V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1965

ОБЪЕКТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ p-КРАТНОГО СОСТАВНОГО МНОГООБРАЗИЯ

В. ЕЛИЗНИКАС

В. В. Вагнер построил теорию составного многообразия, локальными пространствами которого являются пространства Веблена – Уайтхеда, т. е. произвольные дифференцируемые многообразия. Составные многообразия появляются в приложениях дифференциальной геометрии к вариационному исчислению и теории дифференциальных уравнений в частных производных. В работах В. В. Вагнера [1] – [3] построена теория связности составного многообразия, теория производных Ли и теория абсолютного базисного дифференцирования.

В этой заметке рассматривается дифференциально-геометрическая связность p-кратного составного многообразия. Если $p=1$, то результаты этой заметки совпадают с результатами В. В. Вагнера [3].

1. p-кратное составное многообразие. Пусть V_{n_1} есть некоторое n_1 -мерное дифференцируемое многообразие класса C^{r_1}, которое мы будем называть *базисным пространством* (или *базой*). С каждой точкой M_1 базисного пространства V_{n_1} мы ассоциируем n_2-мерное дифференцируемое многообразие V_{n_2} (M_1) класса C^{r_2}, которое называется *локальным пространством* (или *слоем*), соответствующим точке M_1 базы V_{n_1}. Мы будем предполагать, что пространства $V_{n_2}(M_1)$, соответствующие различным точкам M_1 базы V_{n_1}, являются изоморфными многообразиями. Множество всех локальных пространств V_{n_2}, ассоциированных с точками базы V_{n_1}, называется *составным многообразием* в смысле В. В. Вагнера [1] – [3] и обозначается через $V_{n_2}(V_{n_1})$, т. е.

$$V_{n_2}(V_{n_1}) = \underset{M_1 \in V_{n_1}}{U} V_{n_2}(M_1).$$

Пусть с каждой точкой M_2 любого многообразия $V_{n_2}(M_1)$, т. е. с элементом (M_1, M_2) составного многообразия $V_{n_2}(V_{n_1})$, ассоциированно n_3-мерное дифференцируемое многообразие $V_{n_3}(M_1, M_2)$ класса C^{r_3}, которое мы будем называть локальным пространством (или слоем) соответствующим элементу (M_1, M_2) составного многообразия $V_{n_2}(V_{n_1})$. Локальные пространства $V_{n_3}(M_1, M_2)$, ассоциированные с различными элементами составного многообразия $V_{n_2}(V_{n_1})$, тоже будем считать изоморфными. Множество всех локальных пространств V_{n_3}, ассоциированных с элементами составного многообразия $V_{n_2}(V_{n_1})$, мы будем называть *двухкратным составным многообразием* и обозначать через $V_{n_3}\Big((V_{n_2}(V_{n_1})\Big)$.

Аналогичным образом можно ввести понятие *р-кратного составного многообразия* $V_{n_{p+1}}\left(V_{n_p}\left(\ldots(V_{n_1})\ldots\right)\right)$, где $V_{n_a}(a=1, 2, \ldots, p+1)-n_a$-мерное дифференцируемое многообразие класса C^{r_a}, а $V_{n_{p+1}}$ — слой, соответствующий элементу $(M_1, M_2, \ldots, M_p)$ $p-1$-кратного составного многообразия $V_{n_p}\left(V_{n_{p-1}}\left(\ldots(V_{n_1})\ldots\right)\right)$. Будем говорить, что в некоторой области базисного пространства V_{n_1} определено *р-кратное поле локальных координатных систем,* если в любом $\nu-1$-кратном составном многообразии $V_{n_{\nu+1}}\left(V_{n_\nu}\left(\ldots(V_{n_1})\ldots\right)\right)(\nu=2, \ldots, p)$, ассоциированном с точкой этой области, определена некоторая допустимая координатная система. Два поля p-кратных локальных координатных систем, заданные в геометрической области некоторой координатной системы базы V_{n_1}, связанны друг с другом преобразованиями следующего вида

$$x^{i'_{p+1}}=x^{i'_{p+1}}(x^{i_1}, x^{i_2}, \ldots, x^{i_{p+1}})$$
$$(i_a, j_a, k_a=1, 2, \ldots, n_a, a=1, 2, \ldots, p),$$

где эти уравнения, при любых фиксированных допустимых значениях переменных $x^{i_1}, x^{i_2}, \ldots, x^{i_p}$, определяют некоторое преобразование, принадлежащее фундаментальной псевдогруппе дифференцируемого многообразия $V_{n_{p+1}}$. Таким образом, задание допустимой координатной системы в V_{n_1} и поля p-кратных локальных координатных систем, определенного на некоторой геометрической области в V_{n_1}, определяет диффеоморфное отображение подмножества элементов p-кратного составного многообразия $V_{n_{p+1}}\left(V_{n_p}\left(\ldots(V_{n_1})\ldots\right)\right)$ на $n_1+n_2+\ldots+n_{p+1}$-мерную область арифметического пространства $R^{n_1+n_2+\ldots+n_{p+1}}$ переменных $x^{i_1}, x^{i_2}, \ldots, x^{i_{p+1}}$.

Будем предполагать, что p-кратное составное многообразие $V_{n_{p+1}}\left(V_{n_p}\left(\ldots(V_{n_1})\ldots\right)\right)$ является дифференцируемым многообразием, т. е., что все частные производные функции $x^{i'_{p+1}}$ по переменным x^{i_1} являются функциями класса C^{s_a} относительно переменных $x^{i_a}(a=2, \ldots, p;\ s_a\leqslant r_a)$. В этом случае p-кратное составное многообразие $V_{n_{p+1}}\left(V_{n_p}\left(\ldots(V_{n_1})\ldots\right)\right)$ будем называть p-кратным дифференцируемым составным многообразием. Заметим, что два поля ν-кратных локальных координатных систем связаны следующим законом преобразования:

$$x^{i'_\alpha}=x^{i'_\alpha}(x^{i_1}, x^{i_2}, \ldots, x^{i_\alpha}) \tag{1}$$
$$(\alpha=1, 2, \ldots, \nu+1).$$

Псевдогруппа G_{p+1} допустимых преобразований координат p-кратного составного дифференцируемого многообразия $V_{n_{p+1}}\left(V_{n_p}\left(\ldots(V_{n_1})\ldots\right)\right)$ определяется уравнениями:

$$x^{i'_\nu}=x^{i'_\nu}(x^{i_1}, \ldots, x^{i_\nu}) \tag{2}$$
$$(\nu=1, 2, \ldots, p+1).$$

Псевдогруппы $G_\nu (\nu=1, 2, \ldots, p+1)$ допустимых преобразований ν-кратных составных дифференцируемых многообразий $V_{n_{\nu+1}}\left(V_{n_\nu}\left(\ldots(V_{n_1})\ldots\right)\right)$ связаны соотношениями

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_p \subset G_{p+1}.$$

С каждым элементом p-кратного составного дифференцируемого многообразия $V_{n_{p+1}}\left(V_{n_p}\left(\ldots(V_{n_1})\ldots\right)\right)$ мы можем ассоциировать два векторных пространства:

1) Касательное векторное пространство $n_1+n_2+\ldots+n_{p+1}$ измерений, которое обозначим через $T_{n_1+\ldots+n_{p+1}}(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{p+1}})$. Это пространство является изоморфным пространству дифференциальных операторов

$$X_{i_1}=\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \quad X_{i_2}=\frac{\partial}{\partial x^{i_2}}, \quad \ldots, \quad X_{i_{p+1}}=\frac{\partial}{\partial x^{i_{p+1}}}. \tag{3}$$

2) Касательное векторное пространство $T^*_{n_1+\ldots+n_{p+1}}(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{p+1}})$, сопряженное пространству $T_{n_1+\ldots+n_{p+1}}(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{p+1}})$.

Пространство $T_{n_1+\ldots+n_{p+1}}(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{p+1}})$ имеет следующие инвариантные подпространства:

$$T_{n_{p+1}}(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{p+1}}), \; T_{n_p+n_{p+1}}(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{p+1}}), \ldots, T_{n_1+\ldots+n_{p+1}}(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{p+1}}),$$

каждое из которых является инвариантным подпространством последующего. Фундаментальная группа $D_{n_a, \ldots, n_{p+1}}$ пространства $T_{n_a+\ldots+n_{p+1}}$ $(a=0, 1, \ldots, p)$ является подгруппой группы $GL(n_1+\ldots+n_{p+1}, R)$. Прямому и обратному преобразованию группы $D_{n_a, \ldots, n_{p+1}}$ соответствуют матрицы:

$$X=\left\|\begin{matrix} x^{i'_a}_{i_a} & 0 & & 0 \\ x^{i'_{a+1}}_{i_a} & x^{i'_{a+1}}_{i_{a+1}} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^{i'_{p+1}}_{i_a} & x^{i'_{p+1}}_{i_{a+1}} & & x^{i'_{p+1}}_{i_{p+1}} \end{matrix}\right\|, \quad X^{-1}=\left\|\begin{matrix} x^{i_a}_{i'_a} & 0 & & 0 \\ x^{i_{a+1}}_{i'_a} & x^{i_{a+1}}_{i'_{a+1}} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^{i_{p+1}}_{i'_a} & x^{i_{p+1}}_{i'_{a+1}} & \ldots & x^{i_{p+1}}_{i'_{p+1}} \end{matrix}\right\|,$$

где элементы диагональных клеток связаны следующими соотношениями:

$$x^{i'_a}_{i_a} x^{i_a}_{j'_a}=\delta^{i'_a}_{j'_a}, \quad x^{i'_a}_{j_a} x^{i_a}_{i'_a}=\delta^{i_a}_{j_a} \tag{4}$$

$$(a=1, 2, \ldots, p+1)$$

и $x^{i'_\alpha}_{j_\beta}$ — частные производные новых координат по старым координатам.

Если $\{(M_1, M_2, \ldots, M_{p+1}), e_{i_1}, \ldots, e_{i_{p+1}}\}$ натуральный репер пространства $T_{n_1+\ldots+n_{p+1}}(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{p+1}})$, то его векторы при преобразованиях группы $D_{n_1, \ldots, n_{p+1}}$ преобразуются следующим образом:

$$e_{i'_a}=\sum_{\alpha=a}^{p+1} x^{i_\alpha}_{i'_a} e_{i_\alpha} \qquad (a=1, 2, \ldots, p+1). \tag{5}$$

Пространство $T^*_{n_1+n_2+\ldots+n_{p+1}}(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{p+1}})$ имеет следующие инвариантные подпространства:

$$T^*_{n_1}(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{p+1}}) \subset T^*_{n_1+n_2}(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{p+1}}) \subset \ldots \subset T^*_{n_1+\ldots+n_p}(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{p+1}}).$$

Заметим, что векторы корепера $\{(M_1, \ldots, M_{p+1}), e^{i_1}, \ldots, e^{i_{p+1}}\}$ пространства $T^*_{n_1+\ldots+n_{p+1}}(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{p+1}})$ преобразуются следующим образом

$$e^{i'_a}=\sum_{\alpha=1}^{a} x^{i'_a}_{i_\alpha} e^{i_\alpha} \qquad (a=1,\ 2,\ \ldots,\ p+1). \tag{6}$$

2. Линейная дифференциально-геометрическая связность p-кратного составного многообразия. Касательное пространство $T_{n_1+\ldots+n_{p+1}}(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{p+1}})$ будем называть *вполне оснащенным*, если любое его инвариантное подпространство является оснащенным. Если пространство $T_{n_1+\ldots+n_{p+1}}$ $(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{p+1}})$ вполне оснащено, то и его дуальное пространство $T^*_{n_1+\ldots+n_{p+1}}$ $(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{p+1}})$ также является вполне оснащенным и наоборот. Инвариантное подпространство $T^*_{n_1+n_2}(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{p+1}})$ пространства $T^*_{n_1+\ldots+n_{p+1}}$ $(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{p+1}})$ будет оснащенным тогда и только тогда, когда существует линейно независимая система тензорных пфаффовых форм

$$\Theta^{i_2}=dx^{i_2}+\Gamma^{i_2}_{i_1}(x^{j_1},\ x^{j_2})\,dx^{i_1}, \tag{7}$$

т. е., когда определено поле гомоморфизмов пространства дифференциалов (dx^{i_1}, dx^{i_2}) на n_2-мерное пространство тензорных пфаффовых форм. Инвариантное подпространство $T^*_{n_1+\ldots+n_a}(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{p+1}})$ будет оснащенным тогда и только тогда, когда существует линейно независимая система обобщенно-тензорных пфаффовых форм:

$$\Theta^{i_\alpha}=dx^{i_\alpha}+\sum_{\beta=1}^{\alpha-1}\Gamma^{i_\alpha}_{j_\beta}(x^{j_1},\ \ldots,\ x^{j_\alpha})\,dx^{j_\beta} \tag{8}$$

$$(\alpha=2,\ 3,\ \ldots,\ a),$$

где под обобщенным тензором понимается система величин, элементы которой преобразуются при помощи клеточно-диагональной матрицы

$$\begin{Vmatrix} x^{i'_1}_{i_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x^{i'_2}_{i_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & x^{i'_{p+1}}_{i_{p+1}} \end{Vmatrix}.$$

Так как при допустимых преобразованиях координат элемента $(M_1, \ldots, M_{p+1})$ p-кратного составного многообразия $V_{n_{p+1}}\big(\ldots(V_{n_1})\ldots\big)$ формы Θ^{i_α} преобразуются по следующему закону

$$\Theta^{i'_\alpha}=x^{i'_\alpha}_{i_\alpha}\Theta^{i_\alpha}\,(\alpha=2,\ \ldots,\ p+1), \tag{9}$$

то величины $\Gamma^{i_\alpha}_{j_\beta}(\beta=1, \ldots, \alpha-1;\ \alpha=2, 3, \ldots, p+1)$ образуют дифференциально-геометрический объект следующей структуры:

$$\Gamma^{i'_\alpha}_{i'_\beta}=x^{i'_\alpha}_{i_\alpha}\Big(x^{i_\alpha}_{i'_\beta}+\sum_{\gamma=1}^{\alpha-1}x^{i_\gamma}_{i'_\beta}\Gamma^{i_\alpha}_{i_\gamma}\Big). \tag{10}$$

Этот объект $\Gamma^{i_\alpha}_{j_\beta}$ назовем *объектом линейной дифференциально-геометрической связности* p-кратного составного многообразия $V_{n_{p+1}}\big(\ldots(V_{n_1})\ldots\big)$.

Пфаффовые формы Θ^{i_α}, определенные соотношениями (8), можно представить в виде

$$\Theta^{i_{\alpha+1}} = dx^{i_{\alpha+1}} + \sum_{\beta=2}^{\alpha-1} G^{i_{\alpha+1}}_{j_\beta} \Theta^{j_\beta} + G^{i_{\alpha+1}}_{i_1} dx^{i_1} \tag{11}$$

$$(\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ p),$$

где

$$G^{i_2}_{i_1} = \Gamma^{i_2}_{i_1},\quad G^{i_3}_{i_2} = \Gamma^{i_3}_{i_2},\quad G^{i_3}_{i_1} = \Gamma^{i_3}_{i_1} - \Gamma^{i_3}_{i_2}\Gamma^{i_2}_{i_1},$$

$$G^{i_4}_{i_3} = \Gamma^{i_4}_{i_3},\quad G^{i_4}_{i_2} = \Gamma^{i_4}_{i_2} - \Gamma^{i_4}_{i_3}\Gamma^{i_3}_{i_2},$$

$$G^{i_4}_{i_1} = \Gamma^{i_4}_{i_1} - \Gamma^{i_4}_{i_2}\Gamma^{i_2}_{i_1} - \Gamma^{i_4}_{i_3}\Gamma^{i_3}_{i_1} + \Gamma^{i_4}_{i_3}\Gamma^{i_3}_{i_2}\Gamma^{i_2}_{i_1} \tag{12}$$

и т. д.

Оказывается, что система величин $G^{i_\alpha}_{j_\beta}$ ($\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ a$; $\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ a-1$; $a = 2,\ 3,\ \ldots,\ p+1$) является дифференциально-геометрическим объектом следующей структуры:

$$G^{i'_\alpha}_{j'_\beta} = x^{i'_\alpha}_{i_\alpha}\left(x^{i_\alpha}_{j'_\beta} + x^{j_\beta}_{j'_\beta} G^{i_\alpha}_{j_\beta}\right). \tag{13}$$

Этот объект мы будем называть *расщепленным объектом линейной дифференциально-геометрической связности* p-кратного составного многообразия. Компоненты объекта $\Gamma^{i_\alpha}_{j_\beta}$ однозначно выражаются через $G^{i_\alpha}_{j_\beta}$.

3. **p-кратные лифты.** Отображение локальных пространств V_{n_2} вдоль произвольной кривой K базисного многообразия V_{n_1}:

$$K: x^{i_1} = x^{i_1}(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где $x^{i_1}(t)$ — функция класса C^1, можно определить при помощи системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx^{i_2}}{dt} + \Gamma^{i_2}_{i_1}\left(x^{i_1}(t),\ x^{i_2}\right)\frac{dx^{i_1}(t)}{dt} = 0 \tag{14}$$

с начальными условиями

$$x^{i_1}(0) = x^{i_1}_0, \qquad x^{i_2}(0) = x^{i_2}_0.$$

Отображение локальных пространств V_{n_2} определяется с помощью нахождения решения системы (14). Говорят, что вдоль кривой K пространства V_{n_1} определено *поле локальных точек* в смысле В. В. Вагнера, если в каждом V_{n_2} задана одна определенная точка (рассматриваются V_{n_2}, ассоциированные точкам кривой K). Поле локальных точек, заданное вдоль кривой K многообразия V_{n_1}, называется *постоянным полем локальных точек* (или *лифтом кривой* K), если его точки соответствуют друг другу при отображениях V_{n_2} вдоль K. Таким образом, кривая $K^*_{(1)}$ составного многообразия $V_{n_2}(V_{n_1})$:

$$K^*_{(1)}: x^{i_1} = x^{i_1}(t), \quad x^{i_2} = x^{i_2}(t)$$

является лифтом кривой K, если функции $x^{i_2}(t)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений (14), т. е., если касательный вектор

$$\tau = \tau^{i_1} e_{i_1} + \tau^{i_2} E_{i_2},$$

где

$$\tau^{i_1} = \frac{dx^{i_1}}{dt}, \qquad \tau^{i_2} = \frac{dx^{i_2}}{dt} + \Gamma^{i_2}_{i_1}\tau^{i_1},$$

кривой $K^*_{(1)}$ — горизонтальный ($\tau^{i_2} = 0$). В. В. Вагнер называет вектор $\tau^{i_2} E_{i_2}$ девиацией поля локальных точек в точке M_1 базисного пространства [3].

Отображение локальных пространств V_{n_a} вдоль кривой K базы V_{n_1} можно определить при помощи следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx^{i_\alpha}}{dt}+\sum_{\beta=1}^{\alpha-1}\Gamma^{i_\alpha}_{j_\beta}\frac{dx^{j_\beta}}{dt}=0 \tag{15}$$

$$\left(x^{i_\alpha}(0)=x^{i_\alpha}_0;\quad \alpha=2,\ 3,\ \ldots,\ a;\quad a=2,\ 3,\ \ldots,\ p+1\right).$$

Будем говорить, что вдоль кривой K базы V_{n_1} задано *ν-кратное поле локальных элементов*, если в каждом V_{n_α} $(\alpha=2,\ \ldots,\ \nu+1;\ \nu=1,\ \ldots,\ p)$ задана одна определенная точка, т. е. один определенный элемент $(\nu-1)$-кратного составного многообразия $V_{n_{\nu+1}}\left(\ldots(V_{n_1})\ldots\right)$. ν-кратное поле локальных элементов, заданное вдоль K базы V_{n_1}, назовем *ν-кратно постоянным полем* (или *ν-кратным лифтом* базисной кривой K), если его элементы соответствуют друг другу при упомянутых отображениях пространств $V_{n_a}(a\leqslant\nu+1)$. Таким образом, кривая $K^*_{(\nu)}$ ν-кратного составного многообразия $V_{n_{\nu+1}}\left(\ldots(V_{n_1})\ldots\right)$:

$$K^*_{(\nu)}: x^{i_\alpha}=x^{i_\alpha}(t),\qquad \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu+1 \tag{16}$$

является ν-кратным лифтом кривой K базы V_{n_1}, если функции $x^{i_\beta}(t)$ $(\beta=2,\ \ldots,\ \nu+1)$ являются решениями системы (15). Так как систему дифференциальных уравнений (15), в силу (11), можно представить в виде

$$\frac{dx^{i_\alpha}}{dt}+G^{i_\alpha}_{i_1}\frac{dx^{i_1}}{dt}=0,$$

то для любой кривой K базы существует единственный ν-кратный лифт $K^*_{(\nu)}$, проходящий через данный начальный элемент $(\overset{\circ}{M}_1\ \overset{\circ}{M}_2,\ \ldots,\ \overset{\circ}{M}_{\nu+1})$.

Касательный вектор τ кривой K_ν ν-кратного составного многообразия имеет вид

$$\tau=\frac{dx^{i_{\nu+1}}}{dt}e_{i_{\nu+1}}+\sum_{\alpha=1}^{\nu}\tau^{i_\alpha}E_{i_\alpha}, \tag{17}$$

где

$$E_{i_\alpha}=e_{i_\alpha}-\sum_{\beta=\alpha+1}^{\nu+1}\Gamma^{j_\beta}_{i_\alpha}e_{j_\beta} \tag{18}$$

$$(\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu+1)$$

и τ^{i_α} определены следующими рекуррентными уравнениями

$$\tau^{i_{\alpha+1}}=\frac{dx^{i_{\alpha+1}}}{dt}+\sum_{\beta=2}^{\alpha-1}G^{i_{\alpha+1}}_{j_\beta}\tau^{j_\beta}+G^{i_{\alpha+1}}_{i_1}\tau^{i_1} \tag{19}$$

$$(\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu).$$

Таким образом, кривая $K_{(\nu)}$ является ν-кратным лифтом кривой K тогда и только тогда, когда $\tau^{i_\alpha}=0$ $(\alpha=2,\ \ldots,\ \nu+1)$, т. е., когда её касательный вектор τ является ν-кратным горизонтальным вектором (все ν-тые девиации ν-кратного поля элементов равны нулю).

4. Объект кривизны. Если $F(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{p+1}})$ скалярная функция класса C^2, определенная на p-кратном составном многообразии, то коэффициенты разложения дифференциала этой функции через пфаффовые формы dx^{i_1} и Θ^{i_α}:

$$dF = \partial^{\Gamma}_{i_1} F dx^{i_1} + \sum_{\alpha=2}^{p+1} \partial^{\Gamma}_{i_\alpha} F \Theta^{i_\alpha}, \tag{20}$$

где

$$\partial^{\Gamma}_{i_1} F = \frac{\partial F}{\partial x^{i_1}} - \sum_{\alpha=2}^{p+1} \frac{\partial F}{\partial x^{i_\alpha}} G^{i_\alpha}_{i_1} \tag{21}$$

и

$$\partial^{\Gamma}_{i_\alpha} F = \frac{\partial F}{\partial x^{i_\alpha}} - \sum_{\beta=\alpha+1}^{p+1} \frac{\partial F}{\partial x^{j_\beta}} G^{j_\beta}_{i_\alpha} \tag{22}$$

$$(\alpha = 2,\ 3,\ \ldots,\ p+1),$$

назовём *пфаффовыми производными*, причем $\partial^{\Gamma}_{i_1} F$-*пфаффовыми производными первого рода*, а $\partial^{\Gamma}_{i_\nu} F$-*пфаффовыми производными* ν-*того рода*. Следует заметить, что пфаффовые производные ν-того рода скалярной функции F являются обобщенными тензорами и что вторые пфаффовые производные $(p+1)$-го рода всегда симметричны. Кососимметрические части вторых пфаффовых производных первого рода имеют вид

$$\partial^{\Gamma}_{[j_1} \partial^{\Gamma}_{i_1]} F = -\sum_{\alpha=2}^{p+1} \frac{\partial F}{\partial x^{i_\alpha}} \left\{ \frac{\partial G^{i_\alpha}_{[i_1}}{\partial x^{j_1]}} - \sum_{\beta=2}^{\alpha} \frac{\partial G^{i_\alpha}_{[i_1}}{\partial x^{j_\beta}} G^{j_\beta}_{j_1]} \right\}.$$

Так как

$$\frac{\partial F}{\partial x^{i_\alpha}} = \partial^{\Gamma}_{i_\alpha} F + \sum_{\beta=\alpha+1}^{p+1} \partial^{\Gamma}_{j_\beta} F \Gamma^{j_\beta}_{i_\alpha},$$

то

$$\partial^{\Gamma}_{[j_1} \partial^{\Gamma}_{i_1]} F = -\sum_{\alpha=2}^{p+1} R^{i_\alpha}_{i_1 j_1} \partial^{\Gamma}_{i_\alpha} F, \tag{23}$$

где

$$R^{i_2}_{i_1 j_1} = 2\left(\frac{\partial \Gamma^{i_2}_{[i_1}}{\partial x^{j_1]}} - \frac{\partial \Gamma^{i_2}_{[i_1}}{\partial x^{j_2}} \Gamma^{j_2}_{j_1]} \right) \tag{24}$$

и

$$R^{i_\alpha}_{i_1 j_1} = 2\left\{ \left(\frac{\partial G^{i_\alpha}_{[i_1}}{\partial x^{j_1]}} - \sum_{\gamma=2}^{\alpha} \frac{\partial G^{j_\alpha}_{[i_1}}{\partial x^{j_\gamma}} G^{j_\gamma}_{j_1]} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\beta=2}^{\alpha} \Gamma^{i_\alpha}_{j_\beta} \left(\frac{\partial G^{j_\beta}_{[i_1}}{\partial x^{j_1]}} - \sum_{\gamma=2}^{\beta} \frac{\partial G^{j_\beta}_{[i_1}}{\partial x^{j_\gamma}} G^{j_\gamma}_{j_1]} \right) \right\} \tag{25}$$

$$(\alpha = 3,\ 4,\ \ldots,\ p+1).$$

Так как

$$\partial^{\Gamma}_{[j_\alpha} \partial^{\Gamma}_{i_\alpha]} F = -\sum_{\beta=\alpha+1}^{p+1} \left\{ \frac{\partial G^{j_\beta}_{[i_\alpha}}{\partial x^{j_\alpha]}} - \sum_{\gamma=\alpha+1}^{\beta} \frac{\partial G^{j_\beta}_{[i_\alpha}}{\partial x^{k_\gamma}} G^{k_\gamma}_{j_\alpha]} \right\} \frac{\partial F}{\partial x^{j_\beta}}$$

$$(\alpha = 2,\ 3,\ \ldots,\ p),$$

то, выражая $\frac{\partial F}{\partial x^{j_\beta}}$ через пфаффовые производные $\partial^\Gamma_{i_\beta} F$, мы получим

$$\partial^\Gamma_{[j_\alpha} \partial^\Gamma_{i_\alpha]} F = - \sum_{\beta=\alpha+1}^{p+1} R^{i_\beta}_{i_\alpha j_\alpha} \partial^\Gamma_{i_\beta} F, \tag{26}$$

где

$$R^{i_{\alpha+1}}_{i_\alpha j_\alpha} = 2\left(\frac{\partial \Gamma^{i_{\alpha+1}}_{[i_\alpha}}{\partial x^{j_\alpha]}} - \frac{\partial \Gamma^{i_{\alpha+1}}_{[i_\alpha}}{\partial x^{j_{\alpha+1}}} \Gamma^{j_{\alpha+1}}_{j_\alpha]} \right) \tag{27}$$

$$(\alpha = 2,\ 3,\ \ldots,\ p)$$

и

$$R^{i_\beta}_{i_\alpha j_\alpha} = 2\left\{ \left(\frac{\partial G^{i_\beta}_{[i_\alpha}}{\partial x^{j_\alpha]}} - \sum_{\gamma=\alpha+1}^{\beta} \frac{\partial G^{i_\beta}_{[i_\alpha}}{\partial x^{j_\gamma}} G^{j_\gamma}_{j_\alpha]} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\gamma=\alpha+1}^{\beta} \Gamma^{i_\beta}_{j_\gamma} \left(\frac{\partial G^{j_\gamma}_{[i_\alpha}}{\partial x^{j_\alpha]}} - \sum_{\varepsilon=\alpha+1}^{\gamma} \frac{\partial G^{j_\gamma}_{[i_\alpha}}{\partial x^{j_\varepsilon}} G^{j_\varepsilon}_{j_\alpha]} \right) \right\} \tag{28}$$

$$(\beta = \alpha+1,\ \ldots,\ p+1;\quad \alpha = 3,\ 4,\ \ldots,\ p).$$

Дифференциально-геометрический объект $R^{k_\beta}_{i_\alpha j_\alpha}$ ($\beta = \alpha+1,\ \ldots,\ p+1$, $\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ p$) назовем *объектом кривизны линейной дифференциально-геометрической связности* p-кратного составного многообразия $V_{n_{p+1}}\left(\ldots(V_{n_1})\ldots\right)$. Если $p=1$, то этот объект совпадает с объектом кривизны составного многообразия [3].

Рассмотрим некоторую замкнутую ориентированную кривую K класса C^1 на V_{n_1}. Отображая локальные пространства V_{n_2}, ассоциированные с точками этой кривой K, начиная с некоторой произвольно фиксированной точки $\overset{\circ}{M}_1$ и возвращаясь после обхода этой кривой K снова в точку $\overset{\circ}{M}_1$, мы получим в локальном пространстве V_{n_2} развертку лифта $K^*_{(1)}$ кривой K. В общем случае кривая $K^*_{(1)}$ не является замкнутой и любой замкнутой кривой $K \subset V_{n_1}$ однозначно соответствует точечное преобразование локального пространства V_{n_2}. Множество этих преобразований в $V_{n_1}(\overset{\circ}{M}_1)$, соответствующих всем возможным замкнутым ориентированным кривым, проходящих через $\overset{\circ}{M}_1$, образуют группу, которая называется группой голономии линейной дифференциально-геометрической связности составного многообразия $V_{n_2}(V_{n_1})$ в точке $\overset{\circ}{M}_1$. Если $R^{i_2}_{i_1 j_1} = 0$, то лифт замкнутый и группа голономии состоит только из тождественного преобразования [3] и наоборот.

Если ориентированная кривая $K \subset V_{n_1}$ замкнута, то ей соответствующий ν-кратный лифт $K^*_{(\nu)}$ в общем случае не будет замкнутой кривой. Таким образом, любой замкнутой кривой $K \subset V_{n_1}$ однозначно соответствует преобразование элементов $(\nu-1)$-кратного составного многообразия $V_{n_{\nu+1}}\left(V_{n_\nu}\left(\ldots(V_{n_1})\ldots\right)\right)$. Множество всех этих преобразований, соответствующих всем возможным замкнутым и ориентированным кривым базы V_{n_1}, проходящих через $\overset{\circ}{M}_1$, образуют группу, которую назовем ν-*кратной* *группой голономии линейной дифференциально-геометрической связности* ν-кратного составного многообразия $V_{n_{\nu+1}}\left(V_{n_\nu}\left(\ldots(V_{n_1})\ldots\right)\right)$ в точке $\overset{\circ}{M}_1$. Оказывается, что *p-кратная группа голономии линейной дифференциально--геометрической связности p-кратного составного многообразия вырождается в тождественное преобразование тогда и только тогда, когда объект кривизны этой связности равен нулю.* В этом случае линейная дифференциально-геометрическая связность является локально голономной и лифты замкнутых кривых тоже замкнуты.

Вильнюсский Педагогический институт

Поступило в редакцию 10.XI.1964.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Вагнер. Абсолютная производная поля локального геометрического объекта в составном многообразии, ДАН СССР, 1943, т. 39, 223–226.
2. В. В. Вагнер. Постоянные поля локальных геометрических объектов в составном многообразии, ДАН СССР, 1946, т. 53, 187–190.
3. В. В. Вагнер. Теория составного многообразия, Труды семин. по векторн. и тензорн анализу, 1950, т. 8, 11–72.

p-KARTOTINĖS SUDĖTINĖS DAUGDAROS DIFERENCIALINIO GEOMETRINIO SĄRYŠIO OBJEKTAS

V. BLIZNIKAS

(*Reziumė*)

Tarkime, kad $V_{n_1}-n_1$-matė diferencijuojama daugdara klasės C^{r_1}, kurios kiekvienam taškui $M_1\in V_{n_1}$ yra priskirta n_2-matė diferencijuojama daugdara V_{n_2} klasės C^{r_2}. Jeigu $M_1\in V_{n_1}$, $M_1^*\in V_{n_1}$ ir $M_1\neq M_1^*$, tai skaitome, kad daugdaros $V_{n_2}(M_1)$ ir $V_{n_2}(M_1^*)$ yra izomorfinės. Daugdara

$$V_{n_2}(V_{n_1})=\underset{M_1\in V_{n_1}}{U} V_{n_2}(M_1)$$

yra vadinama sudėtine daugdara V. Vagnerio prasme [3]. Jeigu V_{n_a} $(a=1, 2, \ldots, p+1)$ – n_a-matės diferencijuojamos daugdaros klasės C^{r_a}, tai p-kartotinės sudėtinės daugdaros sąvoką galime įvesti sekančiu būdu:

$$V_{n_{p+1}}\left(V_{n_p}\left(\ldots(V_{n_1})\ldots\right)\right)=UV_{n_{p+1}}\{(M_1,\ldots,M_p)\},$$

$$(M_1,\ldots,M_p)\in V_{n_p}\left(V_{n_{p-1}}\left(\ldots(V_{n_1})\ldots\right)\right),$$

kur $(M_1,\ldots,M_p)-(p-1)$-kartotinės sudėtinės daugdaros $V_{n_p}\left(V_{n_{p-1}}\left(\ldots(V_{n_1})\ldots\right)\right)$ elementas.

Surasta p-kartotinės sudėtinės daugdaros diferencialinio geometrinio sąryšio objekto $\Gamma^{i\beta}_{j\alpha}$ struktūra (10) ir kreivumo objektas $R^{k\beta}_{i_\alpha j_\alpha}$, apibrėžtas pareinamybėmis (24), (25), (27) ir (28). Be to, įrodyta, kad p-kartotinės daugdaros p-kartotinės holonomijos grupės visos transformacijos yra tapatingos tada ir tik tada, kada tos daugdaros kreivumo objektas yra lygus nuliui.

DAS DIFFERENTIALGEOMETRISCHE ZUSAMMENHANGSOBJEKT DER p-FACH ZUSAMMENGESETZTEN MANNIGFALTIGKEIT

V. BLIZNIKAS

(*Zusammenfassung*)

Es sei eine n_1-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit V_{n_1} von Klasse C^{r_1}, die eine Grundmannigfaltigkeit gennant werden kann. Wir erweitern V_{n_1}, indem wir jedem Punkt M_1 von V_{n_1} eine n_2-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit V_{n_2} von Klasse C^{r_2} assoziieren und somit eine Mannigfaltigkeit

$$V_{n_2}(V_{n_1}) = \underset{M_1 \in V_{n_1}}{U} V_{n_2}(M_1)$$

erhalten. Sind die Mannigfaltigkeiten $V_{n_2}(M_1)$ und $V_{n_2}(M_1^*)\,(M_1 \neq M_1^*)$ zueinander isomorph, so heißt $V_{n_2}(V_{n_1})$ eine einfach zusammengesetzte Mannigfaltigkeit im Sinne von W. Wagner [3], in der ein Element (M_1, M_2) durch die n_1 Koordinaten im V_{n_1} und n_2 Koordinaten im V_{n_2} definiert wird. Wir betrachten jetzt die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten V_{n_a} $(a=1, 2, \ldots, p+1)$, wo $n_a = \dim V_{n_a}$, der Klasse C^{r_a}. In gleicher Weise kann man p-fach zusammengesetzte Mannigfaltigkeit definieren. Die Gesamtheit der Mannigfaltigkeiten $V_{n_{p+1}}$, welche zu verschiedenen Elementen $(M_1, M_2, \ldots, M_p)$ der $(p-1)$-fach zusammengesetzter Mannigfaltigkeit $V_{n_p}\left(V_{n_{p-1}}\left(\ldots(V_{n_1})\ldots\right)\right)$ assoziiert sind, nennen wir eine p-fach zusammengesetzte Mannigfaltigkeit $V_{n_{p+1}}\left(V_{n_p}\left(\ldots(V_{n_1})\ldots\right)\right)$. Ein kovarianter Tangentialraum $T^*_{n_1+\ldots+n_{p+1}}(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{p+1}})$ der p-fach zusammengesetzten Mannigfaltigkeit $V_{n_{p+1}}\left(V_{n_p}\left(\ldots(V_{n_1})\ldots\right)\right)$ ist dann und nur dann gänzlich normalisierbar, falls in $V_{n_{p+1}}\left(V_{n_p}\left(\ldots(V_{n_1})\ldots\right)\right)$ ein solches Objekt $\Gamma^{j_\beta}_{i_\alpha}$ existiert, dessen Komponenten bei zuläßigen Koordinatentransformationen (2) nach den Gleichungen (10) transformiert werden. Dieses Objekt heißt differentialgeometrisches Zusammenhangsobjekt der p-fach zusammengesetzten Mannigfaltigkeit.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die p-fache Holonomiegruppe der p-fach zusammengesetzten Mannigfaltigkeit auf die Identität reduziert wird, ist, daß alle Komponenten des Krümmungsobjekts (24), (25), (27) und (28) gleich Null sind.