V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1965

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАВЕНСТВА ДЛЯ ЧИСЛА КЛАССОВ ИДЕАЛОВ МНИМОГО КВАДРАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

О. САПАРНИЯЗОВ

Асимптотикой суммы

$$\sum_{\Delta \leqslant N} h^k(-\Delta), \tag{1}$$

где $h(-\Delta)$ — число классов идеалов мнимого квадратического поля дискриминанта $-\Delta$, $\Delta \geqslant 1$ — целое, занимались многие авторы.

Для $k=1$ самый глубокий результат принадлежит акад. И. М. Виноградову [1] и имеет вид:

$$\sum_{\Delta \leqslant N} h(-\Delta) = \frac{4\pi}{21\zeta(3)} N^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{\pi} N + O\left(N^{\frac{2}{3}+\varepsilon}\right).$$

Асимптотика суммы (1) для любого k получена М. Б. Барбаном [2]. Вот соответствующая формула:

$$\sum_{\Delta \leqslant N} h^k(-\Delta) = \frac{2^{k+2} r(k)}{\pi^k (k+2)} N^{\frac{k+2}{2}} + O\left\{N^{\frac{k+2}{2}} e^{-(\ln N)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\right\}.$$

Здесь ε — сколь угодно малое, но фиксированное число

$$r(k) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \frac{\varphi(n)\tau_k(n^2)}{n^3}, \tag{2}$$

где $\varphi(n)$ — функция Эйлера, $\tau_l(m)$ — число решений уравнения $m = m_1 \ldots m_l$ в целых числах $m_i \geqslant 1$ и $\tau_2(m) = \tau(m)$.

Асимптотику суммы (1), со степенным понижением порядка роста в остаточном члене, для $k=2$, 3 вывел А. Ф. Лаврик [3].

В заметке автора [4], при помощи оценки Д. А. Берджесса [5] для сумм характеров, базирующейся на доказанной А. Вейлем гипотезе Римана для ζ-функции полей алгебраических функций над конечным полем констант, была дана асимптотика суммы (1) для случаев $k=2$, 3, 4, 5, притом для $k=2$, 3 понижение порядка роста в остаточном члене более сильное чем у А. Ф. Лаврика [3].

В настоящей статье, благодаря использованию глубокой оценки Ю. В. Линника [6] для шестого момента L-рядов на половинной прямой, в случае $k=2$, 3, 4, 5 получаются еще более точные асимптотические формулы.

Начнем с вспомогательных лемм.

Лемма 1.

$$\sum_{\Delta\leqslant N} L^k(1,\ \Delta)=Nr(k)-\frac{1}{2\pi i}\sum_{\Delta\leqslant N}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma(s-1)L^k(s,\ \Delta)p^{s-1}\,ds+$$

$$+0\left(p^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)+0\left(Np^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Здесь $0<\gamma<1$, $p>0$ — любое число, $\Gamma(s)$ — гамма функция, s — комплексное число и

$$L(s,\ \Delta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{n^s},$$

где $\left(\frac{-\Delta}{n}\right)$ — символ Кронекера, если $(2\Delta,\ n)=1$, и нуль в противном случае.

Доказательство см. в работе [3].

Лемма 2.

$$\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\ \chi\right)\right|\ll D^{\frac{3}{16}+\varepsilon},$$

где D — модуль характера χ.

Эту лемму см. в работе [5].

Лемма 3. Для всех D, $D_1\leqslant D\leqslant D_1\left(1+\frac{1}{\log^{20} D_1}\right)$, за исключением не более чем $D_1^{1-6\alpha+\varepsilon}$, имеет место оценка

$$\max_{\chi\ (\mathrm{mod}\ D)}\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\ \chi\right)\right|\ll D^{\frac{1}{6}+\alpha}(|t|+1)^{C_0},$$

(C_0 — константа).

Эта лемма есть лёгкое следствие оценки Ю. В. Линника [6] для шестого момента L-рядов.

Лемма 4. Имеет место следующая оценка

$$\sum_{\Delta\leqslant N}|I(\Delta)|\ll p^{-\frac{1}{2}}N^{\frac{3k^2+32k+96}{16(k+6)}+\varepsilon},$$

где $k\leqslant 5$

$$I(\Delta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\Gamma(s-1)L^k(s,\ \Delta)p^{s-1}\,ds.$$

Доказательство. На основе свойства гамма-функции и леммы 3, нетрудно показать, что для всех $\Delta\leqslant N$, не являющихся „исключительными" в смысле леммы 3, имеет место оценка

$$\sum_{\Delta\leqslant N}|I(\Delta)|\ll p^{-\frac{1}{2}}N^{\frac{k+6}{6}+k\alpha} \tag{3}$$

Согласно лемме 2, для всех $\Delta \leqslant N$, являющихся ,,исключительными'' в смысле леммы 3, имеет место оценка

$$\sum_{\Delta \leqslant N} |I(\Delta)| \ll p^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{3k+16}{16}-6\alpha+k\varepsilon}. \tag{4}$$

При

$$\alpha = \frac{k}{48(k+6)} + \varepsilon$$

из оценки (3) и (4) вытекает наша лемма.

Теорема. При $k \leqslant 5$ имеет место оценка

$$\sum_{\Delta \leqslant N} h^k(-\Delta) = \frac{2^{k+1} r(k)}{\pi^k (k+2)} N^{\frac{k+2}{2}} + 0\left\{ N^{\frac{k+2}{2} - \frac{96-3k^2}{32(k+6)} + \varepsilon} \right\}. \tag{5}$$

Доказательство. Согласно лемме 1 и 4

$$\sum_{\Delta \leqslant N} L^k(1, \Delta) = r(k) N + 0\left\{ p^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{3k^2+32k+96}{16(k+6)}+\varepsilon} \right\} + 0\left(p^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) + 0\left(Np^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right). \tag{6}$$

Полагая

$$p = N^{\frac{3k^2+32k+96}{16(k+6)}}$$

из (6) будем иметь

$$\sum_{\Delta \leqslant N} L^k(1, \Delta) = r(k) N + 0\left\{ N^{\frac{3k^2+32k+96}{32(k+6)}+\varepsilon} \right\}. \tag{7}$$

Применяя формулу Гаусса

$$h(-\Delta) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\Delta}\, L(1, \Delta)$$

и суммирование по Абелю, из (7) получим формулу (5) ч. и. т. д.

Поступило в редакцию
10.IX.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Виноградов. Изв. АН СССР, сер. матем., т. 27, № 1 (1963).
2. М. Б. Барбан. Изв. АН СССР, сер. матем., 26, 4 (1962) 573–580.
3. А. Ф. Лаврик. Изв. АН УзССР, серия физ.-мат. наук, № 1 (1959), 81–90.
4. О. Сапарниязов. Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, № 4 (1964).
5. D. A. Burgess. Proc. Lond. Math. Soc., 1963, vol 13, N 51, 524–536.
6. Ю. В. Линник. Изв. АН СССР, сер. матем., 24 (1960), 629–706.

MENAMOJO KVADRATINIO SKAIČIŲ KŪNO IDEALŲ KLASIŲ SKAIČIAUS ASIMPTOTINĖS IŠRAIŠKOS

O. SAPARNIJAZOVAS

(Reziumė)

Minėtam klasių skaičiui įrodoma asimptotinė lygybė (5).

LIMITING EQUATIONS FOR THE CLASS NUMBER OF THE IDEALS OF AN IMAGINARY QUADRATIC FIELD

O. SAPARNIJAZOV

(Summary)

For the mentioned class number limiting equation (5) has been proved.