V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2

1965

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ ЧИСТО ВЕЩЕСТВЕННОГО ПОЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

И. УРБЯЛИС

Настоящая статья является продолжением работы автора [10] о применении оценок тригонометрических сумм И. М. Виноградова ([2], [3]) и Н. М. Коробова [7] к Z-функциям Гекке [12].

Пусть K – фиксированное вещественное алгебраическое поле степени n, $n \geqslant 2$, и пусть все с ним сопряженные поля, которые обозначим через $K^{(j)}$ $(j=1, 2, \ldots, n)$, будут тоже вещественные.

Поле K расширяем до системы вещественных идеальных чисел $\mathfrak{Z}$ (Гекке [12], [13]), которые будем просто называть числами и обозначать через α, β, ...

Система чисел $\mathfrak{Z}$ распадается на h классов, если считать, что к одному классу принадлежат все те числа, которые отличаются множителем, являющимся элементом поля K. Главный класс совпадает с полем K.

Совокупность чисел одного класса (включая и число 0) воспроизводится сложением и вычитанием. Поэтому есть смысл говорить о сравнимости чисел в пределах одного класса.

Пусть $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} \neq 0$, целый фиксированный идеал поля K. Все целые взаимно простые с $\mathfrak{m}$ числа системы $\mathfrak{Z}$ разложим по классам вычетов $\bmod\, \mathfrak{m}$ в узком смысле, считая, что два числа α и β принадлежат одному классу, если удовлетворяют условиям: $(\alpha, \mathfrak{m}) = (\beta, \mathfrak{m}) = 1$, $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{m}}$ и $\alpha\beta^{-1} \succ 0$ (α и β вполне положительно), $\beta \neq 0$. Эти классы вычетов образуют конечную абелеву группу $\mathfrak{Z}(\mathfrak{m})$ порядка $h(\mathfrak{m}) = h 2^n \varphi(\mathfrak{m})$, где $\varphi(\mathfrak{m})$ – функция Эйлера. Единичным элементом служит класс, имеющий 1.

Идеальные числа одного такого класса составляют n-мерную решетку. Таким образом, все числа системы $\mathfrak{Z}$ составляют $h(\mathfrak{m})$ решеток. Если приведенную систему вычетов $\bmod\, \mathfrak{m}$ в узком смысле обозначим через $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{h(\mathfrak{m})}$, а базисные элементы того класса вычетов, которые содержат число ν_j, обозначим через $\omega_{1j}, \ldots, \omega_{nj}$, то каждое такое число этого класса можно представить в виде

$$\alpha = l_1 \omega_{1j} + \ldots + l_n \omega_{nj} + \nu_j \tag{1}$$

с целыми рациональными $l_1, \ldots, l_n$.

Единицы η поля K, удовлетворяющие условиям $\eta \succ 0$, $\eta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$, называются единицами $\bmod\, \mathfrak{m}$. Каждую такую единицу выражаем при помощи $n-1$ основных единиц $\bmod\, \mathfrak{m}$ $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ следующим образом:

$$\eta = \eta_1^{g_1} \eta_2^{g_2} \ldots \eta_{n-1}^{g_{n-1}}, \tag{2}$$

где $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$ пробегают независимо друг от друга все целые рациональные числа.

Единицы $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$ образуют подгруппу группы единиц поля K с конечным индексом $e(\mathfrak{m})$. Два числа, отличающиеся лишь множителем, являющимся единицей $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$, будем называть ассоциированными $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$.

Для всякого числа α из системы $\mathfrak{Z}$ определяем характеры Гекке первого рода $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$ ([8], [12]);

$$\xi(\alpha) = \prod_{j=1}^{n-1} \exp\left(2\pi i m_j w_j(\alpha)\right), \tag{3}$$

где показатели характера Гекке первого рода $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$ $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ пробегают любые целые рациональные числа;

$$w_j(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} e_k^{(j)} \ln|\alpha^{(k)}|, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{4}$$

и $e_k^{(j)}$ определяются из уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} e_k^{(j)} = 0, \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} e_k^{(j)} \ln \eta_l^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad l = j, \\ 0, & \text{если} \quad l \neq j, \end{cases} \qquad (j, l = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{6}$$

Далее вводим характеры Гекке второго рода $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$ ([12], [8], [9]);

$$\Xi(\alpha) = \chi(\alpha)\,\xi(\alpha),$$

где $\chi(\alpha)$ — абелевый групповой характер $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$ группы $\mathfrak{Z}(\mathfrak{m})$ ([1], [11], [12], [13]). Характер $\Xi(\alpha)$ удовлетворяет следующим условиям:

1°. $\Xi(\alpha)\cdot\Xi(\beta) = \Xi(\alpha\beta)$ для любых чисел системы $\mathfrak{Z}$.

2°. $\Xi(\alpha\varepsilon) = \Xi(\alpha)$, где ε единица поля K.

3°. $|\Xi(\alpha)| = 0, 1$.

4°. Если $\Xi(\alpha)$ — характер Гекке второго рода $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$, то также им будет и комплексно сопряженное число $\overline{\Xi}(\alpha)$.

Если все показатели характера $\xi(\alpha)$ $m_1 = m_2 = \ldots = m_{n-1} = 0$ и $\chi(\alpha) = \chi_0(\alpha)$, где $\chi_0(\alpha)$ — главный групповой характер $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$, то характер Гекке второго рода $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$ будет главным и обозначается

$$\Xi_0(\alpha) = \chi_0(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad (\alpha, \mathfrak{m}) \neq 1, \\ 1, & \text{если} \quad (\alpha, \mathfrak{m}) = 1. \end{cases}$$

Характер $\Xi(\alpha)$ считается первообразным или производным характером $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$, в зависимости от того, будет ли соответственный групповой характер $\chi(\alpha)$ первообразным или производным $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$ ([1], [11]). Если $\Xi(\alpha)$ производный характер $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$, но первообразный $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}_1$, где $\mathfrak{m}_1|\mathfrak{m}$, тогда определяем первообразный характер $\Xi'(\alpha)$ $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}_1$ следующим образом:

$$\Xi'(\alpha) = \begin{cases} \Xi(\beta), & \text{если} \quad (\alpha, \mathfrak{m}_1) = (\beta, \mathfrak{m}_1) = 1, \\ & \qquad \alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{m}_1}, \quad \alpha\beta^{-1} \succ 0, \\ 0, & \text{если} \quad (\alpha, \mathfrak{m}_1) \neq 1. \end{cases}$$

Пусть $s=\sigma+ti$ — комплексное переменное, $N(\alpha)$ — норма идеального числа α. При помощи характера $\Xi(\alpha)$ образуем Z-функцию Гекке

$$Z(s, \Xi)=\sum_{\alpha}{}^{*} \Xi(\alpha) \mid N(\alpha) \mid^{-s} \tag{7}$$

в области сходимости этого ряда. Здесь и в дальнейшем знаком * будем указывать, что при суммировании из каждой системы ассоциированных чисел в обычном смысле берется только по одному представителю.

Z-функция Гекке является целой для всякого неглавного характера $\Xi(\alpha)$. Если $\Xi(\alpha)=\Xi_0(\alpha)$, то $Z(s, \Xi_0)$ является всюду регулярной, кроме точки $s=1$, где она имеет простой полюс.

Если $\Xi(\alpha)$ является производным характером $\mathrm{mod}\, \mathfrak{m}$, тогда, как сказано выше, строим первообразный характер $\Xi'(\alpha) \bmod \mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_1|\mathfrak{m}$. При этом

$$Z(s, \Xi)=\varphi(s, \Xi')\, Z(s, \Xi'), \tag{8}$$

где

$$\varphi(s, \Xi')=\prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}}\left(1-\Xi'(\pi) \mid N(\pi) \mid\right)^{-s}, \tag{9}$$

$\mathfrak{p}$ — простое число системы $\mathfrak{Z}$, а произведение распространено на все простые делители идеала $\mathfrak{m}$.

Гекке [12] получил для функции $Z(s, \Xi)$ функциональное уравнение

$$Z(s, \Xi)=\varkappa(\Xi)\, \psi(s, \Xi)\, Z(1-s, \bar{\Xi}), \tag{10}$$

где

$$|\varkappa(\Xi)|=1,$$

$$\psi(s, \Xi)=A^{1-2s} \frac{\prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s+b_j+a_j i)\right)}{\prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(\frac{1}{2}(s+b_j-a_j i)\right)}, \tag{11}$$

$$A=\left|\sqrt{\frac{dN(\mathfrak{m})}{\pi^n}}\right|,$$

d — дискриминант поля K, b_j — некоторые числа, равные 0 или 1 [12],

$$a_j=2\pi \sum_{k=1}^{n-1} e_j^{(k)} m_k.$$

В силу формулы (5), все функции $w_j(\alpha)$, определенные формулой (4), имеют одинаковые значения на всяком открытом луче, исходящем из начала координат, за исключением лучей, лежащих в $(n-1)$-мерных гиперплоскостях $\alpha^{(k)}=0$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, на которых они не определены. Из соотношений (2) и (6) мы имеем

$$w_j(\eta\alpha)=w_j(\alpha)+g_j, \qquad (j=1, 2, \ldots, n-1).$$

Пусть, далее, $w_j^{(0)}$ — любые вещественные фиксированные числа, тогда области

$$w_j^{(0)}+g_j \leqslant w_j(\alpha)<w_j^{(0)}+g_j+1, \qquad (j=1, 2, \ldots, n-1), \tag{12}$$

где g_j пробегают независимо друг от друга все целые рациональные числа, заполняют n-мерное пространство (охватывают всю систему чисел $\mathfrak{Z}$).

Область (12) при фиксированных $g_j (j=1, 2, \ldots, n-1)$, будем считать фундаментальной областью. Она составлена из 2^n конусообразных кусков с общей вершиной в начале координат, которая к этой области не относится. Все точки, лежащие в одном из этих кусков, имеют одинаковые знаки у своих координат.

Для простоты в дальнейшем свои рассуждения мы будем проводить в фундаментальной области вида

$$0 \leqslant w_j(\alpha) < 1, \qquad (j=1, 2, \ldots, n-1). \tag{13}$$

Нетрудно убедиться, что в этой области

$$|\alpha^{(k)}| \asymp \sqrt[n]{|N(\alpha)|}, \qquad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

В дальнейшем будем употреблять еще следующие обозначения. Из формул (1), (3) и (4) получаем:

$$N_j(\alpha) = \prod_{r=1}^{n} \alpha^{(r)} = \prod_{r=1}^{n} \Bigl(\sum_{k=1}^{n} \omega_{kj}^{(r)} l_k + \nu_j^{(r)} \Bigr) = N_j(l_1, \ldots, l_n),$$

$$\xi_j(\alpha) = \prod_{f=1}^{n-1} \exp\bigl(2\pi i m_f w_f(\alpha)\bigr) = \exp\Bigl(i \sum_{r=1}^{n} a_r \ln \Bigl| \sum_{k=1}^{n} \omega_{kj}^{(r)} l_k + \nu_j^{(r)} \Bigr| \Bigr) =$$

$$= \xi_j(l_1, \ldots, l_n), \qquad \bigl(j=1, 2, \ldots, h(\mathfrak{m})\bigr).$$

Далее

$$F_j(l_1, \ldots, l_n) = -\sum_{r=1}^{n} (t-a_r) \ln \Bigl| \sum_{k=1}^{n} \omega_{kj}^{(r)} l_k + \nu_j^{(r)} \Bigr|, \quad \bigl(j=1, 2, \ldots, h(\mathfrak{m})\bigr); \tag{15}$$

$$V = \max |t-a_r|, \qquad (r=1, 2, \ldots, n),$$

$$T = |t| + c_0, \qquad M = \prod_{k=1}^{n-1} (|m_k| + c_0),$$

и

$$E(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{если характер } \xi - \text{главный}, \\ 0 & \text{в других случаях} \end{cases}$$

$$E(\Xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Xi = \Xi_0, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

В наших рассуждениях буквы $c_0, c_1, \ldots, c_{33}$ будут означать абсолютные постоянные или положительные постоянные, зависящие от системы $\mathfrak{Z}$, идеала $\mathfrak{m}$, единицы $\bmod \mathfrak{m}$ и от базисных элементов $\omega_{1j}, \omega_{2j}, \ldots, \omega_{nj}, \nu_j \bigl(j=1, 2, \ldots, h(\mathfrak{m})\bigr)$. То же относится к символам O, $\leqslant$ и $\asymp$.

Лемма 1. *В области* $-\frac{1}{2} - \ln^{-1} MT \leqslant \sigma \leqslant 0$ *имеет место оценка*

$$\psi(s, \Xi) \leqslant (MT)^{n\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}.$$

Доказательство. Из формулы Стирлинга [6] следует, что при $-\frac{1}{2}-\ln^{-1} MT \leqslant \sigma \leqslant 0$, $|t-a_k|>c_1$ $(k=1, 2, \ldots, n)$,

$$\ln \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1+b_k-s+ia_k)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(b_k+s-ia_k)\right)} = \left(\frac{1}{2}-\sigma\right) \ln \frac{|t-a_k|}{2} - (t-a_k)\, i \ln \frac{|t-a_k|}{2e} +$$

$$+ i\left(\frac{1}{2}-b_k\right) \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(t-a_k) + O(|t-a_k|^{-1})$$

для всех k $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Отсюда из формулы (11) и поведения Γ-функции следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть* $-\frac{1}{2} \leqslant \sigma_1 \leqslant 0$, $1 \leqslant \sigma_2 \leqslant 2$. *В области*

$$\sigma_1 - \ln^{-1} MT \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2 + \ln^{-1} MT, \quad |t| \geqslant E(\Xi)$$

имеет место оценка

$$Z(s, \Xi) \ll (MT)^{\frac{n\left(\frac{1}{2}-\sigma_1\right)}{\sigma_2-\sigma_1}(\sigma_2-\sigma)} \ln MT.$$

Доказательство: совпадает с [9], лемма 4.

Из леммы 2, как частные случаи, получаются следующие выводы:

Лемма 3. *В области* $-\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 2$, $|t| \geqslant E(\Xi)$ *имеет место оценка*

$$Z(s, \Xi) \ll (MT)^n \ln MT.$$

Лемма 4. *В области* $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| \geqslant E(\Xi)$ *имеет место оценка*

$$Z(s, \Xi) \ll (MT)^{\frac{n}{2}} \ln MT.$$

Лемма 5.

$$Z(0, \Xi) \ll M^{\frac{n}{2}} \ln M.$$

Лемма 6. *Пусть* $y \geqslant 1$. *Для всех вещественных* u *и* v

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}+iu}^{-\frac{1}{2}+iv} \frac{y^s \psi(s, \Xi)}{s(s+1)\ldots(s+n+1)}\, ds \ll M^n y^{-\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. При помощи леммы 1 получаем:

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}+iu}^{-\frac{1}{2}+iv} \frac{y^s \psi(s, \Xi)}{s(s+1)\ldots(s+n+1)}\, ds \ll$$

$$\ll M^n y^{-\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^{|v|} \frac{T^n}{\left(\frac{1}{2}+|t|\right)^{n+2}}\, dt + \int\limits_0^{|u|} \frac{T^n}{\left(\frac{1}{2}+|t|\right)^{n+2}}\, dt \right) \ll M^n y^{-\frac{1}{2}}.$$

Лемма 7. *Пусть* $x \geqslant 1$. *Тогда*

$$\sum_{|N(\alpha)|<x}^{*} \Xi(\alpha) - E(\Xi)\, c_2 x \ll M^{\frac{n}{2}} \ln M + M^{\frac{n}{n+2}} x^{1-\frac{3}{2(n+2)}}.$$

Доказательство. Лемма тривиальна при $x \ll M^{\frac{2n}{3}}$, поэтому будем считать $x > c_3 M^{\frac{2n}{3}}$, где c_3 достаточно велико.

Из теоремы о вычетах и леммы 3 имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{x^{s+n+1}Z(s,\,\Xi)}{s(s+1)\dots(s+n+1)}\,ds=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}Z(0,\,\Xi)+c_2E(\Xi)\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty}\frac{x^{s+n+1}Z(s,\,\Xi)}{s(s+1)\dots(s+n+1)}\,ds. \tag{16}$$

Обозначаем

$$S(x,\,\Xi)=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{|N(\alpha)|\leqslant x}{}^{*}\,\Xi(\alpha)\Big(x-|N(\alpha)|\Big)^{n+1}.$$

Из соотношения ([14], теорема 209)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{y^{s+n+1}\,ds}{s(s+1)\dots(s+n+1)}=\begin{cases}\frac{1}{(n+1)!}(y-1)^{n+1}, & \text{для}\quad y\geqslant 1,\\ 0, & \text{для}\quad 0<y\leqslant 1\end{cases}$$

и того, что ряд (7) сходится равномерно при $\sigma=2$, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{x^{s+n+1}Z(s,\,\Xi)}{s(s+1)\dots(s+n+1)}\,ds=$$
$$=\sum_{\alpha}{}^{*}\,\Xi(\alpha)\,|N(\alpha)|^{n+1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{\left(\frac{x}{|N(\alpha)|}\right)^{s+n+1}}{s(s+1)\dots(s+n+1)}\,ds=$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{|N(\alpha)|\leqslant x}{}^{*}\,\Xi(\alpha)\Big(x-|N(\alpha)|\Big)^{n+1}=S(x,\,\Xi).$$

Из соотношений (8), (9) и функционального уравнения (10) имеем:

$$Z(s,\,\Xi)=\varkappa(\Xi')\,\psi(s,\,\Xi')\,Z(1-s,\,\bar{\Xi}')\sum_{\beta\in B}f(\beta)\,|N(\beta)|^{-s},$$

где B – конечное множество целых идеальных чисел, зависящее только от группового характера χ и выражено соотношением

$$\varphi(s,\,\Xi')=\sum_{\beta\in B}f(\beta)\,|N(\beta)|^{-s}$$

и

$$f(\beta)\ll 1.$$

Отсюда будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty}\frac{x^{s+n+1}Z(s,\,\Xi)}{s(s+1)\dots(s+n+1)}\,ds=\varkappa(\Xi')\sum_{\alpha}{}^{*}\sum_{\beta\in B}\bar{\Xi}'(\alpha)f(\beta)\,|N(\alpha)|^{-n-2}\,|N(\beta)|^{n+1}\times$$
$$\times\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty}\frac{\left(\left|N\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right|x\right)^{s+n+1}\psi(s,\,\Xi')}{s(s+1)\dots(s+n+1)}\,ds.$$

Полученные результаты подставляем в формулу (16):

$$S(x,\ \Xi)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}Z(0,\ \Xi)+c_2E(\Xi)\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+$$

$$+\varkappa(\Xi')\sum_{\alpha}{}^{*}\sum_{\beta\in B}\bar{\Xi}'(\alpha)f(\beta)\,|N(\alpha)|^{-n-2}|N(\beta)|^{n+1}\ W\left(\left|N\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right|x\right), \quad (17)$$

где

$$W(y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty}\frac{y^{s+n+1}\psi(s,\ \Xi')}{s(s+1)\dots(s+n+1)}\,ds$$

и

$$y=\left|N\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right|x.$$

Обозначаем

$$z=M^{\frac{n}{n+2}}x^{\frac{2n+1}{2n+4}}$$

и для обеих сторон соотношения (17) применяем оператор

$$\Delta_zF(x)=\sum_{l=0}^{n+1}(-1)^lC_{n+1}^{l}F(x+lz)=\int\limits_{x}^{x+z}dy_1\int\limits_{y_1}^{y_1+z}dy_2\dots\int\limits_{y_n}^{y_n+z}F^{(n+1)}(y_{n+1})\,dy_{n+1}.$$

Тогда

$$\Delta_z\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}Z(0,\ \Xi)=z^{n+1}Z(0,\ \Xi)$$

и при помощи леммы 5 имеем

$$\ll z^{n+1}M^{\frac{n}{2}}\ln M.$$

Далее

$$\Delta_zc_2E(\Xi)\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}=E(\Xi)\left(c_2xz^{n+1}+O\left(z^{n+2}\right)\right).$$

Переходим к оценке $\Delta_zW(y)$. Из леммы 6 имеем

$$W(y)\ll M^ny^{n+\frac{1}{2}}$$

и

$$\Delta_zW\left(\left|N\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right|x\right)\ll M^n\left|N\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right|^{n+\frac{1}{2}}x^{n+\frac{1}{2}}.$$

Из полученной оценки имеем

$$\varkappa(\Xi')\sum_{\alpha}{}^{*}\sum_{\beta\in B}\bar{\Xi}'(\alpha)f(\beta)\,|N(\alpha)|^{-n-2}|N(\beta)|^{n+1}\times$$

$$\times\Delta_zW\left(\left|N\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right|x\right)\ll\sum_{0<|N(\alpha)|}{}^{*}M^n|N(\alpha)|^{-\frac{3}{2}}x^{n+\frac{1}{2}}.$$

При помощи частичного суммирования ([1] теорема 15 или [11] теорема A) и тривиальной оценки

$$\sum_{|N(\alpha)|\leqslant x}{}^{*}1\ll x$$

получаем, что эта сумма

$$\ll M^nx^{n+\frac{1}{2}}.$$

Применяя введенный нами оператор к обеим сторонам соотношения (17), и учитывая полученные оценки, имеем

$$\Delta_z S(x, \Xi) = c_2 E(\Xi)\, xz^{n+1} + O\left(M^{\frac{n}{2}} z^{n+1} \ln M\right) + O\left(M^{\frac{n}{n+2}} x^{\frac{2n+1}{2n+4}} z^{n+1}\right).$$

Обозначаем

$$H(x, \Xi) = \sum_{|N(\alpha)| \leqslant x}{}^{*} \Xi(\alpha).$$

Тогда

$$\Delta_z S(x, \Xi) = \int\limits_{x}^{x+z} dy_1 \int\limits_{y_1}^{y_1+z} dy_2 \ldots \int\limits_{y_n}^{y_n+z} H(y_{n+1}, \Xi)\, dy_{n+1} =$$

$$= c_2 E(\Xi)\, xz^{n+1} + O\left(\left(M^{\frac{n}{2}} \ln M + M^{\frac{n}{n+2}} x^{\frac{2n+1}{2n+4}}\right) z^{n+1}\right). \qquad (18)$$

Исследуем случай, когда характер $\Xi = \Xi_0$. Тогда из формулы (18) будем иметь:

$$z^{n+1} H(x, \Xi_0) \leqslant \Delta_z S(x, \Xi_0) \leqslant z^{n+1} H\left(x + (n+1)\, z, \Xi_0\right).$$

Таким образом,

$$H(x, \Xi_0) \leqslant c_2 x + O\left(x^{\frac{2n+1}{2n+4}}\right)$$

и

$$H(x+nz, \Xi_0) \geqslant c_2 x + O\left(x^{\frac{2n+1}{2n+4}}\right) = c_2\left(x + (n+1)\, z\right) + O\left(\left(x + (n+1)\, z\right)^{\frac{2n+1}{2n+4}}\right).$$

Отсюда следует

$$H(x, \Xi_0) = c_2 x + O\left(x^{\frac{2n+1}{2n+4}}\right). \qquad (19)$$

Пусть теперь $\Xi(\alpha)$ какой-нибудь характер $\bmod \mathfrak{m}$, тогда из формулы (19) имеем $\left(x < y_{n+1} \leqslant x + (n+1)\, z\right)$;

$$|H(y_{n+1}, \Xi) - H(x, \Xi)| \leqslant \sum_{x < |N(\alpha)| \leqslant x + (n+1) z}{}^{*} \Xi_0(\alpha) =$$

$$= H\left(x + (n+1)\, z, \Xi_0\right) - H(x, \Xi_0) = O(z) + O\left(x^{\frac{2n+1}{2n+4}}\right).$$

Таким образом,

$$H(y_{n+1}, \Xi) = H(x, \Xi) + O(z) + O\left(x^{\frac{2n+1}{2n+4}}\right).$$

Полученный результат подставляем в формулу (18). Тогда

$$H(x, \Xi) + O(z) + O\left(x^{\frac{2n+1}{2n+4}}\right) = c_2 E(\Xi)\, x +$$

$$+ O\left(M^{\frac{n}{2}} \ln M\right) + O\left(M^{\frac{n}{n+2}} x^{\frac{2n+1}{2n+4}}\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть* $X \geqslant 1$. *Тогда в области* $\sigma > 1 - \frac{3}{2(n+2)}$

$$Z(s, \Xi) = \sum_{|N(\alpha)| \leqslant x}^{*} \Xi(\alpha) |N(\alpha)|^{-s} + c_2 E(\Xi) \frac{X^{1-s}}{s-1} - H_1(X, \Xi) X^{-s} + $$
$$+ s \int_X^{\infty} H_1(u, \Xi) u^{-1-s} du,$$

где

$$H_1(u, \Xi) = \sum_{|N(\alpha)| \leqslant u}^{*} \Xi(\alpha) - c_2 E(\Xi) u.$$

Доказательство. Суммируя по Абелю, находим:

$$\sum_{|N(\alpha)| \leqslant X}^{*} \Xi(\alpha) |N(\alpha)|^{-s} = s \int_1^X \Bigl(\sum_{|N(\alpha)| \leqslant u}^{*} \Xi(\alpha) \Bigr) u^{-s-1} du +$$
$$+ \sum_{|N(\alpha)| \leqslant X}^{*} \Xi(\alpha) X^{-s} = s \int_1^X \Bigl(H_1(u, \Xi) + c_2 E(\Xi) u \Bigr) u^{-s-1} du +$$
$$+ \Bigl(H_1(X, \Xi) + c_2 E(\Xi) X \Bigr) X^{-s} =$$
$$= s \int_1^X H_1(u, \Xi) u^{-s-1} du + H_1(X, \Xi) X^{-s} + c_2 E(\Xi) \frac{X^{-s+1} - s}{1-s}.$$

Отсюда при $\sigma > 1$ $(s = \sigma + it)$, $X \to \infty$ и леммы 7 получаем

$$Z(s, \Xi) = s \int_1^{\infty} H_1(u, \Xi) u^{-s-1} du - c_2 E(\Xi) \frac{s}{1-s}.$$

Комбинируя последние два соотношения, получаем при $\sigma > 1$:

$$Z(s, \Xi) = s \int_1^X H_1(u, \Xi) u^{-s-1} du + s \int_X^{\infty} H_1(u, \Xi) u^{-s-1} du - c_2 E(\Xi) \frac{s}{1-s} =$$
$$= \sum_{|N(\alpha)| \leqslant X}^{*} \Xi(\alpha) |N(\alpha)|^{-s} + s \int_X^{\infty} H_1(u, \Xi) u^{-1-s} du - H_1(X, \Xi) X^{-s} - c_2 E(\Xi) \frac{X^{1-s}}{1-s}.$$

В правой стороне стоящий интеграл по лемме 7 сходится при $\sigma > 1 - \frac{3}{2(n+2)}$. Таким образом, лемма доказана.

Лемма 9. *В области* $\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{2(n+2)}$ *имеет место соотношение*

$$Z(s, \Xi) = \sum_{j=1}^{h(\mathfrak{m})} \chi(\nu_j) \sum_{|N_j(l_1, \ldots, l_n)| < c_4 V^{2n+4}}^{*} \xi_j(l_1, \ldots, l_n) |N_j(l_1, \ldots, l_n)|^{-s} + O(1).$$

Доказательство совпадает с [8], лемма 8.

Лемма 10. *Пусть* m *целое рациональное число,* $m \geqslant 1$; $X > c_5$, *где* c_5 *достаточно велико;* j — *одно из чисел* $1, 2, \ldots, h(\mathfrak{m})$; q — *одно из чисел* $1, 2, \ldots$; A_{qj}, B_{qj} — *некоторые постоянные, зависящие от базисных элементов*;

$$w_r(x) = \sum_{k=1}^{n} e_k^{(r)} \ln |x^{(k)}| \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{20}$$

где и в дальнейшем

$$N_j(x)=\prod_{f=1}^{n} x^{(f)}, \qquad x^{(f)}=\sum_{l=1}^{n} \omega_{lqj}^{(f)} x_{lq}+\nu_{qj}^{(f)}.$$

Тогда в области

$$|x^{(1)}|\asymp X, \quad 0\leqslant w_r(x)<1, \quad (r=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1), x\succ 0 \tag{21}$$

правильно, по крайней мере, одно из неравенств

$$\left|\frac{\partial^k F}{\partial x_1^k}\right|\geqslant c_6^k (k-1)!\ VX^{-k}, \qquad (k=m,\ m+1). \tag{22}$$

Кроме того, всегда существует такое c_7, *что*

$$\left|\frac{\partial^m F}{\partial x_1^m}\right|\leqslant c_7^m (m-1)!\ VX^{-m}. \tag{23}$$

Доказательство. В области (21) каждому $X>c_5$ имеем

$$A_{qj}X\leqslant x_{1q}\leqslant B_{qj}X, \quad 0\leqslant w_r(x)<1, \quad (r=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),\ x\succ 0$$

и тождество (15) можно записать в виде

$$F_j(x_1,\ \ldots,\ x_n)=F_{jq}(x_{1q},\ \ldots,\ x_{nq})=-\sum_{f=1}^{n}(t-a_f)\ln\Big(\sum_{l=1}^{n}\omega_{lqj}^{(f)}x_{lq}+\nu_{jq}^{(f)}\Big) \tag{24}$$

при условии, что

$$\operatorname{sgn}(t-a_j)=\operatorname{sgn}\omega_{1qj}^{(f)}, \qquad (f=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

или

$$\operatorname{sgn}(t-a_f)\neq\operatorname{sgn}\omega_{1qj}^{(f)}, \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Последнее получается при помощи принципа Делоне [4], [5] из строения основных векторов.

В дальнейшем индексы j и q мы будем пропускать.

Из формулы (24) получаем

$$\frac{\partial^m F}{\partial x_1^m}=(-1)^m(m-1)!\ W^m\sum_{f=1}^{n}(t-a_f)\Big(\operatorname{sgn}(t-a_f)\Big)^m e^{m\varphi_f}, \tag{25}$$

где

$$W=\sqrt[n]{\left|N\left(\frac{\omega_1}{x}\right)\right|}, \qquad \varphi_f=\frac{1}{n}\ln\frac{\left|N\left(\frac{x}{\omega_1}\right)\right|}{\left|\frac{x^{(f)}}{\omega_1^{(f)}}\right|^n}, \qquad (f=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Тогда в области (21) имеем соотношения, аналогичные соотношениям (14), откуда следует, что

$$W\asymp X^{-1}, \tag{26}$$

$$\varphi_f\asymp 1 \qquad (f=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{27}$$

Кроме того, выражение

$$\left|\sum_{f=1}^{n}(t-a_f)\Big(\operatorname{sgn}(t-a_f)\Big)^k e^{k\varphi_f}\right|,$$

по крайней мере, для одного из двух последовательных значений k $(k=m,\ m+1)$, всегда будет равняться

$$\sum_{f=1}^{n}|t-a_f|\,e^{k\varphi_f}$$

и $\geqslant c_8^k V$. Отсюда и из формул (25), (26) и (27) следует неравенство (22).

Для доказательства неравенства (23) пишем

$$\left|\sum_{f=1}^{n}(t-a_f)\left(\operatorname{sgn}(t-a_f)\right)^m e^{m\varphi_f}\right| \leqslant \sum_{f=1}^{n}|t-a_f|\,e^{m\varphi_f} \leqslant c_9^m V.$$

Отсюда, из формул (25), (26) и (27) следует неравенство (23).

Лемма 11. *Пусть m — натуральное число, $m>1$; $b_0, b_1, \ldots, b_{m+1}$ — вещественные числа, $b_{m+1}=\frac{b}{q}+\frac{\Theta}{q^2}$, где b и q целые рациональные числа, $q>0$, $(b, q)=1$, $|\Theta|<1$; $f(x)=\sum_{r=0}^{m+1} b_r x^r$; P — целое рациональное число, $P>1$,*

$$P^{\sqrt{m}\ln m} < q < P^{\sqrt{m}-\sqrt{m}\ln m}.$$

Тогда

$$\sum_{l=0}^{P-1}\exp\left(2\pi i f(l)\right) \ll P^{1-\frac{c_{10}}{m^2\ln m}}.$$

Эта оценка получена Н. М. Коробовым (см. [7], теорема 1).

Лемма 12. *Пусть m — натуральное число, $m>1$; $b_0, b_1, \ldots, b_m$ — вещественные числа, $b_m=\frac{b}{q}+\frac{\Theta}{q^2}$, где b и q — целые рациональные числа, $q>0$, $(b, q)=1$, $|\Theta|\leqslant 1$; $f(x)=\sum_{r=0}^{m} b_r x^r$; P и Q — целые рациональные числа, $P>0$,*

$$P^{\varepsilon_1} \leqslant q \leqslant P^{m-\varepsilon_2},$$

где ε_1, ε_2 — две абсолютные постоянные, удовлетворяющие условию $0<\varepsilon_j\leqslant 1$ $(j=1, 2)$. Тогда

$$\sum_{l=Q+1}^{Q+P}\exp\left(2\pi i f(l)\right) \ll \exp\left(c_{11} m \ln^2 m\right) P^{1-\frac{c_{12}}{m^2\ln m}}.$$

Эта оценка является частным случаем одного из результатов И. М. Виноградова [2].

Лемма 13. *Пусть $V>c_{13}$,*

$$\ln V_0 = \ln^{\frac{5}{7}} V\,(\ln\ln V)^{-\frac{2}{7}}, \quad \ln V_{00} = \ln^{\frac{3}{4}} V\,(\ln\ln V)^2,$$

$V_0 \leqslant X \leqslant V_{00}$; X', X'' — целые рациональные числа,

$$AX \leqslant X' \leqslant x_1 \leqslant X'' \leqslant BX, \qquad 0 \leqslant w_r(x) < 1$$

$(r=1, 2, \ldots, n-1)$, $x\succ 0$, где A и B — константы леммы 10, а функции $w_r(x)$ определены формулой (20).

Тогда

$$S=\sum_{X'\leqslant l_1\leqslant X''}\exp\left(iF(l_1, x_2, \ldots, x_n)\right) \ll X\exp\left(-c_{14}\ln^{-\frac{5}{7}}(\ln\ln V)^{-\frac{2}{7}}\ln X\right).$$

Доказательство совпадает с доказательством леммы 13 работы [10]. Заметим, однако, что в доказательстве этой леммы автором была допущена арифметическая ошибка в вычислениях, которая не влияет на справедливость дальнейших рассуждений, хотя окончательный результат надо исправить — заменить остаточный член в теореме таким, как в настоящей работе. Поэтому мы приведем здесь полное доказательство леммы.

Для $V \ll 1$ лемма очевидна, поэтому будем считать, что $V > c_{15}$, где c_{15} — достаточно велико.

Положим

$$m = \left[\frac{u \ln V}{\ln X}\right], \quad u = 1 + \frac{1}{10k^{\frac{1}{2}} \ln k};$$

$$P = \left[c_7^{-1} V^{-\frac{1}{k+2}} X^{1 - \frac{\rho}{k+2}}\right], \quad \rho = \frac{c_{10}}{k^2 \ln k},$$

где k — наименьшее из чисел m, $m+1$, удовлетворяющее условию (22). Имеем:

$$V^{\frac{u}{k+1}} < X \leqslant V^{\frac{u}{k-1}},$$

$$\ln^{\frac{1}{4}} V (\ln \ln V)^{-2} \ll k \ll \left(\ln V \ln \ln V\right)^{\frac{2}{7}}.$$

Далее, при $V > c_{15}$, $\rho < \frac{1}{u}$,

$$V^{-\frac{1}{k+2}} X^{1 - \frac{\rho}{k+2}} \gg \exp\left(\left(\frac{1 - \rho u}{(k+2)(k+1)} + \frac{1}{10k^{\frac{1}{2}} (k+1) \ln k}\right) \ln V\right) \gg$$

$$\gg \exp\left(c_{16} \ln^{\frac{4}{7}} V (\ln \ln V)^{-\frac{10}{7}}\right).$$

Следовательно, $P > 2$ при $V > c_{15}$.

Пусть

$$a = \left[\frac{X'' - X'}{P}\right].$$

Имеем

$$S = \sum_{j=0}^{a-1} S_j + O(P),$$

где

$$S_j = \sum_{X' + jP \leqslant l_1 < X' + (j+1)P} \exp\left(iF(l_1, x_2, \ldots, x_n)\right) = \sum_{0 \leqslant l_1 < P} \exp\left(2\pi i \sum_{\nu=0}^{k+1} b_\nu l_1^\nu + \right.$$

$$\left. + i \frac{l_1^{k+2}}{(k+2)!} \frac{\partial^{k+2}}{\partial x_1^{k+2}} F\left(X' + (j + \vartheta_l) P, x_2, \ldots, x_n\right)\right),$$

$$b_\nu = \frac{1}{2\pi\nu!} \frac{\partial^\nu}{\partial x_1^\nu} F(X' + jP, x_2, \ldots, x_n),$$

$$0 \leqslant \vartheta_{l_1} < 1.$$

В силу леммы 10

$$\frac{l_1}{(k+2)!} \frac{\partial^{k+2}}{\partial x_1^{k+2}} F\left(X' + (j + \vartheta_{l_1}) P, x_2, \ldots, x_n\right) \ll P^{k+2} c_7^{k+2} V X^{-k-2} \ll X^{-\rho}.$$

Тогда

$$S_j = \sum_{0 \leqslant l_1 < P} \exp\left(2\pi i \sum_{=0}^{k+1} b_\nu l_1^\nu\right) + O(PX^{-\rho}).$$

Заметим, что при $V > c_{15}$

$$\left| b_{k+1} \right| \leqslant \frac{c_7^{k+1}}{2\pi(k+1)} VX^{-k-1} \ll \exp\left((k+1)\ln c_7 + (1-u)\ln V\right) \ll$$

$$\ll \exp\left(c_{17}\left(\ln V \ln\ln V\right)^{\frac{2}{7}} - c_{18}\ln^{\frac{6}{7}} V (\ln\ln V)^{-\frac{8}{7}}\right),$$

т. е.

$$|b_{k+1}| < 1.$$

Введем обозначение:

$$q = \left[\frac{1}{|b_{k+1}|}\right].$$

Имеем

$$q > 1,$$

$$\left| b_{k+1} - \frac{\operatorname{sgn} b_{k+1}}{q} \right| = \frac{\frac{1}{|b_{k+1}|} - \left[\frac{1}{|b_{k+1}|}\right]}{\frac{1}{|b_{k+1}|}q} < \frac{1}{q^2}.$$

Далее, в силу леммы 10,

$$qP^{-\sqrt{k}\ln k} \gg c_7^{-k-1}(k+1)V^{-1}X^{k+1} c_7^{\sqrt{k}\ln k} V^{\frac{\sqrt{k}\ln k}{k+2}} X^{-\sqrt{k}\ln k + \frac{\rho\sqrt{k}\ln k}{k+2}} \gg$$

$$\gg \exp\Bigg(\ln(k+1) + (\sqrt{k}\ln k - k - 1)\ln c_7 +$$

$$+\left(-1 + \frac{\sqrt{k}\ln k}{k+2} + u - \frac{\sqrt{k}\ln k}{k+1}u + \frac{\sqrt{k}\ln k}{(k+1)(k+2)}u\rho\right)\ln V\Bigg) \gg$$

$$\gg \exp\Bigg(-c_{19}(\ln V \ln\ln V)^{\frac{2}{7}} + \Bigg(c_{20}\ln^{-\frac{1}{7}} V (\ln\ln V)^{-\frac{8}{7}} -$$

$$-\frac{\sqrt{k}\ln k}{(k+1)(k+2)}\left(1 - u\rho + \frac{k+2}{10\sqrt{k}\ln k}\right)\Bigg)\ln V\Bigg) \gg$$

$$\gg \exp\left(-c_{19}\left(\ln V \ln\ln V\right)^{\frac{2}{7}} + c_{20}\ln^{\frac{6}{7}} V (\ln\ln V)^{-\frac{8}{7}} - c_{21}\ln^{\frac{5}{7}} V (\ln\ln V)^{-\frac{4}{7}}\right) > 1$$

при $V > c_{15}$.

С другой стороны, тоже по лемме 10,

$$qP^{-k+\sqrt{k}\ln k} \ll c_6^{-k-1} V^{-1} X^{k+1}(k+1) c_7^{k-\sqrt{k}\ln k} \times$$

$$\times V^{\frac{k-\sqrt{k}\ln k}{k+2}} X^{-k+\sqrt{k}\ln k - \frac{(-k+\sqrt{k}\ln k)\rho}{k+2}} \ll$$

$$\ll \exp\Bigg(\ln(k+1) + (k - \sqrt{k})\ln c_7 - (k+1)\ln c_6 +$$

$$+\left(\frac{k-\sqrt{k}\ln k}{k+2} - 1 + \frac{1+\sqrt{k}\ln k}{k-1}u + \frac{(k-\sqrt{k}\ln k)\rho u}{(k+2)(k-1)}\right)\ln V\Bigg) \ll$$

$$\ll \exp\left(\ln(k+1) + (k-\sqrt{k})\ln c_7 - (k+1)\ln c_6 + \right.$$
$$+\left(-\frac{9}{10(k-1)} + \frac{1}{(k+2)(k-1)}\left(3\sqrt{k}\ln k + 6 + (k-\sqrt{k}\ln k)\rho u + \right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{k+2}{10\sqrt{k}\ln k}\right)\right)\ln V\right) \ll \exp\left(c_{22}\ln^{\frac{5}{8}} V(\ln\ln V)^4 - c_{23}\ln^{\frac{3}{4}} V(\ln\ln V)^2\right) < 1.$$

Таким образом, при $V > c_{15}$, имеем:

$$P^{\sqrt{k}\ln k} < q < P^{k-\sqrt{k}\ln k}.$$

Поэтому, к сумме S_j можно применить лемму 11:

$$S_j \ll P^{1-\rho} + PX^{-\rho} \ll P^{1-\rho}$$

и

$$S \ll XP^{-\rho} + P \ll X^{1-c_{24}\frac{\rho}{\sqrt{k}\ln k}}.$$

Тогда

$$S \ll X\exp\left(-c_{14}\ln^{-\frac{5}{7}} V(\ln\ln V)^{-\frac{2}{7}}\ln X\right),$$

что и доказывает лемму.

Лемма 14. *Пусть* $V > c_{13}$, $V_{00} \leqslant X \leqslant c_{25} V^{2+\frac{4}{n}}$,

$$AX \leqslant X' \leqslant x_1 \leqslant X'' \leqslant BX, \quad 0 \leqslant w_r(x) < 1, \quad (r = 1, 2, \ldots, n-1), \quad x \succ 0,$$

где все обозначения леммы 13.

Тогда

$$\sum_{X' \leqslant l_1 \leqslant X''} \exp\left(iF(l_1, x_2, \ldots x_n)\right) \ll X\exp\left(c_{26}\ln^{\frac{1}{4}} V - c_{27}\ln^{-\frac{1}{2}} V(\ln\ln V)^3\ln X\right).$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 13.

Лемма 15. *В области*

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{n}c_{14}\ln^{-\frac{5}{7}} V(\ln\ln V)^{-\frac{4}{7}}, \qquad V > c_{13}$$

справедлива оценка

$$Z(s, \Xi) \ll \exp(c_{28}\ln\ln V).$$

Доказательство. В тождестве леммы 9

$$Z(s, \Xi) = \sum_{j=1}^{h(\mathfrak{m})} \chi(\nu_j) \sum_{|N_j(l_1, \ldots, l_n)| \leqslant c_4 V^{2n+4}}^{*} \xi_j(l_1, \ldots, l_n)\,|N_j(l_1, \ldots, l_n)|^{-s} + O(1)$$

оцениваем внутреннюю сумму при $V > c_{29} > c_{13}$, где c_{29} достаточно велико.

Для этого рассматриваем в n-мерном пространстве $(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ последовательность n-мерных областей

$$c_{30}^{k-1} V_0 \leqslant x^{(1)} < c_{30}^{k} V_0, \quad 0 \leqslant w_r(x) < 1 \quad (r = 1, 2, \ldots, n-1), \quad x \succ 0,$$

где V_0 число леммы 13, $k = 2, 3, \ldots$ и $w_r(x)$ определено формулой (20).

Имеем:

$$\sum_{\substack{N(l_1,\ldots,l_n)\leqslant c_4 V^{2n+4}\\ \alpha\succ 0}}^{*} \xi(l_1, \ldots, l_n) N(l_1, \ldots, l_n)^{-s} =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha^{(1)}<c_{30}V_0\\ 0\leqslant w_r(\alpha)<1\\ (r=1,2,\ldots,n-1)\\ \alpha\succ 0}} \xi(l_1, \ldots, l_n) N(l_1, \ldots, l_r)^{-s} +$$

$$+ \sum_{k\geqslant 2} \sum_{\substack{c_{30}^{k-1}V_0\leqslant\alpha^{(1)}<c_{30}^{k}V_0\\ 0\leqslant w_r(\alpha)<1\\ (r=1,2,\ldots,n-1)\\ \alpha\succ 0}}' \xi(l_1, \ldots, l_n) N(l_1, \ldots, l_n)^{-s}, \tag{28}$$

где $'$ обозначает, что суммирование ведется только по тем целым точкам $(l_1, \ldots, l_n)$, для которых $N(l_1, \ldots, l_n) \leqslant c_4 V^{2n+4}$.

Первую сумму оцениваем тривиально:

$$\sum_{\substack{\alpha^{(1)}<c_{30}V_0\\ 0\leqslant w_r(\alpha)<1\\ (r=1,2,\ldots,n-1)\\ \alpha\succ 0}} \xi(l_1, \ldots, l_n) N(l_1, \ldots, l_n)^{-s} \ll$$

$$\ll \sum_{\alpha^{(1)}<c_{30}V_0} \alpha^{(1)-n\sigma} \alpha^{(1)n-1} \ll V_0^{n(1-\sigma)} \ll 1.$$

Для оценки остальных слагаемых в формуле (28) берем одну сумму и записываем:

$$S_k = \sum_{\substack{c_{30}^{k-1}V_0\leqslant\alpha^{(1)}<c_{30}^{k}V_0\\ 0\leqslant w_r(\alpha)<1\\ (r=1,2,\ldots,n-1)\\ \alpha\succ 0}}' \xi(l_1, \ldots, l_n) N(l_1, \ldots, l_n)^{-s} \ll$$

$$\ll \sum_{\substack{A_qX<l_{1q}\leqslant B_qX\\ 0\leqslant w_r(\alpha)<1\\ (r=1,2,\ldots,n-1)\\ \alpha\succ 0}}' \xi(l_{1q}, \ldots, l_{nq}) N(l_{1q}, \ldots, l_{nq})^{-s} =$$

$$= \sum_{\substack{AX<l_1\leqslant BX\\ 0\leqslant w_r(\alpha)<1\\ (r=1,2,\ldots,n-1)\\ \alpha\succ 0}}' \exp\Big(iF(l_1, \ldots, l_n) N(l_1, \ldots, l_n)\Big)^{-\sigma},$$

где A и B константы леммы 10, $X = c_{30}^{k-1} V_0$. Преобразуя эту сумму по Абелю, находим

$$S_k \ll X^{-n\sigma} \sum_{\substack{0\leqslant w_r'\leqslant w_r(\alpha)\leqslant w_r''<1\\ (r=1,2,\ldots,n-1)\\ \alpha\succ 0}} \max_{AX<X'\leqslant l_1\leqslant X''\leqslant BX} \Big| \sum_{X'\leqslant l_1\leqslant X''} \exp\Big(iF(l_1, \ldots, l_n)\Big) \Big| .$$

Если $V_{00} \leqslant X \leqslant c_{25} V^{2+\frac{4}{n}}$, где V_{00} число лемм 13 и 14, то по лемме 14 имеем

$$S_k \ll X^{n(1-\sigma)} \exp\left(c_{28} \ln^{\frac{1}{4}} V - c_{27} \ln^{-\frac{1}{2}} V (\ln\ln V)^3 \ln X\right) \ll 1$$

при $V > c_{19}$, где c_{29} достаточно велико.

Если $V_0 \leqslant X \leqslant V_{00}$, то по лемме 13 имеем

$$S_k \ll X^{n(1-\sigma)} \exp\left(-c_{14} \ln^{-\frac{5}{7}} V (\ln\ln V)^{-\frac{2}{7}} \ln X\right) \ll 1.$$

Так как число вышерассматриваемых n-мерных областей, имеющих хотя бы одну точку $(l_1, \ldots, l_n)$, для которой $|N(l_1, \ldots, l_n)| \leqslant c_4 V^{2n+4}$ есть $\ll \ln V$, то из полученных оценок выводим лемму.

Из леммы 15, посредством методов [8], выводим следующие утверждения.

Лемма 16. *Функция* $Z(s, \Xi)$ *не имеет нулей в области*

$$\sigma \geqslant 1 - c_{31} (\ln MT (\ln\ln MT))^{-\frac{5}{7}}.$$

Лемма 17. *Пусть* ν – *целое идеальное число,* $(\mathfrak{m}, \nu) = 1$, $\mathfrak{p}$ – *простое идеальное число. При* $x > 3$

$$\sum_{\substack{|N(\mathfrak{p})| \leqslant x \\ \mathfrak{p} \equiv \nu (\mathrm{mod}\, \mathfrak{m}) \\ \mathfrak{p}\nu^{-1} \succ 0}}^{(\mathfrak{m})\,*} \xi(\mathfrak{p}) = E(\xi) \frac{e\, \mathfrak{m}}{h(\mathfrak{m})} \int_2^x \frac{du}{\ln u} +$$

$$+ O\left(x \exp\left(\frac{-c_{32} \ln x}{(\ln M \ln\ln M)^{\frac{5}{7}} + (\ln x \ln\ln x)^{\frac{5}{12}}}\right) \ln^3 Mx\right),$$

где значки $*$ *и* $(\mathfrak{m})$ *при знаке суммы означают, что при суммировании из каждой системы ассоциированных* $\mathrm{mod}\, \mathfrak{m}$ *идеальных чисел берется только по одному представителю.*

Теорема. *Пусть* $x > 3$, $(\mathfrak{m}, \nu) = 1, \nu \neq 0$;

$$\{ w_r(\alpha) \} = w_r(\alpha) - [w_r(\alpha)], \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Число простых неассоциированных $\mathrm{mod}\, \mathfrak{m}$ *идеальных чисел* $\mathfrak{p}$ *системы* $\mathfrak{Z}$, *удовлетворяющих условиям*

$$|N(\mathfrak{p})| \leqslant x, \qquad \mathfrak{p} \equiv \nu (\mathrm{mod}\, \mathfrak{m}), \qquad \mathfrak{p}\nu^{-1} \succ 0,$$

$$0 \leqslant w'_r \leqslant \{ w_r(\mathfrak{p}) \} < w''_r \leqslant 1 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1),$$

выражается формулой

$$Q(x, \mathfrak{m}, \nu) = \frac{e(\mathfrak{m})}{h(\mathfrak{m})} \prod_{r=1}^{n-1} (w''_r - w'_r) \int_2^x \frac{du}{\ln u} +$$

$$+ O\left(x \exp\left(-c_{33} \ln^{\frac{7}{12}} x (\ln\ln x)^{-\frac{5}{12}}\right)\right).$$

Кафедра общей математики
Каунасского политехнического
института

Поступило в редакцию
25.X.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Архангельская. L-функции Дирихле. Изд. Саратовского у-тета (1962)
2. И. М. Виноградов. Избранные труды. Изд. АН СССР, Москва (1952).
3. И. М. Виноградов. Новая оценка функции $\zeta(1+it)$. Изв. АН СССР, серия матем., т. 22, № 2 (1958), 161–164.
4. Б. Н. Делоне. Геометрия бинарных квадратичных форм. Приложение к книге П. Г. Лежен Дирихле. Лекции по теории чисел, М.–Л. (1936).
5. Б. Н. Делоне и Д. К. Фадеев. Теория иррациональностей третьей степени. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т XI (1940).
6. А. Е. Ингам. Распределение простых чисел. ОНТИ (1936).
7. Н. М. Коробов. Оценки сумм Вейля и распределение простых чисел. Доклады АН СССР, т. 123, № 1 (1958), 28–31.
8. И. П. Кубилюс. О некоторых задачах геометрии простых чисел, Мат. сб. т. 31 (73) : 3 (1952), 507–542.
9. И. П. Кубилюс. Об одной задаче многомерной аналитической теории чисел. Вильнюсский гос. у-тет. Ученые труды.–Серия математ., физ. и хим. наук, т. 4 (1955), 5–41.
10. И. И. Урбялис. Распределение простых чисел вещественного квадратичного поля $K(\sqrt{2})$. Литовский мат. сб., т. 4, 3 (1964), 409–427.
11. Н. Г. Чудаков. Введение в теорию L-функций Дирихле. Гостехиздат (1947)
12. E. Hecke. Über eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. I. Math. Z., 1 (1918), 357–376, II. Math. Z., 6 (1920), 11–51.
13. E. Hecke. Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. Leipzig (1923).
14. E. Landau. Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale (1927).

GRYNAI REALAUS ALGEBRINIŲ SKAIČIŲ KŪNO PIRMINIŲ SKAIČIŲ PASISKIRSTYMAS

J. URBELIS

(*Reziumė*)

Darbe įrodoma sekanti teorema:

Tegul $x>3$, $n\geqslant 2$ (*n – sveikas racionalinis skaičius*), *K – n-tojo laipsnio grynai realus algebrinių skaičių kūnas;* $\mathfrak{m}$ *– kūno K sveikas idealas,* $\mathfrak{m}\neq 0$*;* α, ν *– kūno K sveiki idealiniai skaičiai;* η *– kūno K vienetas* mod $\mathfrak{m}$, $\eta\succ 0$, $\eta\equiv 1\pmod{\mathfrak{m}}$*;* $h(\mathfrak{m})=2^n h\,\varphi(\mathfrak{m})$, *kur* $h(\mathfrak{m})$ *– sveikų idealinių skaičių klasių skaičius* mod $\mathfrak{m}$ *siaurąja prasme,* h *– kūno K idealų klasių skaičius įprastąja prasme,* $\varphi(\mathfrak{m})$ *– Eulerio funkcija;* $e(\mathfrak{m})$ *– kūno K vienetų grupės indeksas atžvilgiu pogrupės sudarytos iš to kūno vienetų* mod $\mathfrak{m}$*;* $N(\alpha)$ *– idealinio skaičiaus* α *norma;*

$$\{w_j(\alpha)\}=w_j(\alpha)-[w_j(\alpha)] \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

kur

$$w_j(\alpha)=\sum_{k=1}^{n} e_k^{(j)}\ln|\alpha^{(k)}|$$

ir $e_k^{(j)}$ *nusakoma iš lygčių*

$$\sum_{k=1}^{n} e_k^{(j)}\ln\eta_l^{(k)}=\begin{cases}1, & kai\ \ l=j,\\ 0, & kai\ \ l\neq j,\end{cases} \qquad (l,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Kūno K neasocijuotų mod $\mathfrak{m}$ *pirminių idealinių skaičių* π, *tenkinančių sąlygas*

$$|N(\pi)|\leqslant x,\quad \pi\equiv\nu\pmod{\mathfrak{m}},\quad \pi\nu^{-1}\succ 0,$$

$$0\leqslant w_j'\leqslant\{w_j(\pi)\}<w_j''\leqslant 1 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

skaičius $Q(x, \mathfrak{m}, \nu)$ *yra išreiškiamas formule*

$$Q(x, \mathfrak{m}, \nu)=\frac{e(\mathfrak{m})}{h(\mathfrak{m})}\prod_{j=1}^{n-1}(w_j''-w_j')\int_2^x\frac{du}{\ln u}+O\left(x\exp\left(-c\ln^{\frac{7}{12}}x\,(\ln\ln x)^{-\frac{5}{12}}\right)\right),$$

kur c *teigiama konstanta.*

DIE VERTEILUNG DER PRIMZAHLEN EINES TOTALREELLEN ALGEBRAISCHEN ZAHLKÖRPERS

J. URBELIS

(*Zusammenfassung*)

Im vorliegenden Artikel wird der folgende Satz bewiesen:

Es sei $x>3$, $n\geqslant 2$ *(n – eine ganze rationale Zahl),* K *– ein totalreeller algebraischer Zahlkörper n-ten Grades;* $\mathfrak{m}$ *– ein ganzes Ideal des Körpers K;* α, ν *– ganze ideale Zahlen des Körpers K;* η *– die Einheit des Körpers* mod $\mathfrak{m}$, $\eta\succ 0$, $\eta\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m})$; $h(\mathfrak{m})=2^n h\varphi(\mathfrak{m})$, *wo* $h(\mathfrak{m})$ *– die Klassenzahl der ganzen idealen Zahlen* mod $\mathfrak{m}$ *im engeren Sinne,* h *– die Klassenzahl der Idealen im üblichen Sinne,* $\varphi(\mathfrak{m})$ *– die Eulersche Funktion;* $e(\mathfrak{m})$ *– Index der Untergruppe Einheiten* mod $\mathfrak{m}$ *bezüglich der Gruppe der Einheiten in K;* $N(\alpha)$ *– Norma der idealen Zahl* α*;*

$$\{w_j(\alpha)\}=w_j(\alpha)-[w_j(\alpha)]\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

wo

$$w_j(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}e_k^{(j)}\ln|\alpha^{(k)}|$$

und $e_k^{(j)}$ *wir durch die Gleichungen*

$$\sum_{k=1}^{n}e_k^{(j)}\ln\eta_l^{(k)}=\begin{cases}1, & \textit{wenn}\ l=j,\\ 0, & \textit{wenn}\ l\neq j\end{cases}\qquad (l,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

definieren.

Die Anzahl $Q(x\ \mathfrak{m},\ \nu)$ *der nicht-assoziierten* mod $\mathfrak{m}$ *Primzahlen* π *im Körper K, welche die Bedingungen*

$$|N(\pi)|\leqslant x,\quad \pi\equiv\nu\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}),\quad \pi\nu^{-1}\succ 0,$$
$$0\leqslant w_j'\leqslant\{w_j(\pi)\}<w_j''\leqslant 1\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

erfüllen, wird mit folgender Formel

$$Q(x,\ \mathfrak{m},\ \nu)=\frac{e(\mathfrak{m})}{h(\mathfrak{m})}\prod_{j=1}^{n-1}(w_j''-w_j')\int_2^x\frac{du}{\ln u}+O\left(x\exp\left(-c\ln^{\frac{7}{12}}x\,(\ln\ln x)^{-\frac{5}{12}}\right)\right)$$

dargestellt, wo c – eine positive Konstante ist.