогательных лемм.

Лемма 10. *Пусть $\tau_k(m)$ – число представлений $m\in G$ в виде произведения k множителей, причем порядок множителей учитывается. Тогда*

$$\sum_{N(m)\leqslant x} \tau_k(m) = x^{\Theta} P_k(\ln x) + Bx^{\Theta - \frac{1}{k}(\Theta-\Theta_1)} \ln^{k-2} x,$$

где $P_k(u)$ – полиномы степени $k-1$, не зависящие от x.

Доказательство. Обозначим

$$D_k(x) = \sum_{N(m)\leqslant x} \tau_k(m).$$

Сначала мы докажем лемму для $k=2$. Нетрудно заметить, что

$$D_2(x) = \sum_{N(m_1)\,N(m_2)\leqslant x} 1 = 2\sum_{N(m)\leqslant\sqrt{x}} \nu\left(\frac{x}{N(m)}\right) - \nu^2(\sqrt{x}) =$$

$$= 2Cx^{\Theta}\sum_{N(m)\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{N(m)^{\Theta}} + Bx^{\Theta_1}\sum_{N(m)\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{N(m)^{\Theta_1}} - \left\{Cx^{\frac{1}{2}\Theta} + Bx^{\frac{1}{2}\Theta_1}\right\}^2.$$

В силу (9), применяя частичное суммирование, получаем

$$D_2(x)=2Cx^{\Theta}\left\{C\Theta\ln\sqrt{x}+c_4+Bx^{\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta)}\right\}+Bx^{\Theta_1+\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)}-$$

$$-C^2x^{\Theta}+Bx^{\Theta-\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)}=x^{\Theta}\left\{C^2\Theta\ln x+2Cc_4-C^2\right\}+Bx^{\Theta-\frac{1}{2}(\Theta-\Theta_1)}.$$

Предположим, что лемма верна для $k-1$, т.е.

$$D_{k-1}(x)=x^{\Theta}P_{k-1}(\ln x)+Bx^{\Theta-\frac{1}{k-1}(\Theta-\Theta_1)}\ln^{k-3}x \qquad (k=3,\ 4,\ \ldots). \tag{26}$$

Выполняя некоторые преобразования и применяя (9), имеем, что

$$D_k(x)=\sum_{N(m_1)\ldots N(m_k)\leqslant x}1=\sum_{N(m)\,N(n)\leqslant x}\tau_{k-1}(m)=$$

$$=\sum_{N(n)\leqslant x^{\frac{1}{k}}}\ \sum_{N(m)\leqslant\frac{x}{N(n)}}\tau_{k-1}(m)+\sum_{x^{\frac{1}{k}}<N(n)\leqslant x}\ \sum_{N(m)\leqslant\frac{x}{N(n)}}\tau_{k-1}(m)=$$

$$=\sum_{N(n)\leqslant x^{\frac{1}{k}}}D_{k-1}\left(\frac{x}{N(n)}\right)+\sum_{N(m)\leqslant x^{1-\frac{1}{k}}}\tau_{k-1}(m)\sum_{x^{\frac{1}{k}}<N(n)\leqslant\frac{x}{N(m)}}1=$$

$$=\sum_{N(n)\leqslant x^{\frac{1}{k}}}D_{k-1}\left(\frac{x}{N(n)}\right)+\sum_{N(m)\leqslant x^{1-\frac{1}{k}}}\left\{\frac{Cx^{\Theta}}{N(m)^{\Theta}}-Cx^{\frac{1}{k}\Theta}+\right.$$

$$\left.+\frac{Bx^{\Theta_1}}{N(m)^{\Theta_1}}+Bx^{\frac{1}{k}\Theta_1}\right\}\tau_{k-1}(m)=S_1+Cx^{\Theta}S_2-Cx^{\frac{1}{k}\Theta}D_{k-1}\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)+Bx^{\Theta_1}S_3+$$

$$+Bx^{\frac{1}{k}\Theta_1}D_{k-1}\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right),$$

где

$$S_1=\sum_{N(n)\leqslant x^{\frac{1}{k}}}D_{k-1}\left(\frac{x}{N(n)}\right),$$

$$S_2=\sum_{N(m)\leqslant x^{1-\frac{1}{k}}}\frac{\tau_{k-1}(m)}{N(m)^{\Theta}},$$

$$S_3=\sum_{N(m)\leqslant x^{1-\frac{1}{k}}}\frac{\tau_{k-1}(m)}{N(m)^{\Theta_1}}.$$

Теперь оценим S_1, S_2, S_3 и $D_{k-1}\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)$. При оценке этих выражений мы используем частичное суммирование, формулы (9), (26) и следующие интегралы

$$\int_1^u z^{\alpha}\ln^l z\,dz=Bu^{\alpha+1}\ln^l u+(-1)^{l+1}\frac{l!}{(\alpha+1)^{l+1}},$$

$$\int_1^u\frac{\ln^l z}{z}\,dz=\frac{1}{l+1}\ln^{l+1}u,$$

где l — целое положительное число, $\alpha < -1$ — вещественное число. Кроме того, через $P_k(u)$ будем обозначать полиномы степени $k-1$, не обращая внимания на их коэффициенты. Имеем:

$$\sum_{N(m)\leq u} \frac{\ln^l N(m)}{N(m)^{\Theta}} = \ln^l u \sum_{N(m)\leq u} \frac{1}{N(m)^{\Theta}} -$$

$$-l\int_1^u \sum_{N(m)\leq z} \frac{1}{N(m)^{\Theta}} \frac{\ln^{l-1} z\,dz}{z} = C\Theta \ln^{l+1} u + c_4 \ln^l u + Bu^{\Theta_1-\Theta}\ln^l u -$$

$$-lC\Theta \int_1^u \frac{\ln^l z\,dz}{z} - lc_4 \int_1^u \frac{\ln^{l-1} z\,dz}{z} + B\int_1^u z^{\Theta_1-\Theta-1}\ln^{l-1} z\,dz = P_{l+2}(\ln u) + Bu^{\Theta_1-\Theta}\ln^l u.$$

Отсюда следует, что

$$S_1 = x^{\Theta} \sum_{N(n)\leq x^{\frac{1}{k}}} \frac{1}{N(n)^{\Theta}} P_{k-1}\left(\ln \frac{x}{N(n)}\right) +$$

$$+ Bx^{\Theta - \frac{1}{k-1}(\Theta-\Theta_1)} \ln^{k-3} x \sum_{N(n)\leq x^{\frac{1}{k}}} \frac{1}{N(n)^{\Theta - \frac{1}{k-1}(\Theta-\Theta_1)}} =$$

$$= x^{\Theta} P_{k-1}(\ln x) \left\{ C\Theta \ln x^{\frac{1}{k}} + c_4 + Bx^{\frac{1}{k}(\Theta_1-\Theta)} \right\} - x^{\Theta} P_k(\ln x) +$$

$$+ Bx^{\frac{1}{k}(\Theta_1-\Theta)} \ln^{k-2} x + Bx^{\frac{1}{k}\Theta} \ln^{k-3} x = x^{\Theta} P_k(\ln x) + Bx^{\Theta - \frac{1}{k}(\Theta-\Theta_1)} \ln^{k-2} x.$$

Далее,

$$S_2 = \frac{1}{x^{\left(1-\frac{1}{k}\right)\Theta}} D_{k-1}\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right) + \Theta \int_1^{x^{1-\frac{1}{k}}} D_{k-1}(u) \frac{du}{u^{\Theta+1}} =$$

$$= P_{k-1}(\ln x) + Bx^{-\frac{1}{k}(\Theta-\Theta_1)} \ln^{k-3} x + \Theta \int_1^{x^{1-\frac{1}{k}}} P_{k-1}(\ln u) \frac{du}{u} +$$

$$+ B \int_1^{x^{1-\frac{1}{k}}} u^{-1-\frac{1}{k-1}(\Theta-\Theta_1)} \ln^{k-3} u\,du = P_{k-1}(\ln x) + Bx^{-\frac{1}{k}(\Theta-\Theta_1)} \ln^{k-3} x +$$

$$+ P_k(\ln x) + Bx^{-\frac{1}{k-1}(\Theta-\Theta_1)} \ln^{k-3} x = P_k(\ln x) + Bx^{-\frac{1}{k}(\Theta-\Theta_1)} \ln^{k-3} x;$$

$$S_3 = \frac{1}{x^{\left(1-\frac{1}{k}\right)\Theta_1}} D_{k-1}\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right) + \Theta_1 \int_1^{x^{1-\frac{1}{k}}} D_{k-1}(u) \frac{du}{u^{\Theta_1+1}} =$$

$$= Bx^{\left(1-\frac{1}{k}\right)\Theta - \left(1-\frac{1}{k}\right)\Theta_1} \ln^{k-2} x + B \int_1^{x^{1-\frac{1}{k}}} u^{\Theta-\Theta_1-1} \ln^{k-2} u\,du =$$

$$= Bx^{\left(1-\frac{1}{k}\right)(\Theta-\Theta_1)} \ln^{k-2} x;$$

$$D_{k-1}\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)=x^{\left(1-\frac{1}{k}\right)\Theta}P_{k-1}(\ln x)+Bx^{\left(1-\frac{1}{k}\right)\left\{\Theta-\frac{1}{k-1}(\Theta-\Theta_1)\right\}}\ln^{k-3}x=$$

$$=x^{\left(1-\frac{1}{k}\right)\Theta}P_{k-1}(\ln x)+Bx^{\left(1-\frac{1}{k}\right)\Theta-\frac{1}{k}(\Theta-\Theta_1)}\ln^{k-3}x.$$

Подставляя S_1, S_2, S_3 и $D_{k-1}\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)$ в $D_k(x)$, получаем

$$D_k(x)=x^{\Theta}P_k(\ln x)+Bx^{\Theta-\frac{1}{k}(\Theta-\Theta_1)}\ln^{k-2}x.$$

По принципу математической индукции имеем, что лемма справедлива для $k=2,\ 3,\ \ldots$

Лемма 11. *Пусть $y>x>0$, $y\geqslant N(p_0)$, где p_0 — образующий элемент с наименьшей нормой, z — комплексное число, $|z|\leqslant c_{24}$. Тогда*

$$\sum_{x<N(m)\leqslant y} z^{\omega(m)}=B(y^{\Theta}-x^{\Theta})(\ln y)^{|z|}+By^{\Theta-\frac{\Theta-\Theta_1}{[|z|]+1}}(\ln y)^{|z|-1}.$$

Доказательство. Пусть $k=[|z|]+1$. Как и в случае натуральных чисел имеем, что

$$|z|^{\omega(m)}\leqslant\prod_{p\mid m}k=\prod_{p^{\alpha}\| m}\binom{k+\alpha-1}{\alpha}=\tau_k(m).$$

В силу леммы 10

$$\left|\sum_{x<N(m)\leqslant y} z^{\omega(m)}\right|\leqslant\sum_{x<N(m)\leqslant y}\tau_k(m)=\sum_{N(m)\leqslant y}\tau_k(m)-\sum_{N(m)\leqslant x}\tau_k(m)=$$

$$=y^{\Theta}P_k(\ln y)-x^{\Theta}P_k(\ln x)+By^{\Theta-\frac{1}{k}(\Theta-\Theta_1)}\ln^{k-2}y=$$

$$=B(y^{\Theta}-x^{\Theta})(\ln y)^{k-1}+By^{\Theta-\frac{1}{k}(\Theta-\Theta_1)}(\ln y)^{k-2}.$$

Подставляя $k=[|z|]+1$, получаем лемму.

Лемма 12. *Для комплексного z, $|z|\leqslant c_{24}$, $x\geqslant N(p_0)$*

$$\sum_{N(m)\leqslant x} z^{\omega(m)}=C\left(\varphi(z)+\frac{B}{\ln x}\right)x^{\Theta}(\ln x)^{z-1},$$

где

$$\varphi(z)=\frac{1}{\Gamma(z)}\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{N(p)^{\Theta}}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{N(p)^{\Theta}-1}\right)-$$

целая функция от z, $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Доказательство. В силу леммы 11 ряд

$$Z(s)=\sum_{m\in G}\frac{z^{\omega(m)}}{N(m)^{s}}\tag{27}$$

сходится абсолютно при $\sigma>\Theta$. Функция $\omega(m)$ является аддитивной, $\omega(\bar{e})=0$, $\omega(p^{\alpha})=1$ $(\alpha=1,\ 2,\ \ldots)$, поэтому при $\sigma>\Theta$ имеем

$$Z(s)=\prod_{p\in P}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{z^{\omega(p^{\alpha})}}{N(p)^{\alpha s}}=\prod_{p\in P}\left(1+\frac{z}{N(p)^{s}-1}\right).$$

Полагая

$$h(s)=Z(s)\zeta_G^{-z}(s),$$

при $\sigma > \Theta$ получаем

$$h(s) = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{N(p)^s}\right)^z \left(1 + \frac{z}{N(p)^s - 1}\right).$$

Если $N(p) > N(p') = N\left(p'(z)\right)$, $\sigma > \frac{1}{2}\Theta$, то

$$\left(1 - \frac{1}{N(p)^s}\right)^z \left(1 + \frac{z}{N(p)^s - 1}\right) \neq 0.$$

Ряд

$$\sum_{\substack{N(p) > N(p') \\ p \in P}} \left\{ z \ln\left(1 - \frac{1}{N(p)^s}\right) + \ln\left(1 + \frac{z}{N(p)^s - 1}\right) \right\}$$

сходится равномерно при любом $\delta > 0$ в области $\sigma > \frac{1}{2}\Theta + \delta$. Следовательно, $h(s)$ является регулярной при $\sigma > \frac{1}{2}\Theta$; кроме того, в области $\sigma > \frac{1}{2}\Theta + \delta$ имеет место оценка

$$|h(s)| \leqslant c_{25}(\delta). \tag{28}$$

Обозначим через $L_j\,(j = 1, \ldots, 7)$ следующие линии:

$$\begin{array}{lll}
L_1 & s = \Theta - \dfrac{c_{26}}{\ln(|t|+2)} + it, & -\infty < t < -\delta, \\
L_2 & s = \sigma - i\delta, & \Theta - \dfrac{c_{26}}{\ln(\delta+2)} \leqslant \sigma \leqslant \Theta, \\
L_3 & s = \delta e^{i\varphi}, & -\dfrac{1}{2}\pi < \varphi < \dfrac{1}{2}\pi, \\
L_4 & s = \sigma + i\delta, & \Theta - \dfrac{c_{26}}{\ln(\delta+2)} \leqslant \sigma \leqslant \Theta, \\
L_5 & s = \Theta - \dfrac{c_{26}}{\ln(t+2)} + it, & \delta < t < \infty, \\
L_6 & s = \sigma - i\delta, & -\infty < \sigma < \Theta - \dfrac{c_{26}}{\ln(\delta+2)}, \\
L_7 & s = \sigma + i\delta, & -\infty < \sigma < \Theta - \dfrac{c_{26}}{\ln(\delta+2)},
\end{array}$$

где $\delta = \frac{1}{\ln x}$ и $c_{26} < \frac{1}{4}\Theta \ln 2$. Согласно выше доказанным свойствам функции $\zeta_G(s)$ константу c_{26} можно подобрать так, чтобы функция $Z(s) = h(s)\zeta_G^z(s)$ была регулярной на контуре $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5$ и справа от него. Применяя (5), (6), (10) и (24), получаем оценки

$$Z(s) = \begin{cases} B\{\ln(|t|+2)\}^{|\operatorname{Re} z|} & \text{при } |t| \geqslant 1, \\ B|s - \Theta|^{-\operatorname{Re} z} & \text{при } |t| \leqslant 1. \end{cases} \tag{29}$$

Как известно, при $a > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{y^s\,ds}{s^2} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < y \leqslant 1, \\ \ln y & \text{при } y \geqslant 1. \end{cases}$$

Так как ряд (27) при $\sigma = 2\Theta$ сходится равномерно, то

$$T(x) = \sum_{N(m) < x} z^{\omega(m)} \ln \frac{x}{N(m)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2\Theta - i\infty}^{2\Theta + i\infty} \frac{x^s}{s^2} Z(s)\,ds.$$

В силу оценок (29) мы можем контур последнего интеграла заменить контуром L. Согласно (29) будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_3}\frac{x^s}{s^2}Z(s)\,ds=B\int\limits_{\delta}^{1}x^{\Theta-\frac{c_{26}}{\ln(t+2)}}dt+B\int\limits_{1}^{\exp\sqrt{\ln x}}x^{\Theta-\frac{c_{26}}{\ln(t+2)}}\times$$

$$\times\frac{\left(\ln(t+2)\right)^{|\operatorname{Re}z|}}{t^2}dt+B\int\limits_{\exp\sqrt{\ln x}}^{\infty}x^{\Theta-\frac{c_{26}}{\ln(t+2)}}\cdot\frac{\left(\ln(t+2)\right)^{|\operatorname{Re}z|}}{t^2}dt=$$

$$=B\left\{x^{\Theta-\frac{c_{26}}{\ln 3}}+x^{\Theta}\exp\left(-\frac{c_{26}\ln x}{\ln(2+\exp\sqrt{\ln x})}\right)\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\left(\ln(t+2)\right)^{|\operatorname{Re}z|}}{t^2}dt+\right.$$

$$\left.+x^{\Theta}\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\ln x}\right)\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\left(\ln(t+2)\right)^{|\operatorname{Re}z|}}{t^{\frac{3}{2}}}dt\right\}=Bx^{\Theta}\exp\left(-c_{27}\sqrt{\ln x}\right).$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{x^s}{s^2}Z(s)\,ds=Bx^{\Theta}\exp\left(-c_{27}\sqrt{\ln x}\right),$$

а тогда

$$T(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2\cup L_3\cup L_4}\frac{x^s}{s^2}Z(s)\,ds+Bx^{\Theta}\exp\left(-c_{27}\sqrt{\ln x}\right). \tag{30}$$

Полагая

$$S(x)=\sum_{N(m)\leqslant x}z^{\omega(m)},$$

$$\Delta=x(\ln x)^{|\operatorname{Re}z-|z|-2},$$

имеем, что

$$T(x)=\int\limits_{1}^{x}\frac{S(u)}{u}du,$$

$$S(x)=\frac{T(x+\Delta)-T(x)}{\ln\left(1+\frac{\Delta}{\ln x}\right)}-\frac{1}{\ln\left(1+\frac{\Delta}{\ln x}\right)}\int\limits_{x}^{x+\Delta}\frac{S(y)-S(x)}{y}dy. \tag{31}$$

Согласно лемме 11

$$\int\limits_{x}^{x+\Delta}\frac{S(y)-S(x)}{y}dy=B\left\{\left((x+\Delta)^{\Theta}-x^{\Theta}\right)(\ln x)^{|z|}+\right.$$

$$\left.+x^{\Theta-\frac{\Theta-\Theta_1}{[|z|]+1}}(\ln x)^{|z|-1}\right\}\ln\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)=B\left\{x^{\Theta-1}\Delta(\ln x)^{|z|}+\right.$$

$$\left.+x^{\Theta-\frac{\Theta-\Theta_1}{[|z|]+1}}(\ln x)^{|z|-1}\right\}\ln\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)=Bx^{\Theta}(\ln x)^{\operatorname{Re}z-2}\ln\left(1+\frac{\Delta}{x}\right). \tag{32}$$

Так как

$$(x+\Delta)^s-x^s=sx^{s-1}\Delta+Bx^{\sigma-2}\Delta^2,$$

$$\ln^{-1}\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)=\frac{x}{\Delta}+B,$$

то из (30) имеем, что

$$\frac{T(x+\Delta)-T(x)}{\ln\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1\cup L_3\cup L_4}\frac{x^s}{s}Z(s)\,ds+$$

$$+B\Delta\int\limits_{L_1\cup L_3\cup L_4}x^{\sigma-1}|Z(s)|\,|ds|+\frac{Bx^{\Theta+1}}{\Delta}\exp\left(-c_{27}\sqrt{\ln x}\right). \tag{33}$$

В силу оценок (29) получаем

$$\int\limits_{L_1\cup L_3\cup L_4}x^{\sigma-1}|Z(s)|\,|ds|=Bx^{\Theta-1}\delta^{1-\operatorname{Re}z}=Bx^{\Theta-1}(\ln x)^{\operatorname{Re}z-1}. \tag{34}$$

Подставляя (32), (33) и (34) в (31), находим, что

$$S(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1\cup L_3\cup L_4}\frac{x^s}{s}Z(s)\,ds+Bx^{\Theta}(\ln x)^{\operatorname{Re}z-2}. \tag{35}$$

Введем функцию

$$H(s)=\frac{Z(s)}{s}-\frac{Ch(\Theta)}{(s-\Theta)^z}=$$

$$=\frac{h(s)\left\{\left(\zeta_G'(s)(s-\Theta)\right)^z-C\Theta\right\}}{s(s-\Theta)^z}+\frac{C\Theta\left(h(s)-h(\Theta)\right)}{s(s-\Theta)^z}-\frac{Ch(\Theta)}{s(s-\Theta)^{z-1}}.$$

Из (28) и свойств $\zeta_G(s)$ следует, что

$$\frac{h(s)-h(\Theta)}{s-\Theta}=B \quad \text{для} \quad \sigma\geqslant\frac{3}{4}\Theta, \qquad |t|\leqslant 1,$$

а по формуле Коши, получаем, что для контура $L_2\cup L_3\cup L_4$

$$H(s)=B|s-\Theta|^{1-\operatorname{Re}z}.$$

Применяя эту оценку, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1\cup L_3\cup L_4}x^sH(s)\,ds=B\int\limits_{\Theta-\frac{c_{28}}{\ln(\delta+2)}}^{\Theta}x^{-\sigma}\left((\sigma-\Theta)^2+\delta^2\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{Re}z}d\sigma+$$

$$+Bx^{\Theta+\delta}\delta^{2-\operatorname{Re}z}=Bx^{\Theta}\int\limits_0^{\frac{c_{28}}{\ln(\delta+2)}}x^{-\sigma}(\sigma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{Re}z}d\sigma+Bx^{\Theta}(\ln x)^{\operatorname{Re}z-2}=$$

$$=Bx^{\Theta}\delta^{1-\operatorname{Re}z}\int\limits_0^{\delta}x^{-\sigma}d\sigma+Bx^{\Theta}\int\limits_{\delta}^{\infty}x^{-\sigma}\sigma^{1-\operatorname{Re}z}d\sigma+Bx^{\Theta}(\ln x)^{\operatorname{Re}z-2}=$$

$$=Bx^{\Theta}\left(\int\limits_1^{\infty}e^{-y}y^{1-\operatorname{Re}z}dy+1\right)(\ln x)^{\operatorname{Re}z-2}=Bx^{\Theta}(\ln x)^{\operatorname{Re}z-2}.$$

Подставляя $Z(s)$ и последнюю оценку в (35), найдем:

$$S(x)=\frac{Ch(\Theta)}{2\pi i}\int\limits_{L_1\cup L_3\cup L_4}\frac{x^s}{(s-\Theta)^z}ds+Bx^{\Theta}(\ln x)^{\operatorname{Re}z-2}. \tag{36}$$

Теперь покажем, что справедлива оценка

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_6\cup L_7}\frac{x^s}{(s-\Theta)^z}ds=Bx^{\Theta-c_{29}}. \tag{37}$$

В самом деле, при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_6\cup L_7}\frac{x^s}{(s-\Theta)^z}\,ds=B\int\limits_{c_{28}}^{\infty}x^{-\sigma}\sigma^{\Theta-\operatorname{Re} z}d\sigma=B\int\limits_{c_{28}}^{\infty}x^{\Theta-\sigma}d\sigma,$$

откуда и следует (37). Если же $\operatorname{Re} z<0$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_6\cup L_7}\frac{x^s}{(s-\Theta)^z}\,ds=B\int\limits_{c_{28}}^{\infty}x^{\Theta-\sigma}\sigma^{-\operatorname{Re} z}d\sigma=B\int\limits_{c_{28}}^{2\Theta}x^{\Theta-\sigma}d\sigma+$$

$$+\int\limits_{2\Theta}^{\infty}x^{\Theta-\sigma}\sigma^{-\operatorname{Re} z}d\sigma=Bx^{\Theta-c_{28}}+B\int\limits_{2\Theta}^{\infty}x^{\Theta-\sigma+\ln\sigma}\,d\sigma=$$

$$=Bx^{\Theta-c_{28}}+B\int\limits_{2\Theta}^{\infty}x^{\Theta-\frac{1}{2}\sigma}\,d\sigma=Bx^{c_{29}},\qquad c_{29}<\Theta.$$

Из (36) ввиду (37) имеем, что

$$S(x)=\frac{Ch(\Theta)}{2\pi i}\int\limits_{L'}\frac{x^s\,ds}{(s-\Theta)^z}+Bx^{\Theta}(\ln x)^{\operatorname{Re} z-2},$$

где $L'=L_6\cup L_2\cup L_3\cup L_4\cup L_7$. Воспользовавшись представлением Г-функции через контурный интеграл Ганкеля, заключаем, что

$$S(x)=C\left(\frac{h(\Theta)}{\Gamma(z)}+\frac{B}{\ln x}\right)x^{\Theta}(\ln x)^{z-1}.$$

4. Положим

$$R_x(z)=\frac{1}{\nu(x)}\sum_{N(m)\leqslant x}e^{z\omega(m)}.$$

Функция $R_x(z)$ является, очевидно, целой. Кроме того, в силу леммы 12

$$R_x(z)=\left\{\varphi(e^z)+\frac{B}{\ln x}\right\}(\ln x)^{e^z-1}\tag{38}$$

в области $\operatorname{Re} z\leqslant c_{30}$. Функция $\varphi(e^z)$ — также целая, и она равна нулю в точках

$$\ln k+(2l+1)\pi i\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots;\ l=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Следовательно, при $\operatorname{Re} z\leqslant c_{30}$, $|\operatorname{Im} z|\leqslant c_{31}<\pi$, и функция

$$F(z)=\ln\varphi(e^z)=\sum_{p\in P}\left\{e^z\ln\left(1-\frac{1}{N(p)^{\Theta}}\right)+\ln\left(1+\frac{e^z}{N(p)^{\Theta}-1}\right)\right\}-\ln\Gamma(e^z)$$

является аналитической, причем имеет место оценка

$$F(z)=B.\tag{39}$$

Тогда при $\operatorname{Re} z\leqslant c_{30}$, $|\operatorname{Im} z|\leqslant c_{31}$

$$R_x(z)=e^{H_x(z)}\left(1+\frac{B}{\ln x}\right),$$

где

$$H_x(z)=(e^z-1)\ln\ln x+F(z).\tag{40}$$

Кроме того, функция

$$G_x(z)=\ln R_x(z)=H_x(z)+\frac{B}{\ln x}\tag{41}$$

аналитична для выше указанных z.

Применяя формулу Коши, имеем, что в области $|z|\leqslant 1$ для $k=0$, 1, 2, ...

$$F^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{|z|=2}\frac{F(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}},$$

$$G_x^{(k)}(z)-H_x^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=2}\frac{G_x(\zeta)-H_x(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta.$$

Отсюда согласно (39) и (41) при $|z|\leqslant 1$

$$F^{(k)}(z)=Bk!, \tag{42}$$

$$G_x^{(k)}(z)=H_x^{(k)}(z)+\frac{Bk!}{\ln x}. \tag{43}$$

Очевидно, $F(0)=0$ и в окрестности точки $z=0$

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k z^k}{k!}, \tag{44}$$

где ряд сходится при $|z|<\pi$. В силу (42)

$$|a_k|\leqslant c_{32}k! \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{45}$$

Положим $\sigma=\sqrt{\ln\ln x}$ и введем полиномы $P_k(z)$, определяемые разложением

$$\exp\left\{H_x\left(\frac{z}{\sigma}\right)-z\sigma-\frac{1}{2}z^2\right\}=$$

$$=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!\,\sigma^k}\left(\frac{z^2}{(k+1)(k+2)}+a_k\right)\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(z)}{\sigma^k}. \tag{46}$$

Обозначим еще через $E_k(u)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ периодические функции с периодом 1, выражаемые тригонометрическими рядами

$$E_k(u)=(-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)}\sum_{\substack{\alpha=-\infty\\ \alpha\neq 0}}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\alpha u}}{(2\pi i\alpha)^k},$$

$$E_0(u)=-1. \tag{47}$$

Теорема. *Пусть*

$$V_k(y)=\sum_{l=0}^{k}\frac{P_l(-\Phi)}{(\ln\ln x)^{\frac{1}{2}l}}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),\qquad \Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{y}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du,$$

где $P_l(-\Phi)$ получается из $P_l(-z)$ путем замены всех степеней z^j $(j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ на $\Phi^{(j)}(y)$. Тогда для всякого фиксированного целого положительного s

$$\lambda_x\{\omega(m)<\ln\ln x+y\sqrt{\ln\ln x}\}=$$

$$=\sum_{k=0}^{s}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)(k-2)}}{(\ln\ln x)^{\frac{1}{2}k}}E_k(\ln\ln x+y\sqrt{\ln\ln x})\,V_{s-k}^{(k)}(y)+\frac{B\ln\ln\ln x}{(\ln\ln x)^{\frac{1}{2}(s+1)}}$$

равномерно по $x>c_{33}$ и y.

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 9.1 И. П. Кубилюса [2], стр. 178—183, поэтому на этом мы не будем останавливаться. Отметим, что характеристическая функция закона распределения $\lambda_x\{\omega(m)<\sigma^2+\sigma y\}$ равна

$$\psi_x(t)=R_x\left(\frac{it}{\sigma}\right)e^{-it\sigma}.$$

Нетрудно видеть, что наша теорема доказывается на основании формул (38), (40), (41), (43)–(47) при помощи лемм, доказательства которых не зависят от полугруппы G (см. [2], стр. 169–170, 174–177).

Из теоремы следует, в частности, что

$$\lambda_x\{\omega(m)<\ln\ln x+y\sqrt{\ln\ln x}\}=\Phi(y)+\frac{B\ln\ln\ln x}{\sqrt{\ln\ln x}},$$

$$\lambda_x\{\omega(m)<\ln\ln x+y\sqrt{\ln\ln x}\}=\Phi(y)+$$

$$+\frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi\ln\ln x}}\left\{-\frac{1}{6}y^2+\frac{1}{6}-a_1+E_1(\ln\ln x+y\sqrt{\ln\ln x})\right\}+\frac{B\ln\ln\ln x}{\ln\ln x},$$

$$\lambda_x\{\omega(m)<\ln\ln x+y\sqrt{\ln\ln x}\}=\Phi(y)+$$

$$+\frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi\ln\ln x}}\left\{-\frac{1}{6}y^2+\frac{1}{6}-a_1+E_1(\ln\ln x+y\sqrt{\ln\ln x})\right\}+$$

$$+\frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}\ln\ln x}\left\{-\frac{1}{72}y^5+\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{6}a_1\right)y^3+\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{2}a_1^2-\frac{1}{2}a_2\right)y+\right.$$

$$+E_1(\ln\ln x+y\sqrt{\ln\ln x})\left(\frac{1}{6}y^3+\left(a_1-\frac{1}{2}\right)y\right)-$$

$$\left.-yE_2(\ln\ln x+y\sqrt{\ln\ln x})\right\}+\frac{B\ln\ln\ln x}{(\ln\ln x)^{\frac{3}{2}}}.$$

В заключение пользуюсь случаем выразить сердечную благодарность И. П. Кубилюсу за постоянное внимание к работе и советы.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
30.V.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Бредихин, Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями, Мат. сб., 1958, 46(2), 143–158.
2. И. П. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел, Вильнюс, Гос. издат. полит. и научн. лит., 1962.
3. З. Юшкис, Предельные теоремы для аддитивных функций, определенных на упорядоченных полугруппах с регулярной нормировкой, Лит. мат. сб., 1964, 4, № 4, 565–603.
4. E. Landau, Über die Wurzeln der Zetafunktion, Math. Zs., 1924, 20, 98–104.
5. E. Landau, Über die Riemannsche Zetafunktion in der Nähe von $\sigma=1$, Rend. di Palermo, 1926, 50, 423–427.

KAI KURIŲ FUNKCIJŲ, APIBRĖŽTŲ SUTVARKYTUOSE PUSGRUPIUOSE SU REGULIARIU NORMAVIMU, PASISKIRSTYMO DĖSNIŲ ASIMPTOTINĖS FORMULĖS

Z. JUŠKYS

(*Reziumė*)

Sakysime, kad funkcija ω (*m*), apibrėžta sutvarkytame pusgrupyje su reguliariu normavimu [3], reiškia elemento *m* skirtingų generuojančių daliklių skaičių. Šiame darbe gautas funkcijos ω (*m*) pasiskirstymo dėsnio simptotinis išdėstymas.

ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNG DER VERTEILUNGSGESETZE EINIGER FUNKTIONEN AUF DEN GEORDNETEN HALBGRUPPEN MIT REGULÄRER NORMIERUNG

Z. JUŠKYS

(*Zusammenfassung*)

Es sei ω (*m*) die Anzahl der voneinander verschiedenen erzeugenden Teiler von *m*; wo Funktion ω (*m*) auf die geordnete Halbgruppe mit regulärer Normierung [3] definiert ist. In dieser Arbeit ist die asymptotische Entwicklung für den Verteilungssatz der Funktion ω (*m*) erhalten.