V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1965

О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ СУММ СЛУЧАЙНОГО ЧИСЛА СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А. АКСОМАЙТИС

Рассматривается последовательность независимых одинакого распределенных случайных величин

$$\xi_1,\ \xi_2\ \xi_3,\ \ldots \tag{1}$$

с $\mathbf{M}\xi_1=0$ и $\mathbf{D}\xi_1=1$. Пусть

$$S_{N_t}=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{N_t}, \qquad \bar{S}_{N_t}=\frac{S_{N_t}-\mathbf{M}S_{N_t}}{\sqrt{\mathbf{D}S_{N_t}}},$$

где N_t – случайная величина, принимающая лишь целые неотрицательные значения $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ с вероятностями $p_k=P\{N_t=k\}$ (p_k зависит от параметра t) и не зависящая от ξ_k, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Случайная величина S_{N_t}, следовательно, является суммой случайного числа N_t случайных слагаемых ξ_k ($k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N_t$), $S_0=0$.

В дальнейшем функции распределения и производящие функции моментов случайной величины ξ будем обозначать $F_\xi(x)$ и $f_\xi(z)$, соответственно. Так что

$$f_\xi(z)=Me^{\xi z}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{xz}\,dF_\xi(x).$$

Пусть далее $\varkappa_s$, $\gamma_s(t)$ и $\Gamma_s(t)$ – кумулянты порядка s случайных величин ξ_1, N_t и S_{N_t} соответственно.

В настоящей заметке доказывается следующая

Теорема. Если последовательность (1) и случайная величина N_t удовлетворяют условиям:

C_1. Существует $\varepsilon>0$ такое, что $f_{\xi_1}(z)$ аналитична в некоторой полосе $|\mathrm{Re}\,z|<\varepsilon$ (условие Крамера).

C_2. $\mathbf{M}N_t\to\infty$ при $t\to\infty$.

C_3. Существует положительное число С такое, что

$$|\gamma_{\left[\frac{s}{2}\right]}(t)|\leqslant C^s(MN_t)^{\frac{s(1-\Theta)}{2}+\Theta}$$

для всех $0<\Theta\leqslant 1$,

где $[r]$ – целая часть числа z, тогда для вероятностей

$$1-F_{\bar{S}_{N_t}}(x), \quad F_{\bar{S}_{N_t}}(-x)$$

больших уклонений

$$1<x\leqslant 0\,[(MN_t)^{\frac{\Theta}{2}}]$$

справедливы соотношения

$$\frac{1-F_{\bar{S}_{N_t}}(x)}{1-\Phi(x)}=e^{\frac{x^3}{(MN_t)^{\frac{\Theta}{2}}}\lambda_t\left(\frac{x}{(MN_t)^{\frac{\Theta}{2}}}\right)}\left[1+O\left(\frac{x}{(MN_t)^{\frac{\Theta}{2}}}\right)\right],$$

$$\frac{F_{\bar{S}_{N_t}}(-x)}{\Phi(-x)}=e^{-\frac{x^3}{(MN_t)^{\frac{\Theta}{2}}}\lambda_t\left(\frac{-x}{(MN_t)^{\frac{\Theta}{2}}}\right)}\left[1+O\left(\frac{x}{(MN_t)^{\frac{\Theta}{2}}}\right)\right],$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du$, а $\lambda_t(\tau)$ – степенной ряд, сходящийся при достаточно малых значениях $|\tau|$ равномерно относительно t, а именно

$$\lambda_t(\tau)=\frac{\varkappa_3}{6(MN_t)^{\frac{1}{2}}}\Delta_t+\left[\frac{\varkappa_4+3\varkappa_3^2}{24MN_t}+\frac{DN_t}{\gamma(MN_t)^2}\right]\Delta_t^2\tau+\ldots$$

Доказательство теоремы. При доказательстве теоремы используются главным образом результаты [1], где большие уклонения крамерского типа получаются для $1<x\leqslant O(\Delta_t)$, а в нашем случае

$$\Delta_t=\inf_{s\geqslant 3}\left\{\frac{s!\,B_t^s}{|\Gamma_s(t)|}\right\}^{\frac{1}{s-2}}, \tag{2}$$

где $B_t^2=\mathbf{D}S_{N_t}$.

Для оценки $\Gamma_s(t)$ понадобится

Лемма. Если N_t для каждого t принимает лишь конечное число значений, то производящая функция моментов суммы S_{N_t} есть сложная функция, а именно

$$f_{S_{N_t}}(z)=f_{N_t}[K(z)], \tag{3}$$

где $K(z)=\ln f_{\xi_1}(z)$, а в качестве логарифма берется его главное значение, стремящееся к нулю при $z\to 0$.

Доказательство. Лемма доказывается по аналогии с теоремой из [2] стр. 292. Производящая функция моментов случайной величины N_t

$$f_{N_t}(z)=Me^{N_t z}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{zk}p_k.$$

Для производящей функции моментов суммы S_{N_t} получаем

$$f_{S_{N_t}}(z)=Me^{S_{N_t}z}=\sum_{k=0}^{\infty}Me^{S_k z}p_k=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}f_{\xi_1}^k(z)p_k=\sum_{k=0}^{\infty}e^{k\cdot K(z)}p_k=f_{N_t}[K(z)].$$

При условии C_1 $f_{S_{N_t}}(z)$ существует для некоторых $|z|<L$ (L – константа). Лемма доказана.

Оценим модуль $\Gamma_s(t)$. Пусть

$$R_{N_t}(z)=\ln f_{N_t}(z)=G[K(z)], \tag{4}$$

и кроме того

$$R_s(z)=\frac{d^s R_{N_t}(z)}{dz^s},\quad G_s(z)=\frac{d^s G[K(z)]}{dK(z)^s},\quad K_s(z)=\frac{d^s K(z)}{dz^s}.$$

Для любого целого $s \geqslant 1$, учитывая (4), имеем

$$R_s(z)=\sum{}' \frac{s!}{m_1!\,m_2!\,\ldots\,m_s!}\,G_m(z)\prod_{l=1}^{s}\left(\frac{K_l(z)}{l!}\right)^{m_l}, \tag{5}$$

где суммирование производится по всем целым неотрицательным решениям системы уравнений:

$$m_1+2m_2+\ldots+sm_s=s,$$
$$m_1+m_2+\ldots+m_s=m.$$

При условии C_1 и аналитичности $G(\omega)$ в окрестности $\omega=K(0)=0$ можно разложить $R_{N_t}(z)$ на ряд Тейлора с коэффициентами

$$\Gamma_s(t)=R_s(z)\,|_{z=0}=\sum{}' \frac{s!\,\gamma_m(t)}{m_1!\,m_2!\,\ldots\,m_s!}\prod_{l=1}^{s}\left(\frac{\varkappa_l}{l!}\right)^{m_l}. \tag{6}$$

Если $\mathbf{M}\xi_1=\varkappa_1=0$, имеем

$$\Gamma_s(t)=\sum{}'' \frac{s!\,\gamma_m(t)}{m_2!\,\ldots\,m_s!}\prod_{l=2}^{s}\left(\frac{\varkappa_l}{l!}\right)^{m_l}, \tag{7}$$

где Σ'' означает суммирование по всем целым неотрицательным решениям системы уравнений

$$2m_2+\ldots+sm_s=s,$$
$$m_2+\ldots+m_s=m.$$

Несколько первых кумулянтов нетрудно найти с помощью (7); очевидно

$$\Gamma_1(t)=\boldsymbol{M}S_{N_t}=0,\quad \Gamma_2(t)=\boldsymbol{D}\,S_{N_t}=\boldsymbol{M}\,N_t\cdot\varkappa_2,$$
$$\Gamma_3(t)=\boldsymbol{M}\,N_t\,\varkappa_3,\quad \Gamma_4(t)=3\,\mathbf{D}\,N_t\,\varkappa_2^2+\boldsymbol{M}\,N_t\,\varkappa_4,$$
$$\Gamma_5(t)=10\,\boldsymbol{D}\,N_t\,\varkappa_2\,\varkappa_3+\mathbf{M}\,N_t\,\varkappa_5,$$
$$\Gamma_6(t)=3\,\boldsymbol{M}(N_t-\boldsymbol{M}\,N_t)^3\,\varkappa_2^3+5\boldsymbol{D}\,N_t\,(2\,\varkappa_3^2+3\,\varkappa_4\,\varkappa_2)+\mathbf{M}\,N_t\,\varkappa_6.$$

Ясно, что на окружности $|z|=\delta<\varepsilon$ $|K(z)|\leqslant B$, а тогда, в силу неравенств Коши,

$$|\varkappa_l|\leqslant\frac{B(l-1)!}{\delta^{l-1}}. \tag{8}$$

Теперь, учитывая (8) и равенство Коши

$$\sum{}' \frac{s!}{m_1!\,\ldots\,m_s!}\prod_{l=1}^{s}\frac{1}{l^{m_l}}=s!,$$

из (7) получим

$$|\Gamma_s(t)|\leqslant H^s(s+1)!\sum_{m=1}^{\left[\frac{s}{2}\right]}|\gamma_m(t)|,$$

где H — константа и, не нарушая общности, $H>1$.

Пусть $\mathbf{M} N_t \to \infty$ $(t \to \infty)$, тогда для больших уклонений из (2):

$$\Delta_t = B_t^{\Theta} \inf_{s \geq 3} \left\{ \frac{s! \, B_t^{s(1-\Theta)+2\Theta}}{|\Gamma_s(t)|} \right\}^{\frac{1}{s-2}}$$

При $\mathbf{M}\xi_1 = 0$, $\mathbf{D}\xi_1 = 1$ имеем $B_t = \sqrt{\mathbf{M} N_t}$ и, учитывая (9) и C_3, получаем, что

$$\Delta_t \asymp B_t^{\Theta} = (\mathbf{M} N_t)^{\frac{\Theta}{2}} \to \infty$$

при $t \to \infty$ и $0 < \Theta \leq 1$.

Теорема доказана.

Некоторые следствия из теоремы.

1 Пусть выполнено условие C_1. Если случайная величина N_n имеет биномиальное распределение с параметрами n, p (n — целое число, p—константа), т. е.

$$p_k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

тогда $\mathbf{M} N_n = np$, $B_n = np$,
и теорема верна при

$$\Delta_n \asymp \sqrt{n} \qquad (n \to \infty).$$

2. Если выполнено условие C_1 и N_t имеет распределение Пуассона с параметром t, т. е.

$$p_k = \frac{e^{-t} t^k}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

тогда

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(t) = \ldots = t, \quad B_t = t$$

и

$$\Delta_t \asymp \sqrt{t} \qquad (t \to \infty).$$

3. Если выполнены условия C_1 и C_2 и N_t распределена „почти нормально", т. е.

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \gamma_k(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t) + o\left(\max\left[\gamma_1(t), \ \gamma_2(t)\right]\right),$$

а $\gamma_2(t) \leq V \gamma_1^{2-\Theta}(t)$ ($V > 0$ — константа),
то теорема верна при

$$\Delta_t \asymp (\mathbf{M} N_t)^{\frac{\Theta}{2}} \qquad (0 < \Theta \leq 1).$$

Вильнюсский Государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
19.IX.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Статулявичюс, Предельные теоремы и их уточнения для аддитивных случайных функционалов и сумм слабо зависимых случайных величин. Transactions of the Third Prague Conference, Прага, 1962.
2. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М., 1964.

APIE DIDELIUS ATSILENKIMUS ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SUMOMS SU ATSITIKTINIŲ DĖMENŲ SKAIČIUMI

A. AKSOMAITIS

(*Reziumė*)

Tarkime $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ — nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka su $\mathbf{M}\xi_1=0$ ir $\mathbf{D}\xi_1=1$.

Tarkime $S_{N_t}=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{N_t}$, $\bar S_{N_t}=\dfrac{S_{N_t}-\mathbf{M}\,S_{N_t}}{\sqrt{DS_{N_t}}}$, kur N_t yra atsitiktinis dydis, įgyjantis sveikas neneigiamas reikšmes $k=0, 1, 2, \ldots$. Darbe įrodoma sekanti teorema:

Tarkime patenkintos C_1-C_3 sąlygos. Tada, kai $1<x\leqslant 0\,[(\mathbf{M}\,N_t)^{\frac{\Theta}{2}}]$ visiems $0<\Theta\leqslant 1$, galioja

$$\frac{1-F_{\bar S_{N_t}}(x)}{1-\Phi(x)}=e^{\frac{x^3}{(MN_t)^{\frac{\Theta}{2}}}\lambda_t\left(\frac{x}{(MN_t)^{\frac{\Theta}{2}}}\right)}\left[1+O\left(\frac{x}{(MN_t)^{\frac{\Theta}{2}}}\right)\right],$$

$$\frac{F_{\bar S_{N_t}}(-x)}{\Phi(-x)}=e^{-\frac{x^3}{(MN_t)^{\frac{\Theta}{2}}}\lambda_t\left(\frac{-x}{(MN_t)^{\frac{\Theta}{2}}}\right)}\left[1+O\left(\frac{x}{(\mathbf{M}N_t)^{\frac{\Theta}{2}}}\right)\right],$$

$\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$, kur $\lambda_t(\tau)$ pakankamai mažiems $|\tau|$ tolygiai atžvilgiu t konverguojanti laipsninė eilutė.

ÜBER GROSSE ABWEICHUNGEN VON SUMMEN DER ZUFALLSGRÖßEN MIT DER ZAHL VON ZUFÄLLIGEN SUMMANDEN

A. AKSOMAITIS

(*Zusammenfassung*)

Sei $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ eine Folge von unabhängiger Zufallsgrößen mit gleichmäßiger Verteilung mit den $\mathbf{M}\xi_1=0$ und $\mathbf{D}\xi_1=1$.

Sei $S_{N_t}=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{N_t}$, $\bar S_{N_t}=\dfrac{S_{N_t}-\mathbf{M}S_{N_t}}{\sqrt{\mathbf{D}S_{N_t}}}$, wo N_t eine Zufallsgröße ist, die volle positive Bedeutungen annimmt. Im vorliegenden Artikel wird der folgende Satz bewiesen:

Es seien die Bedingungen C_1-C_3 erfüllt. Es sei $1<x\leqslant o\,[(\mathbf{M}N_t)^{\frac{\Theta}{2}}]$ für $0<\Theta\leqslant 1$. Dann gilt

$$\frac{1-F_{\bar S_{N_t}}(x)}{1-\Phi(x)}=e^{\frac{x^3}{(\mathbf{M}N_t)^{\frac{\Theta}{2}}}\lambda_t\left(\frac{x}{(\mathbf{M}N_t)^{\frac{\Theta}{2}}}\right)}\left[1+O\left(\frac{x}{(\mathbf{M}N_t)^{\frac{\Theta}{2}}}\right)\right],$$

$$\frac{F_{\bar S_{N_t}}(-x)}{\Phi(-x)}=e^{-\frac{x^3}{(\mathbf{M}N_t)^{\frac{\Theta}{2}}}\lambda_t\left(\frac{-x}{(\mathbf{M}N_t)^{\frac{\Theta}{2}}}\right)}\left[1+O\left(\frac{x}{(\mathbf{M}N_t)^{\frac{\Theta}{2}}}\right)\right],$$

wo $\lambda_t(\tau)$ eine für genügend kleine Werte $|\tau|$ gleichmäßig für alle t konvergierende Potenzreihe ist.