V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1965

О ЛИНЕЙНОМ И ПЛОСКОМ ПОИСКАХ

Э. ГЯЧЯУСКАС

Рассмотрим некоторые задачи линейного и плоского поисков. Математическим аппаратом исследования является интегральная геометрия. Предварительно определим одну кинематическую меру, которую применим в случае линейного поиска.

§ 1. Кинематическая мера множества отрезков заданной длины, содержащихся внутри данного круга

Пусть имеется круг H радиуса R и некоторый ориентированный отрезок K длины L. Определим кинематическую меру множества всех ориентированных отрезков длины L, содержащихся внутри круга радиуса R. Будем пользоваться кинематической плотностью вида $dK=[d\vec{G}dt]$, данного в [5], *стр*. 35. $\vec{G}$-ориентированная прямая, содержащая отрезок K. $d\vec{G}=2dG=2[dpd\Theta]$. p — расстояние от начала координат до прямой G, Θ — угол прямой, содержащей тот перпендикуляр, с осью абсцисс (область изменения угла Θ есть $[0, \pi]$ ввиду того, что перешли к неориентированной прямой G), t — расстояние от точки одного конца отрезка K до основания перпендикуляра. Ввиду свойства инвариантности, начало координат помещаем в центре круга H. Пусть σ — длина хорды, отсекаемой кругом H на прямой G. Тогда искомую меру m_1 определим следующим образом:

$$m_1=\int\limits_{K\subset H} dK=\int\limits_{-\frac{\sigma}{2}}^{\frac{\sigma}{2}-L} dt \int\limits_{K\subset H} d\vec{G}=2\int\limits_{\sigma\geqslant L}(\sigma-L)\,dG.$$

Обозначим

$$I_1=\int\limits_{\sigma\geqslant L} LdG,\quad I_2=\int\limits_{\sigma\geqslant L}\sigma dG.$$

Тогда

$$m_1=2(I_2-I_1).$$

Вычислим I_1

$$I_1=\int\limits_{\sigma\geqslant L} LdG=L\int\limits_{\sigma\geqslant L} dpd\Theta=2L\int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-\frac{L^2}{4}}} dp\int d\Theta=2L\sqrt{R^2-\frac{L^2}{4}}\int d\Theta.$$

Вычислим второй интеграл

$$I_2=\int\limits_{\sigma\geqslant L}\sigma dG=\int\limits_{\sigma\geqslant L}\sigma d\Theta dp=2\int\limits_0^{\sqrt{R^2-\frac{L^2}{4}}}\sigma(p)\,dp\int d\Theta.$$

Так как $\sigma(p)=2\sqrt{R^2-p^2}$, то

$$I_2=4\int\limits_0^{\sqrt{R^2-\frac{L^2}{4}}}\sqrt{R^2-p^2}\,dp\int d\Theta=\left[2R^2\arcsin\frac{\sqrt{R^2-\frac{L^2}{4}}}{R}+L\sqrt{R^2-\frac{L^2}{4}}\right]\int d\Theta,$$

$$m_1=2\pi\left[2R^2\arcsin\frac{\sqrt{R^2-\frac{L^2}{4}}}{R}-L\sqrt{R^2-\frac{L^2}{4}}\right].$$

Таким образом кинематическая мера множества всех ориентированных отрезков длины L, содержащихся внутри круга радиуса R, равна

$$m_1=2\pi\left[2R^2\arccos\frac{L}{2R}-L\sqrt{R^2-\frac{L^2}{4}}\right].$$

§ 2. Линейный поиск

Вероятность обнаружения

Пусть в круге H радиуса R расположен объект K_0. На круг H бросается наугад прямолинейный отрезок K длины L. Предполагается, что отрезок K целиком помещается в круге H и распределен равномерно, т. е., все направления отрезка и все положения центра одинаково возможны. Требуется определить вероятность того, что объект будет обнаружен, т. е.- бросаемый отрезок пересечет K_0.

Если объект K_0 есть выпуклая область с площадью F_0 и периметром L_0 и расположен в круге, концентрическом кругу H, с радиусом $R-L$, то вероятность обнаружения определим как отношение соответствующих кинематических мер следующим образом: $P_1=\frac{m_2}{m_1}$, где m_2 есть кине, матическая мера множества всех ориентированных отрезков длины L, имеющих общую точку с выпуклой фигурой площади F_0 и периметра L_0, равная

$$2\pi F_0+2LL_0,$$ см. [5], *стр.* 36.

Мера m_1 определена в § 1.

Следовательно

$$P_1=\frac{\frac{1}{\pi}LL_0+F_0}{2R^2\arccos\frac{L}{2R}-L\sqrt{R^2-\frac{L^2}{4}}}.$$

Выражение для P_1, данное Р. С. Гутером в [3], отличается от нашего только числителем, имеющим вид $\frac{2}{\pi}LV(K_0)+W(K_0)$, где $V(K_0)$ и $W(K_0)$, соответственно, линейная и плоская вариации области K_0 в смысле А. С. Кронрода и А. Г. Витушкина. Таким образом нам удалось избавиться от вариаций и вместе с тем, как следствие сравнения, получить выражения для линейной и плоской вариаций.

Следствие. Пусть K_0 есть выпуклая область с площадью F_0 и периметром L_0, тогда линейная и плоская вариации (в смысле А. С. Кронрода и А. Г. Витушкина) области K_0 соответственно равны

$$V(K_0)=\frac{L_0}{2}, \quad W(K_0)=F_0.$$

Математическое ожидание длины части отрезка L, находящейся в объекте

Пусть X — длина отрезка $K\cdot K_0$, $E(X)$ — математическое ожидание величины X. Применяя способ определения средних значений в интегральной геометрии, имеем, что

$$E(X)=\frac{\int\limits_{K\cdot K_0\neq 0} XdK}{\int\limits_{K\cdot K_0\neq 0} dK},$$

где

$$\int\limits_{K\cdot K_0\neq 0} dK=2\pi F_0+2LL_0, \qquad \int\limits_{K\cdot K_0\neq 0} XdK=2\pi F_0 L.$$

Последнее выражение получается из одного соотношения, имеющегося в [5], *стр.* 45.

Таким образом

$$E(X)=\frac{\pi LF_0}{\pi F_0+LL_0}.$$

В работах [1] и [4] были вычислены математические ожидания только для конкретных объектов, имеющих вид круга, эллипса и правильного треугольника.

§ 3. Плоский поиск

Вероятность обнаружения

Пусть в круге H радиуса R расположен объект K_0. На круг бросается наугад круг K радиуса $\rho<R$, целиком помещающийся и равномерно распределенный в круге H. Предположим, что объект K_0 есть выпуклая область с площадью F_0, периметром L_0 и расположен в круге, концентрическом H, с радиусом $R-2\rho$.

Требуется определить вероятность P_2 того, что бросаемый круг K пересечет объект K_0, т. е., будет иметь с ним общую точку.

Определим P_2 следующим образом:

$$P_2=\frac{m_4}{m_3},$$

где m_4 есть кинематическая мера множества всех возможных положений круга радиуса ρ, при которых он имеет общую точку с фиксированной выпуклой областью K_0.

$$m_4=2\pi(F_0+\pi\rho^2)+2\pi\rho L_0 \quad \text{(см. [5], } \textit{стр. } 47).$$

m_3 обозначает кинематическую меру множества всех возможных положений круга радиуса ρ, при которых он целиком содержится внутри круга радиуса R.

Пользуясь кинематической плотностью вида $[dxdyd\varphi]$, определим

$$m_3 = \int\limits_D dxdyd\varphi,$$

где D есть круг радиуса $R-\rho$, а x, y — координаты центра круга с радиусом ρ.

Имеем, что

$$m_3 = 2\pi^2 (R-\rho)^2.$$

Следовательно

$$P_2 = \frac{\pi\rho^2 + \rho L_0 + F_0}{\pi (R-\rho)^2}.$$

Математическое ожидание площади области $K \cdot K_0$

Пусть Y — площадь области $K \cdot K_0$, $E(Y)$ — математическое ожидание величины Y. Тем же способом, как и в предыдущем параграфе, определяем что

$$E(Y) = \frac{\int\limits_{K \cdot K \neq 0} YdK}{\int\limits_{K \cdot K_0 \neq 0} dK},$$

где

$$\int\limits_{K \cdot K_0 \neq 0} YdK = 2\pi^2 \rho^2 F_0 \qquad \text{(см. [5], } \textit{стр.}\text{ 44).}$$

Имеем

$$E(Y) = \frac{\pi\rho^2 F_0}{\pi\rho^2 + \rho L_0 + F_0}.$$

В том случае, когда объект K_0 и фигура поиска K суть круги с радиусами r и ρ, соответственно,

$$E(Y) = \frac{\pi r^2 \rho^2}{(r+\rho)^2}.$$

Этот частный случай рассматривался Р. С. Гутером в [2].

Институт физики и математики
АН Литовской ССР

Поступило в редакцию
6.IV.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Большаков. О вероятности обнаружения при линейном поиске, Вестник трудов ВИА, № 160, 1960, 75–91.
2. Р. С. Гутер. Основные задачи плоского поиска, Вестник трудов ВИА, № 160, 1960, 92–105.
3. Р. С. Гутер. Некоторые прикладные задачи, связанные с геометрическими вероятностями, УМН, 16, в. 2, 1961, 166–167.
4. Б. В. Овчинский. О законе распределения разреза при линейном поиске, Вестник трудов ВИА, № 160, 67–74.
5. Л. А. Сантало. Введение в интегральную геометрию, Москва, 1956.

APIE LINIJINĘ IR PLOKŠČIĄ PAIEŠKAS

E. GEČIAUSKAS

Reziumė

Tegul skritulyje su spinduliu R yra iškilas taikinys K_0. Nustatomos tikimybės tokių įvykių: atsitiktinė atkarpa L turi bendrą tašką su K_0, atsitiktinis skritulys K turi bendrą tašką su K_0. Taip pat apskaičiuojamas aptikto taikinio ir paieškos figūros bendros dalies matematinis vidurkis abiem atvejams.

ON LINEAR AND PLANAR DISCOVERY

E. GEČIAUSKAS

(*Summary*)

Let a circle of radius R contains convex target K_0. Probabilities of intersections of K_0 with randomly chosen segment L and circle K respectively are defined. Also mean values of common area are finded.