V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1965

РЕШЕНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

М. П. САПАГОВАС

Многие задачи электродинамики и механики сплошных сред, гидродинамики и некоторых других областей науки и техники приводят к решению квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа с дивергентной главной частью

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} [a_i(x, u, p_j)] - a_0(x, u, p_j) = 0, \; p_j = \frac{\partial u}{\partial x_j} \; (j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1)$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при определенных краевых условиях. Для приближенного отыскания решения краевой задачи для частных случаев уравнения (1) на практике применялся метод конечных разностей [1], [2]. Однако в указанных работах отсутствует строгое доказательство существования единственного решения и сходимости итерационных процессов для системы нелинейных конечно-разностных уравнений и совсем не ставится вопрос о сходимости решения этой системы к решению дифференциального уравнения. В имеющихся немногочисленных работах по обоснованию метода конечных разностей для нелинейных эллиптических уравнений [3], [4] существенно то, что рассмотрение конечно-разностных схем основывается на принципе максимума для некоторой линейной задачи. Отсюда следует однозначная разрешимость нелинейной системы и сходимость ее решения к решению дифференциального уравнения. Однако практическое построение таких схем для уравнений типа (1), как будет отмечено ниже, связано с существенными трудностями.

В данной работе рассмотрение разностной схемы мы проводим не на основании принципа максимума. Следуя методу, изложенному в работе [5] для доказательства сходимости итерационного процесса к решению уравнения (1), мы строим аналогичный сходящийся итерационный процесс для соответствующей системы нелинейных разностных уравнений. Сходимость решения этой системы к решению дифференциального уравнения получается при этом как следствие из факта сходимости вышеупомянутых итерационных процессов.

1. Рассмотрим сначала задачу Дирихле для уравнения (1) в конечной области Ω с однородным краевым условием на границе области Γ:

$$u|_{\Gamma} = 0. \qquad (2)$$

Предположим, что задача (1), (2) имеет единственное решение, непрерывное в замкнутой области $\overline{\Omega}=\Omega+\Gamma$ и обладающее всеми требуемыми по ходу изложения производными.

Изучению задачи (1), (2) посвящены многочисленные работы. Так, например, в работе [6] получены ограничения на коэффициенты уравнения (1), область и граничную функцию (в случае неоднородных краевых условий), обеспечивающие существование единственного достаточно гладкого решения. Не перечисляя здесь все необходимые либо достаточные ограничения, отметим в частности те, которыми мы будем пользоваться для нашей цели.

Итак, пусть при всех значениях $x\in\Omega$ и любых u и p_j выполнены следующие условия [5]:

Условие А (условие ограниченной нелинейности). Функции a_i имеют ограниченные частные производные по аргументам u, $p_1, \ldots, p_n$.

Условие Б (усиленное условие эллиптичности). Для любых вещественных $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ выполнено неравенство:

$$\sum_{i,\,j=0}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=0}^{n}\xi_i^2,$$

где α — положительная постоянная, $p_j=\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $\dfrac{\partial}{\partial p_0}=\dfrac{\partial}{\partial u}$.

Заметим, что в случае, когда коэффициенты a_i не зависят явно от функции u, условие *Б* означает равномерную эллиптичность уравнения (1). Из условий *А* и *Б* в качестве следствия получаем:

$$\beta\sum_{i=0}^{n}\xi_i^2 \geqslant \sum_{i,\,j=0}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha\sum_{i=0}^{n}\xi_i^2, \tag{3}$$

где α, β — положительные постоянные.

В дальнейшем для простоты изложения ограничимся случаем $n=2$, хотя все изложенное ниже имеет место для любого конечного $n\geqslant 1$. Таким образом, рассмотрим уравнение

$$Lu\equiv\frac{\partial}{\partial x}[a(x,y,u,p,q)]+\frac{\partial}{\partial y}[b(x,y,u,p,q)]-c(x,y,u,p,q)=0 \tag{1^a}$$

с краевым условием (2), где $(x, y)\in\Omega$, $p=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Покроем область Ω квадратной сеткой с шагом h, образованной из прямых, параллельных координатным осям. Точки пересечения этих прямых назовем узлами или точками сетки. Из отрезков этих прямых составим замкнутую ломаную линию, приближающую в определенном смысле границу Γ области Ω. Совокупность узлов сетки, которые лежат внутри области, ограниченной ломаной линией, назовем сеточной областью Ω_h. Узлы сетки, расположенные на ломаной линии, назовем граничными узлами или просто границей Γ_h сеточной области Ω_h. Занумеруем обычным образом строки (горизонтальные линии) и столбцы (вертикальные линии) сеточной области $\overline{\Omega}_h=\Omega_h+\Gamma_h$, например, снизу вверх и слева направо. Узлы области $\overline{\Omega}_h$ будем обозначать (x_i, y_j) или просто (i, j), понимая под этим узел, принадлежащий j-ой строке и i-ому столбцу.

Из точек (i, j), принадлежащих Γ_h, образуем четыре класса точек:

$$(i, j)\in\Gamma_h^1, \text{ если } (i-1, j)\in\Omega_h;\ (i, j)\in\Gamma_h^2, \text{ если } (i, j-1)\in\Omega_h;$$
$$(i, j)\in\Gamma_h^3, \text{ если } (i+1, j)\in\Omega_h;\ (i, j)\in\Gamma_h^4, \text{ если } (i, j+1)\in\Omega_h.$$

Заметим, в частности, что отсюда совсем не следует, что множества $\prod\limits_{k=1}^{2}\Gamma_h^k$ и $\Gamma_h-\sum\limits_{k=1}^{4}\Gamma_h^k$ должны быть пустыми. Вводим обозначения:

$$\Omega_h+\Gamma_h^k=\Omega_h^k,\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4),$$
$$\Omega_h+\Gamma_h^1+\Gamma_h^2=\Omega_h^+,\ \Omega_h+\Gamma_h^3+\Gamma_h^4=\Omega_h^-.$$

Возьмем какой-нибудь узел $(x_i, y_j)\in\Omega_h$. Совокупность узлов (x_i+rh, y_j+sh), где $r, s=0, \pm 1$ назовем окрестностью узла (x_i, y_j). Нетрудно видеть, что для любого узла из Ω_h все узлы, принадлежащие его окрестности, принадлежат области $\overline{\Omega}_h$.

В каждой точке (x_i, y_j) области Ω_h аппроксимируем уравнение (1ᵃ) системой разностных уравнений одного из двух следующих видов:

$$\Lambda_1 u_{hij}\equiv\frac{a_{i+1,j}-a_{ij}}{h}+\frac{b_{i,j+1}-b_{ij}}{h}-c_{ij}=0, \tag{4ᵃ}$$

где

$$a_{ij}=a(x_i,\ y_j,\ u_{hij},\ \nabla_{\bar x}u_{hij},\ \nabla_{\bar y}u_{hij}),$$
$$u_{hij}=u_h(x_i,\ y_j),\ \nabla_{\bar x}u_{hij}=\frac{u_{hij}-u_{hi-1,j}}{h},\quad \nabla_{\bar y}u_{hij}=\frac{u_{hij}-u_{hi,j-1}}{h},$$

либо

$$\Lambda_2 u_{hij}\equiv\frac{a_{ij}-a_{i-1,j}}{h}+\frac{b_{ij}-b_{i,j-1}}{h}-c_{ij}=0, \tag{4ᵇ}$$

где

$$a_{ij}=a(x_i,\ y_j,\ u_{hij},\ \nabla_x u_{hij},\ \nabla_y u_{hij}),$$
$$\nabla_x u_{hij}=\frac{u_{hi+1,j}-u_{hij}}{h},\quad \nabla_y u_{hij}=\frac{u_{hi,j+1}-u_{hij}}{h}.$$

В выражениях (4ᵃ) и (4ᵇ) b_{ij} и c_{ij} берутся при тех же значениях аргументов, что и соответствующие функции a_{ij}. Обозначения, использованные здесь, мы в основном позаимствовали из работ [4] и [7].

С помощью разложения по формуле Тейлора функций u, a, b и c в узлах сетки (i, j) при предположении о ограниченности соответствующих частных производных этих функций легко получаем следующие погрешности аппроксимации:

$$|Lu_{ij}-\Lambda_k u_{ij}|\leqslant C_k\cdot h,\qquad (k=1,\ 2),$$

где $u_{ij}=u(x_i,\ y_j)$; C_k не зависят от h, а лишь от модулей производных некоторого порядка функций u, a, b и c.

Снос граничных условий, заданных на границе Γ, на границу Γ_h, мы осуществим по формуле

$$u_{hij}|_{\Gamma_h}=0. \tag{5}$$

Очевидно, что погрешность аппроксимации граничных условий есть также порядка $O(h)$.

2. Рассмотрим теперь вопрос о разрешимости систем уравнений (4ᵃ), (5) и (4ᵇ), (5). Следуя методике, изложенной в [5] для дифференциальных уравнений, докажем несколько утверждений о сходимости итерационных процессов для решения систем уравнений (4ᵃ), (5) и (4ᵇ), (5).

Прежде всего вводим скалярные произведения:

$$(u_h, v_h) = h^2 \sum_{(i,j)\in\overline{\Omega}_h} u_{hij} v_{hij},$$

$$[u_h, v_h] = h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h^+} (\nabla_{\bar{x}} u_{hij} \nabla_{\bar{x}} v_{hij} + \nabla_{\bar{y}} u_{hij} \nabla_{\bar{y}} v_{hij})$$

и соответствующие им нормы:

$$\| u_h \|_1 = \sqrt{(u_h, u_h)}, \tag{6}$$

$$\| u_h \|_2 = \sqrt{[u_h, u_h]}. \tag{7}$$

Здесь значения u_{hij} и v_{hij} по всей совокупности узлов $(i, j)\in\overline{\Omega}_h$ объединены в векторы u_h и v_h.

В дальнейшем нам придется пользоваться формулой суммирования по частям:

$$h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h^k} v_{hij} \nabla_{\bar{x}_k} u_{hij} = -h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h^{k+2}} u_{hij} \nabla_{x_k} v_{hij} +$$

$$+ h^2 \sum_{(i,j)\in\Gamma_h^k} u_{hij} v_{hij} - h^2 \sum_{(i,j)\in\Gamma_h^{k+2}} u_{hij} v_{hij}, \qquad (k=1,\ 2), \tag{8}$$

где $x_1 = x$, $x_2 = y$, а также неравенством Фридрихса в разностном виде:

$$h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h^+} \{ (\nabla_{\bar{x}} u_{hij})^2 + (\nabla_{\bar{y}} u_{hij})^2 \} \geqslant \frac{h^2}{a^2} \sum_{(i,j)\in\Omega_h} u_{hij}^2, \tag{9}$$

где a — длина стороны квадрата со сторонами, параллельными координатным осям, содержащего в себе область $\overline{\Omega}_h$, а u_h удовлетворяет условию (5). Вывод формулы (8) и неравенства (9), записываемых в несколько ином виде, имеется, например, в [8].

Теорема 1. *Если выполнены условия А и Б для уравнения* (1), *то при каждом $h>0$ найдется такое $\lambda_1>0$, что для любого $0<\lambda<\lambda_1$ и любого начального приближения $u_h^{(0)}$, удовлетворяющего граничному условию* (5), *итерационный процесс*

$$\Delta_h u_h^{(n+1)} = \Delta_h u_h^{(n)} - \lambda \Lambda_1 u_h^{(n)}, \quad u_{hij}^{(n+1)}|_{\Gamma_h} = 0 \tag{10}$$

сходится в метрике (7) *к единственному решению системы* ($4^а$), (5) *со скоростью геометрической прогрессии с некоторым знаменателем $0<q<1$.*

Здесь Δ_h — обыкновенный пятиточечный разностный оператор Лапласа, т. е.

$$\Delta_h u_{hij} = (\nabla_x \nabla_{\bar{x}} + \nabla_y \nabla_{\bar{y}}) u_{hij} = \frac{1}{h^2} (u_{hi+1,j} + u_{hi-1,j} + u_{hi,j+1} + u_{hi,j-1} - 4u_{hij}).$$

Доказательство. Запишем итерационный процесс (10) в операторном виде:

$$u_h^{(n+1)} = A u_h^{(n)} \equiv u_h^{(n)} - \lambda \Delta_h^{-1} \Lambda_1 u_h^{(n)}. \tag{$10^а$}$$

Докажем, что оператор A является оператором сжатия. Для этой цели рассмотрим скалярное произведение $[Au_h - Av_h, u_h - v_h]$, где u_h и v_h — любые векторы, удовлетворяющие условию (5).

Заметим сразу же, что для того, чтобы $[Au_h - Av_h, u_h - v_h]$ было определено, нужно, чтобы оператор A, а тем самым оператор Λ_1, был бы определен не только в области Ω_h, но и в $\overline{\Omega}_h$. Однако, как следует из дальнейшего, значение $[Au_h, v_h]$ не зависит от значений Au_h на контуре Γ_h, если только $u_{hij}|_{\Gamma_h} = v_{hij}|_{\Gamma_h} = 0$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что оператор Λ_1 (тем самым A) определен также и на границе Γ_h, где он принимает некоторые значения, величина которых нам не играет роли.

Здесь нам будет удобно функции a_{ij}, b_{ij} и c_{ij} обозначать одной буквой с индексом:

$$a_{ij} = a^1_{ij}, \quad b_{ij} = a^2_{ij}, \quad c_{ij} = a^0_{ij}.$$

Обозначим

$$z_h = u_h - v_h, \quad w_h = \Delta_h^{-1}(\Lambda_1 u_h - \Lambda_1 v_h).$$

Дважды используя формулу суммирования по частям (8) и принимая во внимание неравенство (3), а также замечая, что $z_{hij}|_{\Gamma_h} = 0$, получаем:

$$[Au_h - Av_h, u_h - v_h] = [z_h, z_h] - \lambda(w_h, z_h],$$

$$[w_h, z_h] = h^2 \sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,j)\in\Omega_h^+} \nabla_{\bar{x}_k} w_{hij} \nabla_{\bar{x}_k} z_{hij} = -h^2 \sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,j)\in\Omega_h^-} z_{hij} \nabla_{x_k} \nabla_{\bar{x}_k} w_{hij} =$$

$$= -h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h^-} z_{hij}(\Lambda_1 u_{hij} - \Lambda_1 v_{hij}) = -h^2 \sum_{k=0}^{2} \sum_{(i,j)\in\Omega_h^-} z_{hij} \nabla_{x_k} \{a^k(u_{hij}) - a^k(v_{hij})\} =$$

$$= h^2 \sum_{k=0}^{2} \sum_{(i,j)\in\Omega_h^+} (\nabla_{\bar{x}_k} z_{hij}) \{a^k(u_{hij}) - a^k(v_{hij})\} = h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h^+} \sum_{k,l=0}^{2} \frac{\partial \tilde{a}^k}{\partial p_l} \nabla_{\bar{x}_k} z_{hij} \nabla_{\bar{x}_l} z_{hij} \geqslant$$

$$\geqslant \alpha h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h^+} \sum_{k=0}^{2} (\nabla_{\bar{x}_k} z_{hij})^2 \geqslant \alpha h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h^+} \sum_{k=1}^{2} (\nabla_{\bar{x}_k} z_{hij})^2 = \alpha [z_h, z_h], \tag{11}$$

где использованы следующие сокращения:

$$\frac{\partial}{\partial p_0} = \frac{\partial}{\partial u}, \quad \nabla_{\bar{x}_0} z_{hij} = z_{hij}, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y,$$

$$a^k(u_{hij}) = a^k(x_i, y_j, u_{hij}, \nabla_{\bar{x}} u_{hij}, \nabla_{\bar{y}} u_{hij}),$$

$$\tilde{a}^k = a^k \Big(x_i, y_j, v_{hij} + \Theta(u_{hij} - v_{hij}), \nabla_{\bar{x}} v_{hij} + \Theta(\nabla_{\bar{x}} u_{hij} - \nabla_{\bar{x}} v_{hij}),$$

$$\nabla_{\bar{y}} v_{hij} + \Theta(\nabla_{\bar{y}} u_{hij} - \nabla_{\bar{y}} v_{hij})\Big), \qquad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1.$$

Аналогично, используя неравенство Фридрихса (9) и левую часть неравенств (3), из (11) получаем:

$$[w_h, z_h] \leqslant \beta h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h^+} \sum_{k=0}^{2} (\nabla_{\bar{x}_k} z_{hij})^2 \leqslant \beta(1 + a^2)[z_h, z_h]. \tag{12}$$

Таким образом, если $\lambda > 0$, мы получаем:

$$\{1 - \lambda\beta(1 + a^2)\}[z_h, z_h] \leqslant [Au_h - Av_h, u_h - v_h] \leqslant (1 - \lambda\alpha)[z_h, z_h].$$

Если теперь положить $\lambda_1 = \dfrac{2}{\beta(1 + a^2)}$, то для всех $0 < \lambda < \lambda_1$

$$|[Au_h - Av_h, u_h - v_h]| \leqslant q[z_h, z_h] = q \| u_h - v_h \|_2^2,$$

где

$$q = \max\{|1-\lambda\beta(1+a^2)|,\ |1-\lambda\alpha|\} < 1, \tag{13}$$

откуда следует, что

$$\| Au_h - Av_h \|_2 \leqslant q \| u_h - v_h \|_2,$$

т. е., что оператор A является оператором сжатия. Согласно принципу неподвижной точки [9], это означает, что итерационный процесс ($10^а$), также как и (10), сходится в метрике (7) к единственному решению системы ($4^а$), (5), причем быстрота сходимости дается неравенством:

$$\| u_h - u_h^{(n)} \|_2 \leqslant \frac{q^n}{1-q} \| u_h^{(1)} - u_h^{(0)} \|_2, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{14}$$

где q определен в (13).

Теорема доказана.

Следствие 1. *Итерационный процесс* (10) *сходится также и в метрике* (6) (*сходимость в среднем*), *причем быстрота сходимости дается неравенством*:

$$\| u_h - u_h^{(n)} \|_1 \leqslant \frac{q^n}{1-q} \cdot \eta, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{15}$$

где

$$\eta = a^2 \| u_h^{(1)} - u_h^{(0)} \|_2.$$

Действительно, применяя неравенство Фридрихса (9) к левой части неравенства (14), получаем (15), откуда и следует сходимость в метрике (6).

Следствие 2. *Теорема* 1 *имеет силу для разностной схемы* ($4^в$), (5).

Действительно, для u_h и v_h, удовлетворяющих условию (5), имеет место

$$[u_h,\ v_h] = h^2 \sum_{(i,\ j)\in\Omega_h^-} (\nabla_x u_{hij} \nabla_x v_{hij} + \nabla_y u_{hij} \nabla_y v_{hij}).$$

Проделав все выкладки доказательства теоремы 1 с так определенным скалярным произведением, получаем нужное утверждение.

Сделаем одно замечание по-поводу оптимального выбора параметра λ.

Пусть $U(\bar{u}_h)$ — производная Гато оператора $\Delta_h^{-1}\Lambda_1$ в точке $\bar{u}_h$ ($\bar{u}_h$ — вектор с компонентами $\bar{u}_{hij}$, $(i,\ j)\in\overline{\Omega}_h$). Согласно определению производной Гато [9] для системы нелинейных уравнений, из неравенств (11) и (12) следует:

$$\varkappa[z_h,\ z_h] \leqslant [U(\bar{u}_h)z_h,\ z_h] \leqslant \beta(1+a^2)[z_h,\ z_h],$$

где

$$\bar{u}_{hij} = v_{hij} + \Theta(u_{hij} - v_{hij}), \qquad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1.$$

Таким образом на каждом шаге итерационного процесса для границ m_n и M_n (наименьшего и наибольшего по модулю собственных чисел) оператора $U(\bar{u}_h)$ имеем оценки:

$$m_n \geqslant \alpha > 0, \quad \beta(1+a^2) \geqslant M_n. \tag{16}$$

Тогда, как нетрудно видеть, наименьшее значение q достигается при

$$\lambda_{\text{опт}}^{(n)} = \frac{2}{M_n + m_n}$$

и равно

$$\min_{\lambda} q(\lambda) = q(\lambda_{\text{опт}}^{(n)}) = \frac{M_n - m_n}{M_n + m_n}.$$

Если α и $\beta(1+a^2)$ близки к границам оператора m_n и M_n для каждого $n=0, 1, 2, \ldots$, то значение

$$\bar{\lambda}=\frac{2}{\alpha+\beta(1+a^2)}$$

является близким к $\lambda_{\text{опт}}^{(n)}$. Однако если о границах m_n и M_n не имеется никакой информации, кроме (16), вопрос о выборе оптимального λ остается открытым.

Отметим, что итерационный процесс типа (10) был рассмотрен в [10] для системы конечно-разностных уравнений, аппроксимирующей уравнение:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

где A, B и C есть функции $\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$, однако метод доказательства, основанный на оценках функции Грина, позволяет доказать сходимость рассматриваемого итерационного процесса лишь при предположениях о малости области Ω и близости нелинейного дифференциального уравнения к линейному.

3. Перейдем к исследованию сходимости решения системы ($4^а$), (5) к решению ($1^а$), (2) при $h \to 0$. Сначала напомним некоторые результаты, касающиеся этого вопроса.

Определение [11]. Линейный разностный оператор $l_h(u)$, аппроксимирующий линейный дифференциальный оператор эллиптического типа

$$l(u)=A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+$$
$$+\beta(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{17}$$

где $AC-B^2 \geqslant \text{const}>0$, называется оператором с неотрицательными коэффициентами, если элементы матрицы $\{\gamma_{kl}\}_{k,l=1}^{N}$ — матрицы системы разностных уравнений — удовлетворяют условиям:

$$\gamma_{kl} \leqslant 0,\ k \neq l;\ \sum_{l=1}^{N}\gamma_{kl} \geqslant 0;\ \sum_{\substack{l=1\\ k\neq l}}^{N}\gamma_{kl}<0. \tag{18}$$

Далее, в случае нелинейного уравнения $L(u)=0$, в работах [3], [4] показано, что если линейный разностный оператор $l_h(u_h-v_h)\equiv L_h(u_h)-L_h(v_h)$ является оператором с неотрицательными коэффициентами для линейного дифференциального оператора $l(u-v)\equiv L(u)-L(v)$, то для $l_h(u_h-v_h)$ имеет место принцип максимума. Это позволяет доказать единственность решения системы разностных уравнений $L_h(u_h)=0$ и сходимость его к решению дифференциального уравнения. На основании работ [4], [11] получается, что такой разностный оператор можно построить для любого равномерно эллиптического оператора, если только для замены дифференциального оператора разностным в любой точке используется достаточно большая окрестность этой точки. Оказывается, что основные трудности для практического получения аппроксимации доставляет наличие в дифференциальном операторе смешанной производной. Если ограничиться девятиточечной окрестностью точки (x_i, y_j), рассмотренной в начале нашей работы, то, как показано в

[12], для того чтобы в этой точке существовал разностный оператор с неотрицательными коэффициентами, аппроксимирующий оператор (17), необходимо и достаточно, чтобы было выполнено следующее условие:

$$|B(x_i,\ y_j)| \leqslant \min\{|A(x_i,\ y_j)|,\ |C(x_i,\ y_j)|\}, \tag{19}$$

причем структура этого оператора в каждой точке $(x_i,\ y_j)$ зависит от знака $B(x_i,\ y_j)$.

В случае нелинейного уравнения (1^a) имеем:

$$l(z) = \frac{\partial\tilde{a}}{\partial p}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial\tilde{a}}{\partial q} + \frac{\partial\tilde{b}}{\partial p}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial\tilde{b}}{\partial q}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \Phi\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

где $z = u - v$, а знак тильда ($\sim$) означает, что значения функций a и b берутся в некоторых промежуточных точках согласно теореме о средних значениях. Таким образом, условие (19) переходит в

$$\frac{1}{2}\left|\frac{\partial a}{\partial q} + \frac{\partial b}{\partial p}\right| \leqslant \min\left\{\left|\frac{\partial a}{\partial p}\right|,\ \left|\frac{\partial b}{\partial q}\right|\right\},$$

которое должно выполняться в каждой точке Ω_h, что является более жестким условием, чем условие равномерной эллиптичности:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial q} + \frac{\partial b}{\partial p}\right)^2 \leqslant 4\,\frac{\partial a}{\partial p}\,\frac{\partial b}{\partial q}.$$

Более того, даже при выполнении этого условия для практического построения такого разностного оператора нужно знать в каждой точке знак выражения

$$B = \frac{\partial a}{\partial q} + \frac{\partial b}{\partial p},$$

которое зависит от самого решения и его производных. Так, например, в случае часто встречающегося в различных приложениях нелинейного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(T^2)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(T^2)\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \omega = 0, \tag{20}$$

где ω — некоторый параметр, $T^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$, выражение для B получается следующее:

$$B = 2\,\frac{\partial\mu(T^2)}{\partial T^2}\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y},$$

о знаке которого, вообще говоря, ничего нельзя сказать, не имея подробной информации о поведении решения и его производных.

Таким образом, в случае девятиточечной аппроксимации практическое построение разностного оператора, исследование которого можно было бы провести методами работ [3], [4], основанными на принципе максимума, может быть осуществлено разве лишь в частных случаях уравнения (1). С другой стороны, вопрос о практическом построении более чем девятиточечных разностных операторов с неотрицательными коэффициентами, кроме доказательства существования последних в [11], насколько нам известно, нигде не рассматривался. Поэтому исследование разностных схем для нелинейных эллиптических уравнений и, в частности, исследование сходимости решения разностных уравнений к решению дифференциальных уравнений, не основанное на принципе максимума, имеет как теоретический, так и практический интерес.

В связи с этим полезно отметить, что в случае квазилинейных параболических уравнений этот вопрос успешно решен путем получения априорных оценок (оценок в среднем и равномерных оценок) методом энергетических неравенств для уравнений, которым удовлетворяет разность решений дифференциального уравнения и соответствующей разностной задачи. Этот вопрос подробно рассмотрен в работах А. А. Самарского, в частности, в работе [7], где имеется обширная библиография по этому вопросу.

Ниже доказываемая теорема 2 может быть также отнесена к исследованию разностных схем без применения принципа максимума.

Прежде всего отметим, что теорема 1 имеет силу также и для дифференциальных уравнений. Перефразируя эту теорему применительно к задаче ($1^а$), (2), запишем получающийся результат в виде следующей теоремы:

Теорема $1^а$. *Если выполнены условия А и Б, то найдется такое $\lambda_1>0$, что для любого λ из $0<\lambda<\lambda_1$ и $u^{(0)}$ итерационный процесс*

$$\Delta u^{(n+1)}=\Delta u^{(n)}-\lambda L u^{(n)},\quad u^{(n+1)}|_\Gamma=0, \tag{21}$$

где Δ — оператор Лапласа, сходится в метрике

$$\|u\|_3=\left\{\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy+\int_\Gamma u^2\,ds\right\}^{\frac{1}{2}}$$

к единственному решению задач ($1^а$), (2) со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q.

Значения λ_1 и q те же, что и в теореме 1.

Доказательство этого утверждения, сформулированного в виде, несколько отличным от теоремы $1^а$, принадлежит А. И. Кошелеву [5].

Замечание. В отличие от [5], где рассматривается обобщенное решение, здесь, как было отмечено в начале работы, предполагается существование достаточно гладкого решения.

Теорема 2. *Если выполнены условия А и Б, то решение системы ($4^а$), (5), также как и решение системы ($4^в$), (5) сходится в метрике (6) к решению дифференциального уравнения ($1^а$), (2) при $h\to 0$.*

Доказательство. Так как для всех $n=0, 1, 2, \ldots$

$$|\Delta u_{ij}^{(n)}-\Delta_h u_{ij}^{(n)}|\leqslant C_0 h^2,\quad (i,j)\in\Omega_h;$$
$$|Lu_{ij}^{(n)}-\Lambda_k u_{ij}^{(n)}|\leqslant C_k h,\quad (i,j)\in\Omega_h,\quad k=1,2;$$
$$|u_{ij}^{(n)}-u_{hij}^{(n)}|<C_3 h,\quad (i,j)\in\Gamma_h;\quad \|\Delta_h^{-1}\|\leqslant C_4,$$

где норма $\|\Delta_h^{-1}\|$ понимается как первая норма матрицы, то получаем, что

$$|u_{ij}^{(n)}-u_{hij}^{(n)}|\leqslant C_5 h\quad (i,j)\in\overline{\Omega}_h,$$

и, тем более, в метрике (6):

$$\|u^{(n)}-u_h^{(n)}\|_1\leqslant C_5 h. \tag{22}$$

Далее, из сходимости итерационных процессов (10) и (21) в соответствующих метриках следует, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $N_0=N_0(\varepsilon)$, что

$$\|u_h^{(n)}-u_h\|_2\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\quad \text{если}\quad n\geqslant N_0,$$

$$\|u^{(n)}-u\|_3\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\quad \text{если}\quad n\geqslant N_0.$$

Очевидно, оба последних неравенства могут быть интерпретированы в смысле метрики (6). Из этих неравенств и неравенства (22) заключаем, что

$$\| u_h - u \|_1 = \| u_h - u_h^{(n)} + u_h^{(n)} - u^{(n)} + u^{(n)} - u \|_1 \leqslant C_5 h + \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$. Это и означает сходимость $u_h \to u$ в метрике (6) при $h \to 0$.

4. Рассмотрим теперь задачу Дирихле для уравнения ($1^а$) с неоднородным краевым условием:

$$u|_\Gamma = \varphi(x, y) \tag{$2^а$}$$

и соответствующую ей систему разностных уравнений ($4^а$) с краевым условием:

$$u_{hij}|_{\Gamma_h} = \varphi_{ij}. \tag{$5^а$}$$

Предположим, что существует функция $\psi(x, y)$ с непрерывными частными производными до второго порядка включительно во всей области Ω, принимающая на границе Γ значения $\varphi(x, y)$. Тогда, вводя новую функцию

$$v = u - \psi,$$

задачу ($1^а$), ($2^а$) можно свести к задаче с однородным краевым условием:

$$\bar{L}v \equiv \frac{\partial}{\partial x}[a_1(x, y, v, p_1, q_1)] + \frac{\partial}{\partial y}[b_1(x, y, v, p_1, q_1)] -$$

$$- c_1(x, y, v, p_1, q_1) = 0, \tag{$1^в$}$$

$$v|_\Gamma = 0, \tag{$2^в$}$$

где

$$p_1 = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad q_1 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad a_1 = a\left(x, y, v + \psi, \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right),$$

b_1, c_1 — аналогично. Далее, если для уравнения ($1^а$) выполнены условия A и $Б$, то они выполнены и для уравнения ($1^в$). В самом деле, рассмотрим, например, производную $\partial a_1/\partial p_1$. Имеем:

$$\frac{\partial a_1}{\partial p_1} = \frac{\partial a_1}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial p_1} = \frac{\partial a}{\partial p}.$$

Отсюда следует, что для уравнения ($1^в$) имеет место неравенство (3) с теми же константами α и β. Сделав аналогичную замену в разностном операторе, приходим к выводу, что для системы разностных уравнений, аппроксимирующих задачу ($1^в$), ($2^в$), имеет место теорема 1 и все последующие утверждения.

Более того, нет необходимости находить функцию $\psi(x, y)$ и преобразовывать уравнение ($1^а$) к виду ($1^в$). Если построить итерационные процессы (10) и (21) для $\bar{L}v = 0$ и $\bar{\Lambda}_k v_h = 0$, а потом на каждом шаге итерационного процесса сделать обратную замену

$$u = v + \psi \text{ либо } u_h = v_h + \psi_h,$$

то приходим к итерационным процессам, построенным для $Lu = 0$ и $\Lambda_k u_h = 0$, но уже с неоднородным краевым условием. Таким образом, мы пришли к следующей теореме:

Теорема $1^в$. *Теорема 1 имеет силу и в случае неоднородного краевого условия ($5^а$) с теми самими значениями λ_1 и q, что и в случае краевого условия (5).*

5. В качестве примера рассмотрим задачу Дирихле для уравнения (20). Непосредственно проверяется, что условие равномерной эллиптичности (условие Б) для уравнения (20) записывается в виде:

$$\mu^2+2\mu\,\frac{\partial\mu}{\partial T^2}\,T^2\geqslant\alpha>0$$

или, что то же (в случае положительности μ)

$$\mu\geqslant\mu_0>0, \tag{23}$$

$$\frac{d}{dT}\Big(\mu(T^2)\,T\Big)=\mu(T^2)+2\,\frac{\partial\mu(T^2)}{\partial T^2}\,T^2\geqslant\sigma>0, \tag{24}$$

где понимается $T=|\sqrt{T^2}|$.

Если уравнение (20) есть уравнение для магнитного потенциала u в нелинейной среде (с учетом насыщения) [1], то (23) означает положительность магнитной проницаемости, а (24) – возрастание модуля магнитной индукции $B\,(B=\mu H)$ при возрастании модуля напряженности магнитного поля $H\,(H=T)$.

Рассмотрим сейчас физический смысл условия A. Имеем:

$$a=\mu(T^2)\,p,$$

$$b=\mu(T^2)\,q,\quad T^2=p^2+q^2.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\partial a}{\partial p}=\mu(T^2)+2\mu'(T^2)\,p^2,$$

$$\frac{\partial a}{\partial q}=\frac{\partial b}{\partial p}=2\mu'(T^2)\,pq,$$

$$\frac{\partial b}{\partial q}=\mu(T^2)+2\mu'(T^2)\,q^2.$$

Так как $\mu>0$, $\mu+2\mu' T^2>0$ и $2|pq|\leqslant T^2$, то очевидно, что

$$\left|\frac{\partial a}{\partial p}\right|,\ \left|\frac{\partial b}{\partial q}\right|\leqslant\mu(T^2)+2\mu'(T^2)\,T^2=\frac{d}{dT}\Big(\mu(T^2)\,T\Big),$$

$$\left|\frac{\partial a}{\partial q}\right|=\left|\frac{\partial b}{\partial p}\right|\leqslant 2\,|\mu'(T^2)\,T^2|.$$

Таким образом, ограниченность $\left|\frac{\partial a}{\partial p}\right|$ и $\left|\frac{\partial b}{\partial q}\right|$ означает ограниченность роста модуля индукции B в зависимости от роста модуля напряженности H. Заметим, в частности, что $\frac{dB}{dH}\to 0$ при $H\to\infty$. Для ограниченности $\left|\frac{\partial a}{\partial q}\right|$ и $\left|\frac{\partial b}{\partial p}\right|$ достаточно ограниченности $|\mu'(T^2)|$, т. е. роста магнитной проницаемости (по абсолютному значению) в зависимости от H при конечных H и выполнения условия

$$\lim_{T\to\infty}\mu'(T^2)\,T^2=\mathrm{const}<\infty. \tag{25}$$

Если, как показано в [1], для сильных полей (для больших T) принять, что приближенно

$$\mu=\frac{e^{\frac{T}{a+bT}}-1}{T},$$

где a и b — некоторые постоянные, подбираемые экспериментально, то условие (25), как нетрудно проверить, будет выполнено.

В заключение пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность В. Е. Шаманскому за руководство работой.

Поступило в редакцию
10.X.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Говорков. Электрические и магнитные поля. Госэнергоиздат, 1960.
2. А. С. Кронрод. О численном решении уравнения магнитного поля в железе с учетом насыщения. Докл. АН СССР, 1960, 132, № 1, 95–97.
3. L. Bers. On mildly nonlinear partial difference equations of elliptic type. J. Res. Nat. Bur. Standards, 1953, 51, N. 5, 229–236.
4. Р. М. Джабар-заде. Альтернирующий метод Шварца для решения задачи Дирихле для нелинейных уравнений. Сб. работ вычисл. центра Моск. ун-та, 1962, I, 120—140.
5. А. И. Кошелев. О сходимости метода последовательных приближений для квазилинейных эллиптических уравнений. Докл. АН СССР, 1962, 142, № 5, 1007—1009.
6. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. О регулярности обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений. Докл. АН СССР, 1961, 140, № 1, 45—47.
7. А. А. Самарский. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 3, 431–466.
8. П. С. Бондаренко. Дослідження обчислювальних алгорифмів наближеного інтегрування диференціальних рівнянь методом скінченних різниць. Видав. Київського ун-та, 1960.
9. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
10. W. Philipzik. Beiträge zum Differenzenverfahren bei nichtlinearen elliptischen Differentialgleichungen. Tech. Mitt. Krupp., 1961, 19, N. 4, 229–236.
11. T. S. Motzkin, W. Wasov. On the approximation of linear elliptic differential equations by difference equations with positive coefficients. J. Math. Phys., 1953, 31, N. 4, 253–259.
12. D. Greenspan. Partial difference approximation with non-negative coefficients. J. Franklin Inst., 1963, 275, N. 6, 481–490.

KVAZITIESINIŲ ELIPTINIO TIPO DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SPRENDIMAS BAIGTINIŲ SKIRTUMŲ METODU

M. P. SAPAGOVAS

(Reziumė)

Dirichlė uždavinys antros eilės kvazitiesinei eliptinio tipo diferencialinei lygčiai sprendžiamas baigtinių skirtumų metodu. Gaunamų netiesinių skirtuminių lygčių sistemos sprendinio konvergavimas į diferencialinės lygties sprendinį įrodomas nesiremiant maksimumo principu. Nurodomas iteracinis metodas skirtuminių lygčių sistemai spręsti.

A SOLUTION OF THE QUASILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS BY FINITE-DIFFERENCE METHOD

M. P. SAPAGOVAS

(Summary)

In this paper it is considered the solution of the Dirichlet's problem for second order quasilinear elliptic differential equations by finite-difference method. The proof of the convergence of the solution of difference equations to the solution of the differential equation is not based on the maximum principle. The system of the nonlinear difference equations is solved by iterative method.