V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2

1965

# ОБ ОЦЕНКЕ СНИЗУ ДЛЯ ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК

п. 1. Рассмотрим уравнение бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(x)=0 \tag{1}$$

при условии, что характеристическая функция $\omega(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ аналитична в некотором круге $|x|<R$, $R>0$. Как хорошо известно [1], если $y(x)$ – целое решение уравнения (1) такое, что $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r, y)}{r}<|\lambda_0|$, где $M(r, y)=\max\limits_{|x|=r}|y(x)|$, а $\lambda_0$ – ближайший к началу координат нуль $\omega(x)$ в круге $|x|<R$, то $y(x)=0$. Отсюда следует, в частности, что если $\omega(x)$ – целая функция, а $y(x)$ – нетривиальное целое решение уравнения (1), то $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r, y)}{r}\geqslant|\lambda_0|$, где $\lambda_0$ – наименьший по модулю нуль $\omega(x)$. Более сложной оказывается оценка выражения $\underline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{\ln M(r, y)}{r}$. В работе [2] Валирон, предполагая, что $\omega(x)$ – функция конечной степени (то-есть, $\omega(x)\in[1, \infty)$, [3]), показал, что любое целое нетривиальное решение $y(x)$ уравнения (1) удовлетворяет неравенству

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r, y)}{r}\geqslant h>0, \tag{2}$$

где $h$ – некоторое положительное число, одно и то же для всех решений данного уравнения; точное значение $h$ (то-есть, sup всех тех $h$, для которых имеет место (2), каково бы ни было целое решение данного уравнения) в работе [2] не определено. Однако, Валирон показал [2], что если $y(x)\in[1,\infty)$, то $\underline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r, y)}{r}\geqslant|\lambda_0|$. Эти результаты Валирона приведены в разделе II из [2] (пункт 8, стр. 47 – 49) и получены им довольно сложным путем на основе известных оценок Вимана—Валирона для производных целых функций. Мы сейчас покажем, что сравнительно элементарным путем, с помощью результатов Валирона, приведенных в разделе I и пунктах 4—5 раздела II статьи [2], можно получить точную оценку снизу для роста целого нетривиального решения уравнения (1).

**Теорема 1.** Если $y(x)$ — нетривиальное целое решение уравнения (1) и $\omega(x)\in[1,\ \infty)$, то $\varliminf_{r\to\infty}\frac{\ln M(r,\ y)}{r}\geqslant|\lambda_0|$, где $\lambda_0$ — ближайший к началу координат нуль $\omega(x)$. Если при этом решение не является экспоненциальной функцией (то-есть, если $\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln M(r,\ y)}{r}=\infty$), то $\lim_{r\to\infty}\frac{\ln M(r,\ y)}{r}=\infty$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\omega(0)=a_0\neq0$. Из результатов работы [2] (стр. 38) следует, что если $y(x)$ — целое решение (1), то равномерно в любом круге $|z|<R$.

$$y(z)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{m_n}P_{k,\,n}(z)\,e^{\lambda_k z},\tag{3}$$

где $\lambda_k$ — нуль $\omega(x)$ кратности $\mu_k\geqslant1$ ($|\lambda_k|\leqslant|\lambda_{k+1}|,\ k=0,\ 1,\ \ldots$), а $P_{k,\,n}(x)$ — многочлен степени $\leqslant\mu_k-1$, $k=0,\ 1,\ \ldots$. Введем оператор [3] $M_s y=\sum_{k=0}^{\infty}b_{k,\,s}\,y^{(k)}(x)$ с характеристической функцией $\omega_s(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_{k,\,s}\,x^k=\frac{\omega(x)}{(x-\lambda_s)^{\mu_s}}$. Так как по условию $\omega(x)\in[1,\ \sigma]$, $\sigma<\infty$, то и $\omega_s(x)\in[1,\ \sigma]$, и оператор $M_s y$, как это следует из [2], применим к любой целой функции и непрерывен по топологии равномерной сходимости в любой ограниченной области. При этом оператор $M_s y$ не повышает существенно рост $y(x)$ [1]: если $\sigma_2>\sigma_1$, то $M(r,\ M_s y)\leqslant A_s(\sigma_2)\,M(r+\sigma_2,\ y)$, где $A_s(\sigma_2)$ не зависит ни от $r$, ни от $y$. Применив оператор $M_s y$ к обеим частям равенства (3), найдем

$$M_s\,y(z)=\lim_{n\to\infty}P_{s,\,n}(z)\,e^{\lambda_s z}=Q_s^*(z)\,e^{\lambda_s z},$$

где $Q_s^*(z)$ — многочлен степени $\leqslant\mu_s-1$. Определим многочлен $Q_s(z)$ из соотношения $M_s\left(Q_s(z)\,e^{\lambda_s z}\right)=Q_s^*(z)\,e^{\lambda_s z}$. Пользуясь тем, что для любого многочлена $P(x)$ степени $n$ $M_s\left(P(z)\,e^{\lambda_s z}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\omega_s^{(k)}(\lambda_s)}{k!}\,P^{(k)}(z)\,e^{\lambda_s z}$, нетрудно показать, что всегда существует единственное полиномиальное решение $Q_s(z)$ уравнения $M_s\left(v(z)\,e^{\lambda_s z}\right)=Q_s^*(z)\,e^{\lambda_s z}$, причем степень $Q_s(z)$ равна степени $Q_s^*(z)$. Разность $w(z)=y(z)-Q_s(z)\,e^{\lambda_s z}$ удовлетворяет уравнению $M_s w=0$ и поэтому $Q_s(z)$ является так называемым многочленом Дирихле функции $y(z)$ (см. [2], стр. 40). Если $y(z)$ отлична от тождественного нуля, то хотя бы один из её многочленов Дирихле $Q_0(z),\ Q_1(z),\ \ldots$ также не равен тождественному нулю. Пусть $Q_m(z)\neq0$ и $Q_k(z)=0$ для $k<m$. Тогда $Q_m^*(z)\neq0$ и

$$M\left(r,\ Q_m^*(z)\,e^{\lambda_s z}\right)=M\left(r,\ M_m\,y(z)\right)\leqslant M(r+\sigma_2,\ y)\cdot A_m(\sigma_2).\tag{4}$$

При достаточно больших $r$ $M\left(r,\ Q_m^*(z)\,e^{\lambda_m z}\right)=cr^{k_0}\left(1+o_r(1)\right)e^{|\lambda_m|r}$, где $c\neq0$, $0\leqslant k_0\leqslant\mu_m-1$, $o_r(1)\to0$ при $r\to\infty$. Из (4) имеем $\varliminf_{r\to\infty}\frac{\ln M(r+\sigma_2,\ y)}{r}\geqslant|\lambda_m|\geqslant|\lambda_0|$, откуда $\varliminf_{r\to\infty}\frac{\ln M(r,\ y)}{r}=\varliminf_{r\to\infty}\frac{\ln M(r+\sigma_2,\ y)}{r}\geqslant|\lambda_0|$. Чтобы доказать вторую часть теоремы, отметим, что решение $y(z)$ будет экспоненциальной функцией тогда и только тогда, когда $Q_s(z)\equiv 0$ для $s\geqslant s_1(y)$. Поэтому, если $y(z)\overline{\in}[1, \infty)$, то для бесконечного множества номеров к $Q_{s_k}(z)\neq 0$, а следовательно, и $Q^*_{s_k}(z)\not\equiv 0$ и при любом таком $k$ $\varlimsup\limits_{r\to\infty}\frac{\ln M(r, y)}{r}\geqslant$ $\geqslant|\lambda_{s_k}|$, $k=1, 2, \ldots$ Остается только заметить, что $|\lambda_j|\to\infty$ при $j\to\infty$. Нетрудно проверить, что любое уравнение бесконечного порядка (с произвольными $a_k$, лишь бы $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_k|>0$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(x)=P(x), \tag{5}$$

где $P(x)$ — многочлен, всегда имеет полиномиальное решение $z(x)$. Поэтому, если $y(x)$ — трансцендентное целое решение уравнения (5), то функция $v(x)=y(x)-z(x)$ является нетривиальным целым решением однородного уравнения (1). Поэтому теорема 1 справедлива и для трансцендентных целых решений уравнения (5) с полиномиальной правой частью и экспоненциальной характеристической функцией [Валирон получил оценку (2) именно для таких решений уравнения (5)].

п. 2. Поставим теперь задачу об оценке снизу нетривиальных целых решений уравнения с многочленными коэффициентами

$$y(x)+\sum_{k=1}^{\infty} P_k(x)\,y^{(k)}(x)=0, \qquad P_k(x)=\sum_{s=0}^{n_k} a_s^k x^s. \tag{6}$$

Оказывается, возможность получения такой оценки, годной для всех целых решений данного уравнения зависит от того, насколько быстро возрастают степени $n_k$ многочленов $P_k(x)$. Рассмотрим в качестве примера уравнение $y(x)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n y^{(n)}(x)}{n!}=0$. В классе целых решений это уравнение эквивалентно соотношению $y(0)=0$, которому удовлетворяет любая функция вида $y=x\,f(x)$, где $f(x)$ — произвольная целая функция (в частности многочлен). Аналогично, уравнение $y-xy'=0$ имеет решение $y=Cx$. Оба эти примера имеют общую особенность: в них $n_k=k$ хотя бы для одного $k\geqslant 1$, и именно это обстоятельство приводит к тому, что эти уравнения имеют в качестве решений целые функции сколь угодно малого роста, какой вообще допустим для нетривиальной целой функции.

В случае, если $n_k<k$, $k=1, 2, \ldots$, удается в некоторых случаях оценить снизу рост целых решений уравнения (6). (Заметим, что метод, изложенный в п. 1, здесь уже неприменим.) Если потребовать, чтобы $n_k\leqslant k-1$, $k=1, 2, \ldots$ и чтобы функция $F(x, t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\,t^{-n}P_n(x)$ была аналитична в некотором бицилиндре $|x|\leqslant R_1$, $|t|\geqslant R_2$, то, как доказано в [4], для любого целого нетривиального уравнения (4) справедлива оценка

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln M(r, y)}{(\ln r)^2}\geqslant H, \tag{7}$$

где $H$ — некоторая зависящая от уравнения константа (её точное значение приведено в [4]; она определяется функцией $F(x, t)$ и имеет одно и то же значение для всех решений данного уравнения). Оценка (7) в известном смысле точна: можно построить [4] пример уравнения типа (6), имеющего решением целую функцию $y(x)$ такую, что $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{\ln M(r, y)}{(\ln r)^2} = H$, где $H$ вычислена для этого уравнения.

В случае, когда мы имеем дополнительную информацию о быстроте возрастания $\{n_k\}$ (например, $\sup\limits_{k\geqslant 1} \frac{n_k}{k} = \alpha < 1$), удается иногда методом работы [4] уточнить общую оценку (7).

**Теорема 2.** Пусть $F(x, t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n! P_n(x) t^{-n}$ аналитична в некотором бицилиндре $T_0 : |x| \leqslant R_0 \, |t| \geqslant R_1$ и $\alpha = \sup\limits_{k\geqslant 1} \frac{n_k}{k} < 1$. Тогда, если $y(x)$ — любое нетривиальное целое решение уравнения (6), то

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln M(r, y)}{r^{1-\alpha}} \geqslant \frac{R_0^\alpha}{R_1(1-\alpha)} \ln \frac{1}{\gamma} = A, \tag{8}$$

где

$$\gamma = \varlimsup_{R\to\infty} \gamma(R), \quad \gamma(R) = \max_{|x|\leqslant R, \ |t|\geqslant \delta R^\alpha} |F(x, t)|, \quad \delta = R_0^{-\alpha} R_1.$$

Доказательство. Если функция $F(x, t)$ аналитична в бицилиндре, то,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k! \sum_{s=0}^{n_k} \frac{|a_s^k| R_0^s}{R_1^k} < \infty$$

и при любом

$$R \geqslant R_0 \text{ и } \delta = R_0^{-\alpha} R_1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k! \sum_{s=0}^{n_k} \frac{|a_s^k| R^{s-\alpha k}}{\delta^k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k! \sum_{s=0}^{n_k} \frac{|a_s^k| R_0^s}{\delta^k R_0^{\alpha k}} < \infty.$$

Таким образом, $F(x, t)$ аналитична в области $|x| < R$, $|t| > \delta R^\alpha$ и непрерывна в бицилиндре $T_R : |x| \leqslant R$, $|t| \geqslant \delta R^\alpha$, какого бы ни было $R \geqslant R_0$.

Как показано в [4], $\gamma$ — конечное число, причем $\gamma \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty}{}' k! |a_{\alpha k}^k| \frac{R_0^{\alpha k}}{R_1^k}$ (в последней сумме берутся только те слагаемые, для которых $n_k = \alpha k$, так что $\gamma = 0$, если $n_k < \alpha k$ для всех $k \geqslant 1$, например, если $\alpha$ иррационально). Оценка (8) содержательна только в том случае, если $\gamma < 1$ (ниже будет показано, что этого всегда можно добиться).

Пусть $y(x)$ — нетривиальное целое решение уравнения (6). Возьмем произвольно малое $\varepsilon > 0$ и положим $A_1 = A - \varepsilon$. Зафиксируем число $r_0 \geqslant R_0$ и положим $r_n = r_{n-1} + \delta r_{n-1}^\alpha$, $n = 1, 2, \ldots$. Очевидно, что $r_n \uparrow \infty$. Подберем $d > 0$ настолько малым, чтобы для всех $r \leqslant r_1$ выполнялось неравенство:

$$M(r, y) \geqslant d \exp A_1 r^{1-\alpha}. \tag{9}$$

Предположим, действуя методом индукции, что неравенство (9) справедливо во всех кольцах $d_{k-1} : r_{k-1} \leqslant |z| < r_k$, $k = 1, 2, \ldots n$, и покажем, что оно будет иметь место и в кольце $d_n : r_n \leqslant |z| < r_{n+1}$. Функция $y_1(x) = x + \delta x^\alpha$

при всех $x_0 \geqslant R$ непрерывна и $\uparrow +\infty$ при $x \to +\infty$, причем $0 \leqslant x \leqslant y_1(x) = x + \delta x^\alpha \leqslant x + \delta\left(y_1(x)\right)^\alpha$, откуда $x \geqslant y_1(x) - \delta\left(y_1(x)\right)^\alpha$. Любое число $R \in \left[r_n, r_{n+1}\right)$ можно представить в виде $R = \rho + \delta\rho^\alpha$, где $r_{n-1} \leqslant \rho < r_n$. Для произвольного $x$ из круга $|z| \leqslant r$, $r \geqslant R_0$, уравнение (6) можно в условиях теоремы переписать так [4]:

$$y(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t| = \delta r^\alpha,\ |x| \leqslant r} y(x+t) F(x, t)\, dt = 0,$$

откуда $M(r, y) \leqslant \gamma(r) M(r + \delta r^\alpha, y)$. Для любого сколь угодно малого $\eta > 0$ и $r \geqslant r_1(\eta)$ $\gamma(r) < \gamma + \eta = \gamma_1$, и при всех $r > r_2 = \max\{R_0, r_1(\eta)\}$

$$M(r, y) \leqslant \gamma_1\ M(r + \delta r^\alpha, y). \tag{10}$$

Так как число $r_0$ можно всегда выбрать так, чтобы $r_0 > r_2$, то можно считать, что неравенство (10) выполняется для всех $r \geqslant r_0$. Тогда

$$M(R, y) = M(\rho + \delta\rho^\alpha, y) \geqslant \frac{M(\rho, y)}{\gamma_1}, \quad R \in d_n, \ \rho \in d_{n-1}.$$

Но по предположению $M(\rho, y) \geqslant d \exp A_1 \rho^{1-\alpha}$ и

$$M(R, y) \geqslant \frac{d_1}{\gamma_1} \exp A_1 (R - \delta R^\alpha)^{1-\alpha} = \frac{d_1}{\gamma_1} \exp\left[A_1 R^{1-\alpha} - A_1 \varphi(R)\right],$$

где

$$\varphi(R) = R^{1-\alpha} - (R - \delta R^\alpha)^{1-\alpha} \to (1-\alpha)\delta$$

при $R \to \infty$. За счет увеличения $r_0$ можно добиться того, чтобы $\varphi(r) < (1-\alpha)\delta + \eta_1$ для $r \geqslant r_0$; здесь $\eta_1$ — произвольно-взятое положительное число.

Выражение $-\ln\gamma - (A - \varepsilon)\left[(1-\alpha)\delta + \eta_1\right]$ при фиксированном $\varepsilon > 0$ будет положительным, если число $\eta_1$ выбрать достаточно малым $\Bigg($именно $\eta_1 < -\dfrac{\ln\gamma}{A-\varepsilon} - \delta(1-\alpha) = \dfrac{\ln\frac{1}{\gamma}}{A-\varepsilon} - \delta(1-\alpha)$; при этом, так как $\dfrac{\ln\frac{1}{\gamma}}{A-\varepsilon} > (1-\alpha)\delta$, то $\eta_1$ можно всегда выбрать $> 0\Bigg)$. Но тогда при всех достаточно малых $\eta$

$$-\ln(\gamma + \eta) - (A - \varepsilon)\left[1 - \alpha)\delta + \eta_1\right] \geqslant 0$$

и

$$M(R, y) \geqslant d \exp A_1 R^{1-\alpha}.$$

Таким образом, мы действуем так: выбираем произвольно малое $\varepsilon > 0$, по нему находим сначала $\eta_1$, а затем $\eta$ так, чтобы $\ln\gamma_1 + A_1[\eta_1 + (1-\alpha)\delta] \leqslant 0$, то-есть, чтобы

$$\ln\left(1 + \frac{\eta}{\gamma}\right) + A\eta_1 - \varepsilon\left[\eta_1 + \delta(1-\alpha)\right] \leqslant 0,$$

а по числам $\varepsilon$, $\eta$, $\eta_1$ находим уже $r_0$. Неравенство (9) доказано. Из него находим:

$$\underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\ln M(r, y)}{r^{1-\alpha}} \geqslant A_1 = A - \varepsilon,$$

откуда, в силу произвольной малости $\varepsilon > 0$, и следует оценка (8).

Нам осталось только показать, что величину $\gamma$ можно сделать меньшей единицы. После замены $x = bz$, где число $b > 1$ будет выбрано ниже, уравнение (6) можно переписать так:

$$y_2(z) + \sum_{k=1}^{\infty} R_k(z)\, y_2^{(k)}(z) = 0, \tag{11}$$

где

$$y_2(z) = y(bz), \quad R_k(z) = \sum_{s=0}^{n_k} a_s^k z^s b^{s-k}.$$

Тогда

$$F_b(x,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} k!\, R_k(x)\, t^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} k!\,(tb)^{-k} \sum_{s=0}^{n_k} a_s^k x^s b^s = F(bx,\ bt);$$

$$\gamma_b(R) = \max_{\substack{|z| \leqslant R \\ |t| \geqslant \delta R^{\alpha}}} |F_b(z,\ t)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k!\,(tb)^{-k} \sum_{s=0}^{n_k} |a_s^k|\, R^{s-\alpha k} b^s \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k!\, \delta^{-k} b^{k(\alpha-1)} \sum_{s=0}^{n_k} |a_s^k|\, R_0^{s-\alpha k} \leqslant b^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{\infty} k!\, R_1^{-k} \sum_{s=0}^{n_k} |a_s^k|\, R_0^s = cb^{\alpha-1}$$

и

$$\gamma_b = \overline{\lim_{R\to\infty}}\ \gamma_b(R) \leqslant cb^{\alpha-1} < 1$$

при достаточно большом $b$.

Замечание. Легко убедиться в том, что уравнение

$$y(x) + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x)\, y^{(k)}(x) = P(x), \qquad P_k(x) = \sum_{s=0}^{n_k} a_s^k x^s \tag{12}$$

в случае, когда $n_k \leqslant k-1$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$, а $P(x)$ — многочлен, имеет единственное полиномиальное решение, причем его степень та же, что и степень $P(x)$. Отсюда получаем, как раньше, что оценка (8) справедлива и для трансцендентных целых решений уравнения (12), если только коэффициенты $P_k(x)$ этого уравнения удовлетворяют условиям теоремы 2.

п. 3. Оценка (8), как мы убедились, получается довольно элементарным путем, однако она является довольно грубой $\Big($постоянная $A$ занижена и довольно сложно определяется по $F(x,\ t)\Big)$. В § 5 работы [5] мы, развивая метод Валирона для уравнения с постоянными коэффициентами (1), получили такую оценку снизу для трансцендентного целого решения (Т. Ц. Р.) уравнения (12) при условиях теоремы 2:

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\ r^{\alpha-1} \ln M(r,\ y) \geqslant \frac{|\lambda_0|}{e^2(1-\alpha)}. \tag{13}$$

Мы покажем сейчас, что эту оценку можно несколько улучшить, пользуясь тем же методом.

Пусть $y(x)$ — Т. Ц. Р. уравнения (12) и $\underline{\lim}_{r\to\infty} r^{\alpha-1} \ln M(r,\ y) = E.$ Тогда для некоторой последовательности чисел $\tilde{r}_q$

$$(\tilde{r}_q)^{\alpha-1} \ln M(\tilde{r}_q) < E + \delta, \quad \delta > 0,$$

где

$$M(r) = M(r,\ y).$$

Если $0 < Q < 1$ и $Q\tilde{r}_q \leqslant r < \tilde{r}_q$, $q = 1,\ 2,\ \ldots$, то

$$r^{\alpha-1} \ln M(r) \leqslant E_1, \text{ где } E_1 = (E+\delta)\, Q_1^{1-\alpha}, \quad Q_1 = Q^{-1}.$$

Положим $r_q = Q_1 \bar{r}_q$; на последовательности отрезков $[r_q, \; Q_1 r_q]$ имеем $r^{\alpha-1} \ln M(r) \leqslant E_1$. Образуем еще 2 последовательности отрезков $\Lambda_k = [r_k, \; Q_1 r_k]$ и $\Lambda'_k = \left[r_k, \; \frac{Q_1}{1+b} r_k\right]$, где $0 < b < 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Если $r \in \Lambda'_k$ и $h = rb$, то $r + h \in \Lambda_k$ и при $r \in \Lambda'_k$, как в [5], получаем

$$\ln M(r+h) \leqslant E_1 (r+h)^{1-\alpha} = E_2 r^{1-\alpha}, \quad E_2 = E_1 (1+b)^{1-\alpha},$$

откуда

$$w(r) \leqslant \frac{E_2 r^{1-\alpha}}{\ln(1+b)} = E_3 r^{1-\alpha}$$

(по поводу смысла функции $w(r)$ см. [5], 207). Далее, как в [5], берем число $D_1 > 1 + \sigma$, где $\sigma = \overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sqrt[k]{\sup\limits_{0 \leqslant s \leqslant n_k} |a_s^k| \, k!}$, и вводим отрезки $\tilde{\Lambda}_k = \left[r_k, \; \frac{Q_1}{\lambda(1+b)} r_k\right]$, где $\lambda = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Если $r \in \tilde{\Lambda}_k$ и $k$ достаточно велико, то $r + D_1 r^{\alpha} \in \tilde{\Lambda}'_k$. Оценивая $M(r, n) = M(r, y^{(n)})$ для $r \in \tilde{\Lambda}_k$, получим точно так же, как в [5],

$$M(r, n) \leqslant E_5 n! \, D_1^{-n} r^{-\alpha n} M(r), \text{ где } E_5 = \exp D_1 E_3,$$

а для выражения $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \alpha_k(r)$, при $r \in \sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{\Lambda}_k$ – старую оценку

$$\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(r) \leqslant \delta_n M(r), \quad \delta_n \to 0, \quad \alpha_k(r) = M\left(r, \; P_k(x) \, y^{(k)}(x)\right).$$

Повторяя дальше дословно рассуждения, приведенные на стр. 224 – 225 работы [5], приходим к неравенству $E_3 \geqslant |\lambda_0|$, или $(E+\delta) Q_1^{1-\alpha} (1+b)^{1-\alpha} \geqslant |\lambda_0| (1+b)$. Устремляя $\delta$ к нулю, найдем

$$E \geqslant \frac{|\lambda_0| \ln c}{Q_1^{1-\alpha} c^{1-\alpha}}, \qquad c = 1 + b, \quad 1 < c < Q_1 < \infty.$$

Нетрудно проверить, что наибольшее значение функции $\varphi(x, y) = \ln x \cdot x^{\alpha-1} \cdot y^{\alpha-1}$ в области $1 \leqslant x \leqslant y$, $1 \leqslant y < \infty$ достигается на границе области, в точке $x = y = \exp \frac{1}{2(1-\alpha)}$, и равно $\varphi_0 = \frac{1}{2e(1-\alpha)}$. Получение искомой оценки завершается теперь следующим образом. Возьмем $Q_1 = \exp \frac{1}{2(1-\alpha)} = Q_0$ и $b = Q_0 - 1 - \eta$, где $\eta > 0$. Тогда $E \geqslant \frac{|\lambda_0| \ln (Q_0 - \eta)}{Q_0^{1-\alpha} (Q_0 - \eta)^{1-\alpha}}$. Так как эта оценка справедлива при всех $\eta > 0$, то, переходя к пределу при $\eta \to 0$, получим:

$$E \geqslant \frac{|\lambda_0| \ln Q_0}{Q_0^{2(1-\alpha)}} = \frac{|\lambda_0|}{2e(1-\alpha)}.$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 3.** Если $y(x)$ – Т. Ц. Р. уравнения (12), причем $\sup\limits_{k \geqslant 1} \frac{n_k}{k} = \alpha < 1$ и $F(x, t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \, t^{-n} P_n(x)$ аналитична в некотором бицилиндре $|x| \leqslant R_0$, $|t| \geqslant R_1$, то $\underline{\lim\limits_{r \to \infty}} \frac{\ln M(r, y)}{r^{1-\alpha}} \geqslant \frac{|\lambda_0|}{2e(1-\alpha)}$. Хотя оценка (14) и не является окончательной, но она лучше прежней оценки (13).

п. 4. В заключение я бы хотел, пользуясь случаем, отметить некоторые описки и опечатки, которые по недосмотру автора оказались в статье [5]. Именно, в п. 1 из § 3 на странице 211, начиная с 5-й строчки сверху $\left(\text{при определении } H(\varepsilon)\right)$, и до конца пункта 1 величина $d$ должна быть заменена числом $c$, а вместо $d_k$ должны быть $c_k$. Такую же замену ($c$ вместо $d$ и $c_k$ вместо $d_k$) следует произвести в выкладках, приведенных на стр. 214 (§ 3, п. 3) и на стр. 216 (§ 4, п. 1). Наконец, на стр. 211, в неравенстве на 4-й строке снизу пропущен множитель $H(\varepsilon)$, а в оценке (3.2) на той же странице вместо $q_\sigma e^{\sigma r^{1-\alpha}}$ следует читать $q_\sigma e^{\sigma r^{1-\alpha}} \| y \|_r$.

Ростовский государственный университет

Поступило в редакцию
10.XI.1964

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, ГИТТЛ, 1952.
2. G. Valiron, Sur les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre infini et à coefficients constants, Ann. scient. Ec. norm. sup., 1929 (3), vol. 46, 25–53.
3. А. Ф. Леонтьев, Ряды полиномов Дирихле и их обобщения, Тр. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XIV, 294–315.
4. Ю. Ф. Коробейник, Об одном методе исследования дифференциального уравнения бесконечного порядка, Матем. сборн., 1962, т. 56(98), вып. 1, стр. 107–128.
5. Ю. Ф. Коробейник. О целых решениях дифференциального уравнения бесконечного порядка, Лит. матем. сборн., 1964, т. IV, № 2, 203–227.

## BEGALINĖS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES SVEIKŲJŲ SPRENDINIŲ AUGIMAS

J. KOROBEINIKAS

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjama begalinės eilės diferencialinė lygtis su pastoviais koeficientais

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z) = P(z),$$

kur $P(z)$ yra polinomas ir $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{k! \, |a_k|} < \infty$. Tarkime, kad $y(z)$ yra sveikas transcendentinis tokios lygties sprendinys ir $M(r, y) = \max\limits_{|x|=r} |y(x)|$. Tada $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{\ln M(r, y)}{r} \geqslant |\lambda_0|$, kur $\lambda_0$ yra charakteristinės funkcijos $\omega(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ nulis, mažiausiai nutolęs nuo koordinatų pradžios.

Be to, įrodyta, kad iš sąlygos $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r, y)}{r} = \infty$ seka $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{\ln M(r, y)}{r} = \infty$.

Darbe taip pat nagrinėjamos kai kurios diferencialinės lygtys su polinomialiniais koeficientais ir nustatomas sveikųjų sprendinių apatinis augimo rėžis.

## ON A LOWER BOUND OF INTEGRAL SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS OF INFINITE ORDER

J. F. KOROBEINIK

(*Summary*)

The author proves that if $y(z)$ is an transcendental integral solution of the differential equation of infinite order with constant coefficients

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z) = P(z)$$

where $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k| k!} < \infty$ and $P(z)$ is an polynomial, then $\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r, y)}{r} \geqslant |\lambda_0|$, $M(r, y) = \max_{|x|=r} |y(x)|$; $\lambda_0$ — the nearest to the origin root of $\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Moreover, if $\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r, y)}{r} = \infty$ then $\lim_{r\to\infty} \frac{\ln M(r, y)}{r} = \infty$. The author determines also a lower bound of integral solutions of some classes of the differential equations with polynomial coefficients.