V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1965

ИНФОРМАЦИЯ О ПЯТОМ РЕСПУБЛИКАНСКОМ СОВЕЩАНИИ МАТЕМАТИКОВ ЛИТОВСКОЙ ССР

С 22 по 24 июля 1964 г. в гор. Тракай происходило Пятое республиканское совещание математиков Литовской ССР, организованное физико-математическим факультетом Вильнюсского Государственного педагогического института, физико-математическим факультетом Вильнюсского гос. университета им. В. Капсукаса и Институтом физики и математики Академии наук Литовской ССР. На совещании участвовали математики республиканских учебных заведений, научных учреждений, а также преподаватели математики средних школ. Совещание открыл заведующий кафедрой геометрии и математического анализа ВГПИ, кандидат физико-математических наук В. Близникас. Ввиду большого количества докладов, работа совещания проводилась в четырёх параллельных секциях:

1. Теория вероятностей и теория чисел,
2. Геометрия и теория функций,
3. Вычислительная математика и математическая логика,
4. Методика преподавания математики и история математики.

Кроме того, было проведено два пленарных заседания.

На совещании было заслушано около 70 докладов.

ПЛЕНАРНЫЕ ЗАСЕДАНИЯ

Понедельник, 22 июля

1. Открытие совещания.
2. **В. Близникас.** Обзор работ геометров ЛССР.
3. **З. Жемайтис.** Исторический обзор литовской математической литературы.
4. Дискуссии.

Среда, 24 июля

1. **С. Григелёнис, А. Лепешкявичюс, В. Статулявичюс, И. Тейшерскис.** Обзор разных новых форм обучения математике в средней школе.
2. Дискуссии.
3. Окончание совещания.

СЕКЦИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Понедельник, 22 июля

1 **С. Бикялис.** О зависимости остаточного члена центральной предельной теоремы от аргумента.
2. **Е. Гечяускас.** Статистические квадратуры.

3. **А. Миталаускас.** Некоторые предельные теоремы для независимых случайных величин в случае устойчивого предельного закона.
4. **А. Рауделюнас.** О многомерной центральной предельной теореме.
5. **Л. Вилкаускас.** Многомерные теоремы для больших уклонений.
6. **З. Юшкис.** Метод генерирующих функций в вероятностной теории чисел.
7. **Г. Мисявичюс.** Метод моментов в вероятностной теории чисел. Работа будет опубликована в Литовском математическом сборнике, том 5, № 1, 1965.
8. **К. Булота.** О распределении простых чисел мнимого квадратного поля.
9. **И. Урбялис.** Распределение простых чисел алгебраического поля.
10. **И. Вайткявичюс.** Иррегуляция простых чисел мнимого тела.

Вторник, 23 июля

1. **И. Кубилюс.** Предельные теоремы для слабо зависимых величин в теории диофантовых приближений.
2. **А. Алешкявичене.** Некоторые вопросы однородных цепей Маркова.
3. **Г. Алешкявичюс.** К вопросу марковского процесса.
4. **Б. Григелёнис.** К вопросу оптимального управления стационарного процесса.
5. **Н. Калинаускайте.** Некоторые интегральные и локальные свойства устойчивого процесса.
6. **В. Лютикас.** Оценка остаточного члена в предельной теореме дискретного процесса восстановления.
7. **Б. Ряуба.** К вопросу о сходимости случайных ломанных к процессу Винера.
8. **В. Статулявичюс.** Предельные теоремы для функционалов от аддитивных регулярных процессов и разные задачи.
9. **П. Сурвила.** Оценки для вероятностей попадания в интервалы суммы независимых случайных величин.
10. **А. Темпельман.** Некоторые вопросы статистики случайных процессов.

Среда, 24 июля

1. **Р. Ясюлёнис, А. Мотуза.** Некоторые математические модели обучаемых систем опознования.
2. **Г. Ясюнас.** Графы групп согласных.
3. **Р. Мерките.** К вопросу статистических характеристик литовского языка.
4. **А. Матуляускас.** О неразложимых представлениях группы типа (р, р).
5. **Й. Моцкус.** О методах Монте-Карло в многоэкстремальных задачах.
6. **Р. Нашлюнас.** К вопросу об оценке правдоподобия алгоритма опознавания по результатам эксперимента.
7. **А. Шпилевский.** Использование понятия энтропии для оценки информативности признака при решении задач опознавания образов.
8. **Л. Телкснис.** Некоторые вопросы теории опознавания.
9. **Э. Вилкас.** Игры с неполной информацией.

СЕКЦИЯ ГЕОМЕТРИИ И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Понедельник, 22 июля

1. **А. Нафталявичюс.** Заметка об одной теореме Вале—Пуссена.
2. **И. Киселюс.** Аналитические решения одного класса линейных уравнений в частных производных.
3. **Б. Кведарас.** Об одной системе дифференциальных уравнений интегральными условиями.
4. **А. Мишкелявичюс.** К вопросу сходимости рядов Дирихле.

5. **А. Нагяле.** Поведение голоморфной функции в круге при больших значениях модуля.

6. **Ш. Стрелиц.** Мажоранты для модулей решений уравнений в частных производных.

7. **Л. Ступялис.** О спектральной задаче для уравнения смешанного типа.

8. **К. Гармус.** Двойные интегралы.

Вторник, 23 июля

1. **Б. Кведарас.** Одна задача коррегирования.

2. **Л. Ступялис.** О предельно точных шаудеровских оценках.

3. **З. Жемайтис.** Некоторое расширение абсолютной геометрии.

4. **А. Дрейманас.** Об одной задаче пространства коррелятивных элементов.

5. **А. Ионушаускас.** О существовании инвариантной финслеровой метрики в однородных пространствах.

6. **Д. Петрушкявичюте.** Огибающие вполне геодезических семейств пространственных кривых третьего порядка.

Среда, 24 июля

1. **К. Гринцевичюс.** О семействах секущих гиперповерхностей пространства $K_{3,4}$ коррелятивных элементов.

2. **В. Близникас.** Горизонтальные и вертикальные связности в пространстве опорных элементов.

3. **П. Вашкас.** К вопросу теории комплексов.

4. **Г. Йодейкайте.** О семействе секущих поверхностей в пространстве $K_{3,2}$ коррелятивных элементов.

5. **С. Мазиляускайте.** К вопросу об инвариантном дифференцировании в пространстве центральных пункторов.

6. **А. Рачене.** О секущей гиперповерхности в многомерном пространстве коррелятивных элементов $K_{n,2n-2}$

7. **А. Крищюнайте.** О секущей гиперповерхности в пространстве коррелятивных элементов.

СЕКЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Понедельник, 22 июля

1. **Р. Плюшкявичюс.** Конструктивное исчисление предикатов I^1_0 и описание алгорифма поиска вывода выводимых секвенций.

2. **А. Ясюлёнис.** Использование матриц при алгебраических и некоторых других действиях с рядами.

3. **А. Шпилевский.** Об исследовании одной нелинейной системы с положительными возвратными связями.

Вторник, 23 июля

1. **В. Матулис.** По вопросу поисков доказательств в считании классического предиката.

2. **Р. Плюшкявичюс.** Конструктивное исчисление предикатов I_0 без структурных правил вывода.

3. **Н. Сапоговас.** О применении метода прогонки для решения нелинейных разностных уравнений.

4. **И. Уждавинис.** К вопросу сходимости метода колокаций.

СЕКЦИЯ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Вторник, 23 июля

1. **В. Дрегунас.** К вопросу измерения объёмов и площадей поверхностей круглых тел в средней политехнической школе.
2. **Р. Балайшис.** Методические указания к решению задач доказательства в курсе элементарной геометрии.
3. **П. Румшас.** Преподавание математического анализа в связи с курсом средней школы.
4. **Й. Аушрайте.** Развитие понятия функции в курсе математики средней школы.
5. **А. Вайткявичюс.** Делимость многочленов с целыми коэффициентами на квадратный трехчлен.

Среда, 23 июля

1. **Б. Хмелевский.** Об одном методическом пособии, описанном в старинной рукописи Вильнюсской академии.
2. **В. Дрегунас.** К вопросу изображения круглых тел в средней политехнической школе.
3. **И. Янулёнис.** Работа математиков на внеклассных занятиях.
4. **Э. Климавичене.** Внеклассная работа учителя математики.
5. **В. Клебанскис.** Процентные исчисления в курсе средней школы.
6. **Д. Чулковене.** Развитие сознания учащихся на уроках математики.

ОБЗОР РАБОТ ЛИТОВСКИХ ГЕОМЕТРОВ

В. И. БЛИЗНИКАС

Более ранняя работа П. И. Катилюса [9] посвящена теории сетей трехмерного и многомерного евклидова пространства. Он написал первый учебник на литовском языке для высшей школы, а также учебники по аналитической [10], [11] и дифференциальной геометрии [12].

Наибольшее число работ литовских геометров посвящено вопросам проективно-дифференциальной геометрии линейчатых образов (теория конгруэнций, теория комплексов, теория гиперконгруэнций, теория гиперкомплексов и др.). В работах К. И. Гринцявичюса [6] создана проективно-дифференциальная геометрия комплекса прямых многомерного проективного пространства, получен полный дифференциально-геометрический объект комплекса прямых, построен комплекс — эволюта, найдены новые пары комплексов, применен метод Г. Ф. Лаптева для систематического исследования линейчатых образов многомерного проективного пространства, изучена геометрическая структура нормальных пространств комплекса прямых с новой точки зрения и др.

В работах А. И. Дрейманаса [7] изучена дифференциальная окрестность первого и второго порядка гиперконгруэнции четырехмерного проективного пространства, дана геометрическая характеристика некоторых частных классов таких многообразий, рассматривается задача расслоения для таких многообразий.

Работы П. И. Вашкаса [3] посвящены исследованию некоторых пар комплексов трехмерного проективного пространства и решению обобщенной проблемы расслоения комплекса прямых при помощи линейных элементов.

К вопросам линейчатой геометрии относятся так же неопубликованные ещё работы А. Рачене, Г. Иодейкайте, А. Крищюнайте, Г. Ришкуте-Римкене и др.

Другая серия работ литовских геометров посвящена различным вопросам геометрии обобщенных пространств, теории поверхностей евклидова пространства (теория кривых, гиперповерхностей и конгруэнций метрических пространств линейных элементов, теории кривых билинейно-метрических пространств линейных элементов, теории кривых поверхностей и гиперповерхностей пространств обобщенной евклидовой связности, теория связности пространства опорных элементов и др.). Эти вопросы рассматриваются в работах В. И. Близникаса [1], Ю. И. Шинкунаса [14], Р. Восилюса [4], И. В. Близникене [2] и в неопубликованной работе С. Мазиляускайте.

Вопросам теории групп Ли посвящены работы Д. К. Петрушкевичюте [13] и неопубликованные работы А. Ионушаускаса.

Единственная работа по элементарной геометрии опубликована З. Жемайтисом [8].

1. В. И. Близникас, ДАН СССР, 1959, т. 127, № 1, 9—12; 1960, т. 132, № 4, 735—738; Учен. зап. Вильнюсского гос. пед. института, 1960, т. 10, 5—9; 11—29; Учен. тр. Вильнюсского гос. ун-та, 1960, т. 33, IX, 97—106; Лит. мат. сб., 1961, т. 1, № 1—2, 15—24; 372—373; 1962, т. 2, № 1, 9—16; 230—231; т. 2, 15—32; 33—37; Первая Всесоюзная геом. конференция (тезисы), Киев, 1962; Лит. мат. сб., 1963, т. 3, № 1, 21—27; т. 3, № 2, 231—232, 1964, т. 4, № 2, 17—34.

2. И. В. Близникене, Лит. мат. сб., 1962, т. 2, № 1, 17—24; 1963, т. 3, № 2, 234—235. Первая Всесоюзная геом. конференция (тезисы), Киев, 1962.

3. П. И. Вашкас, Первая Всесоюзная геом. конференция (тезисы), Киев 9, 1962; Лит. мат. сб., 1962, т. 2, № 1, 229; 1963, т. 3, № 1, 51—59; 251.

4. Р. В. Восилюс, Лит. мат. сб., 1962, т. 2, № 1, 230; т. 7, № 1, 101—106; 1963, т. 3, № 2, 245.

5. К. И. Гринцевичюс, ДАН СССР, 1956, т. 107, № 6, 785—788; Успехи мат. наук, 1958, т. 13, 2(80), 175—180; Ученые записи Вильнюсского гос. ун-та, 1960, 33, IX, 51—59; Успехи мат. наук, 1960, т. 15, 1(91), 237; Мат. сб., 1960, т. 52 (94); 4, 991—1020; Лит. мат. сб., 1961, т. 1, № 1—2, 87—97; 99—107; 371—372; т. 2, № 1, 49—54; т. 3, № 2, 248—249; Первая всесоюзная геом. конференция (тезисы), Киев 9, 1962.

6. А. И. Дрейманас, Учен. тр. Вильнюсского гос. ун-та, 1958, т. 25, VIII, 57—73; Первая Всесоюзная геометрическая конференция (тезисы), Киев, 1962, 49; Лит. мат. сб., 1962, т. 2. № 1, 231; 1963, т. 3, № 2, 77—82; 1963, т. 3. № 2, 245.

7. З. Жемайтис, Учен. тр. Вильнюсского гос. университета, т. 16, 13—19, Вильнюс, 1957.

8. P. Katilius, Analizinė geometrija, Kaunas, 1940

9. P. Katilius, Analizinė geometrija, Vilnius, 1956.

10. P. Katilius, Diferencialinė geometrija, Vilnius, 1961.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ МНИМОГО КВАДРАТИЧНОГО ПОЛЯ

К. БУЛОТА

Вопрос о распределении простых чисел мнимого квадратичного поля можно свести к изучению некоторых свойств, так называемых, дзета-функций Гекке. Используя приближенные функциональные уравнения дзета-функций Гекке для мнимого квадратичного поля можно показать, что число N нулей всех дзета-функций Гекке с $|m|\leqslant M$ (m — показатель характера Гекке) в некотором прямоугольнике $\alpha\leqslant\sigma<1$, $|t|\leqslant T$ комплексной плоскости $s=\sigma+it$ не превышает

$$N\ll\begin{cases}(MT)^{(6+\varepsilon_1)(1-\alpha)}\ln^{C_1}(M+T+2),\\ (MT)^{4(1-\alpha)+\varepsilon_2},\end{cases}$$

где $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$, C_1 — некоторая постоянная, $M>0$, $T>0$.

Эти результаты приводят к утверждению, что в любом секторе комплексной плоскости, имеющем вершину в начале координат и радиус $\sqrt{x}$, лежит хотя бы одно простое идеальное число, если раствор сектора

$$\varphi_2-\varphi_1 \gg x^{-\frac{1}{6}+\varepsilon}, \quad \varepsilon>0.$$

Получены асимптотические формулы для числа простых чисел в таком секторе.

Эти результаты допускают простое арифметическое толкование. Один из таких теоретико-числовых выводов можно формулировать следующим образом: существует бесконечно много простых натуральных чисел p вида

$$p=a^2+b^2,$$

где

$$b \ll p^{\frac{1}{3}+\varepsilon}, \quad \varepsilon>0.$$

Эта оценка улучшает соответствующий результат И. Кубилюса и является дальнейшим приближением к гипотезе Ландау, утверждающей, что существует бесконечно много простых натуральных чисел вида

$$p=a^2+1.$$

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ СТРОЕНИИ ОДНОГО СЛУЧАЯ КОМПЛЕКСОВ ПРЯМЫХ, РАССЛОЯЕМЫХ ПОСРЕДСТВОМ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

П. ВАШКАС

Инфинитезимальное перемещение проективного репера задано уравнениями

$$dA_i=\omega_i^j A_j,$$

причём

$$D\omega_i^j=[\omega_i^k\,\omega_k^j] \qquad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Одностороннее расслоение комплекса прямых, линейное дифференциальное уравнение которого задано в виде

$$\omega_1^4+\omega_2^3=0, \tag{1}$$

осуществляется при помощи дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} dt+t(\omega_2^2-\omega_1^1)+\omega_1^3-t^2\omega_2^1+\left\{\mu_{2222}\,\omega_1^3+(2\,\mu_{2221}+\mu_{22})\,\omega_1^4-\left(\mu_{2211}+\mu_{21}+\frac{1}{2}\,\mu\right)\omega_2^4\right\}t^2+ \\ +\left\{(2\mu_{2221}-\mu_{22})\,\omega_1^3+(4\mu_{2211}-\mu)\,\omega_1^4-(2\mu_{2111}+\mu_{11})\,\omega_2^4\right\}t+ \\ +\left(\mu_{2211}-\mu_{21}+\frac{1}{2}\,\mu\right)\omega_1^3+(2\mu_{2111}-\mu_{11})\,\omega_1^4-\mu_{1111}\,\omega_2^4=0 \end{aligned} \tag{2}$$

требованием полной интегрируемости этого уравнения при любом t (t — неоднородная координата точки $M=A_1+tA_2$ на луче комплекса A_1A_2).

Компоненты однородного геометрического объекта μ_{pqrs} ($p,\ q,\ r,\ s=1,\ 2$) (μ_{pqrs} — симметричны относительно всех индексов) определяют 4 инвариантные относительно изменения вторичных параметров точки t^pA_p на луче A_1A_2

$$\mu_{pqrs}\,t^p\,t^q\,t^r\,t^s=0, \tag{3}$$

а неоднородные геометрические объекты μ_{pq} (μ_{pq} — симметричны) и μ определяют инвариантную прямую

$$\left\{\begin{aligned} &x^1+\mu_{22}\,x^3+\left(\mu_{21}+\frac{1}{2}\,\mu\right)x^4=0, \\ &x^2-\left(\mu_{12}-\frac{1}{2}\,\mu\right)x^3-\mu_{11}\,x^4=0 \end{aligned}\right. \tag{4}$$

x^i — координаты точки в репере $\{A_i\}$).

Геометрическая характеристика этих точек, а также прямой (кроме случая, когда все 4 точки (3) совпадают между собой) получены автором в [1] и доложены на I Всесоюзной геометрической конференции (Киев, 1962).

Здесь даётся эффективное построение (безинтегральное представление по терминологии Н. И. Кованцова) того случая, когда все 4 точки, определяемые уравнением (3), совпадают между собой.

Пусть в то время, когда ребро $A_1 A_2$ описывает комплекс прямых (1), вершина A_1 описывает семейство поверхностей. Если вершины A_4 и A_3 помещены в касательной плоскости поверхности семейства, проходящей через A_1, уравнение семейства принимает вид

$$[\omega_1^2,\ D\omega_1^2]=0,$$

откуда следует:

$$\omega_3^2=\lambda_2\,\omega_1^2+\lambda_{22}\,\omega_1^3+\lambda_{21}\,\omega_1^4,$$

$$\omega_4^2=\lambda_1\,\omega_1^2+\lambda_{12}\,\omega_1^3+\lambda_{11}\,\omega_1^4\ \ (\lambda_{21}=\lambda_{12}). \tag{5}$$

При перемещении по прямой $A_1 A_2$ от поверхности семейства, проходящей через точку A_1, перейдём к другим поверхностям семейства, а касательные плоскости поверхностей семейства в точках пересечения их с прямой $A_1 A_2$ образуют однопараметрическое семейство плоскостей. Характеристическая прямая этого семейства задаётся уравнениями:

$$\begin{cases} x^2=0, \\ x^1+\lambda_2\,x^3+\lambda_1\,x^4=0. \end{cases} \tag{6}$$

Помещая вершины A_4 и A_3 на характеристической прямой (6), получим $\lambda_1=\lambda_2=0$.

Последовательное продолжение системы (5) (при $\lambda_1=\lambda_2=0$) приводит к уравнениям (выписаны не все уравнения):

$$-\omega_3^1-\lambda_{22}\,\omega_2^3-\lambda_{21}\,\omega_2^4=\tilde\lambda_2\,\omega_1^2+\tilde\lambda_{22}\,\omega_1^3+\tilde\lambda_{21}\,\omega_1^4,$$

$$-\omega_4^1-\lambda_{12}\,\omega_2^3-\lambda_{11}\,\omega_2^4=\tilde\lambda_1\,\omega_1^2+\tilde\lambda_{12}\,\omega_1^3+\tilde\lambda_{11}\,\omega_1^4\,(\tilde\lambda_{21}=\tilde\lambda_{12});$$

$$d\tilde\lambda_2+\tilde\lambda_2\,(2\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3)-\tilde\lambda_1\,\omega_3^4-2\tilde\lambda_{22}\,\omega_2^3-2\tilde\lambda_{21}\,\omega_2^4=\tilde{\tilde\lambda}_2\,\omega_1^2+\tilde{\tilde\lambda}_{22}\,\omega_1^3+\tilde{\tilde\lambda}_{21}\,\omega_1^4;$$

$$d\tilde\lambda_1+\tilde\lambda_1\,(2\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_4^4)-\tilde\lambda_2\,\omega_4^3-2\tilde\lambda_{12}\,\omega_2^3-2\tilde\lambda_{11}\,\omega_2^4=\tilde{\tilde\lambda}_1\,\omega_1^2+\tilde{\tilde\lambda}_{12}\,\omega_1^3+\tilde{\tilde\lambda}_{11}\,\omega_1^4\,(\tilde{\tilde\lambda}_{21}=\tilde{\tilde\lambda}_{12}).$$

Точка $\tilde A_4=\tilde\lambda_1 A_3-\tilde\lambda_2 A_4$ является характеристической точкой вышеуказанного однопараметрического семейства плоскостей, а величины $\tilde\lambda_1$, $\tilde\lambda_2$, $\tilde{\tilde\lambda}_1$, $\tilde{\tilde\lambda}_2$ определяют инвариантную квадрику

$$3\tilde\lambda_2\,x^1 x^3+3\tilde\lambda_1\,x^1 x^4-\tilde{\tilde\lambda}_2\,x^2 x^3-\tilde{\tilde\lambda}_1\,x^2 x^4=0, \tag{7}$$

проходящую через прямые $A_1 A_2$, $A_4 A_3$, $A_1 \tilde A_4$.

Требование, чтобы характеристическая точка $\tilde A_4$ совпала с точкой A_4, т. е. с точкой пересечения прямой $A_4 A_3$ и плоскости, ассоциированной точке A_1 в нулевой системе заданного комплекса, а квадрика (7) являлась гармонической нормалью заданного комплекса, проходящей через прямую $A_4 A_3$, приводит к тому, что внешнее дифференцирование уравнения (2), полагая, что прямая $A_4 A_3$ совпадает с прямой (4), т. е.

$$\mu_{22}=\mu_{21}=\mu_{11}=0,\ \ \mu=0,$$

а четырёхкратная точка, определяемая уравнением (3), совпадает с точкой A_1, т. е.

$$\mu_{2222}=1,\ \ \mu_{2221}=\mu_{2211}=\mu_{2111}=\mu_{1111}=0,$$

к новым условиям не приводит, т. е. уравнение (2) вполне интегрируемо.

Произвол существования комплекса прямых, расслояемого посредством линейных элементов $\bigl($при помощи уравнения (2)$\bigr)$, когда все 4 точки, определяемые уравнением (3), совпадают между собой, – одна функция трёх аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Вашкас. О расслоении комплексов прямых, Литовский математический сборник, т. III, № 1, 51–59, 1963.

ДВОЙНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

К. ГАРМУС

Для функции одного переменного мы имеем производные: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = F'(x)$ — обыкновенную производную и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = F'\,\mathrm{ap}\,(x)$ — аппроксимативную производную. Известно, что примитивная функция таких производных восстанавливается по формуле:

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C$$

и

$$\int F'\,\mathrm{ap}\,(x)\,dx = F(x) + C.$$

Подобные производные получаются и для функции двух переменных, а именно: $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta^{(2)} F(x, y)}{\Delta x\, \Delta y} = F''(x, y)$ — сильная двойная производная, $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta^{(2)} F(x, y)}{\Delta x\, \Delta y} = DF(x, y)$ — регулярная двойная производная (Δx, $\Delta y \to 0$ регулярно) и $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \mathrm{ap} \frac{\Delta^{(2)} F(x, y)}{\Delta x\, \Delta y} = F''\,\mathrm{ap}\,(x, y)$ — аппроксимативная двойная производная. Тут $\Delta^{(2)} F(x, y)$ имеет значение:

$$\Delta^{(2)} F(x, y) = F(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - F(x,\ y + \Delta y) - F(x + \Delta x,\ y) + F(x, y)$$

и называется двойным приращением функции $F(x, y)$ в точке (x, y).

По таким производным также восстанавливается примитивная функция по формуле

$$\int\int F''(x, y)\,dxdy = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y),$$

$$\int\int DF(x, y)\,dxdy = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y),$$

и

$$\int\int F''\,\mathrm{ap}\,(x, y)\,dxdy = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y).$$

О СЕМЕЙСТВАХ СЕКУЩИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВА КОРРЕЛЯТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

К. И. ГРИНЦЕВИЧЮС

Гиперповерхность в расслоенном пространстве коррелятивных элементов определяется уравнениями

$$d\rho + \omega_\alpha^\alpha - \omega_p^p = F_\alpha^p\, \omega_p^\alpha, \quad [\Delta F_\alpha^p\, \omega_p^\alpha] = 0, \tag{1}$$

где $p = 1, 2$; $\alpha = 3, 4$.

В этом же пространстве будет введено семейство секущих гиперповерхностей, если, при заданных функциях $F_\alpha^p(\rho)$, уравнение (1) будет вполне интегрируемо.

В случае

$$F_\alpha^p(\rho) = A_\alpha^p \rho^2 + 2B_\alpha^p \rho + C_\alpha^p + \sum_{k=1}^{n} \frac{\underset{k}{\lambda}{}_\alpha^p}{\rho - \underset{k}{\lambda}},$$

где n — любое целое неотрицательное число и все $\underset{k}{\lambda}$ различны, существует распадение расслоенного пространства на однопараметрическое семейство секущих гиперповерхностей с произволом $n+3$ функций от 4 аргументов.

Системы коэффициентов функций

$$A^p_\alpha;$$

$$B^p_\alpha,\ A^p_\alpha;$$

$$C^p_\alpha,\ B^p_\alpha,\ A^p_\alpha;$$

$\lambda^p_{k\alpha}$ (при каждом фиксированном k) являются геометрическими объектами, а λ_k — относительными инвариантами одинакового веса.

К ВОПРОСУ ИЗМЕРЕНИЯ ОБЪЕМОВ И ПЛОЩАДЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ КРУГЛЫХ ТЕЛ В СРЕДНЕЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОЙ ШКОЛЕ

В. ДРЕГУНАС

Общепринятое ныне традиционное изложение теории измерения объемов и площадей поверхностей круглых тел в средней школе имеет два существенных недостатка. Одним из них является то, что эта теория не имеет общей идеи, общего принципа изложения. Выведение каждой отдельной формулы объема или площади поверхности, пригодно только для данной формулы и производится довольно сложным путем. Второй недостаток заключается в том, что в основу этой теории положены определения понятий измеряемых величин, которые не являются строго научными и вызывают возражение как с психологической, так и с логической стороны.

Новая программа по математике предусматривает выведение всех формул объемов тел, исходя из формулы Симпсона или принципа Кавальери. Включение в курс стереометрии формулы Симпсона или принципа Кавальери дает возможность ликвидировать вышеуказанные недостатки в общепринятом изложении вопросов измерения объемов круглых тел. Это позволяет, во-первых, изложить тему «Измерение объемов» на более высоком теоретическом уровне, заменить ранее практиковавшийся способ выведения каждой отдельной формулы общим приемом вычисления объемов всех тел, изучаемых в средней школе, а также многих других тел, и, во-вторых, дать общее определение понятия объема взамен старых дефектных определений объема каждого отдельного круглого тела.

Если новая программа способствует ликвидации недостатков в старом традиционном изложении теории измерения объемов, то в изложении теории измерения площадей поверхностей круглых тел она не вносит каких-либо изменений. При этом получается, что теория измерения объемов по новым программам будет изложена на более высоком теоретическом уровне, а теория измерения площадей кривых поверхностей — с теми же самыми недостатками, которые допускались до настоящего времени.

Чтобы теория измерения площадей кривых поверхностей, как и теория измерения объемов, имела общую идею, общий прием изложения, чтобы избежать дефектных определений площадей поверхностей круглых тел, предлагается применить определение площади кривой поверхности, данное в книге А. Лебега «Об измерении величин» (Учпедгиз, 1960), и, исходя из этого определения, изложить всю теорию измерения площадей кривых поверхностей.

В сообщении излагается методическая разработка теории измерения объемов и площадей поверхностей круглых тел и приводятся некоторые результаты экспериментальной проверки этой методической разработки на кружковых занятиях с учащимися одиннадцатого класса.

К ВОПРОСУ ИЗОБРАЖЕНИЯ КРУГЛЫХ ТЕЛ В СРЕДНЕЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОЙ ШКОЛЕ

В. ДРЕГУНАС

Анализ всей методической литературы по вопросам изображения круглых тел в средней школе показывает, что до сих пор не имеется единого мнения и между методистами ведется дискуссия по вопросу о том, в какой проекции следует изображать круглые тела. Имеется 4 варианта выбора метода проектирования.

Исходя из трех требований (верности, наглядности и простоты выполнения), предъявляемых к изображениям пространственных фигур, а также из требования единого метода проектирования для всех круглых тел, в сообщении делается вывод, что в средней школе все круглые тела могут быть изображены или в ортогональной или в специальной косоугольной проекции. Обе эти проекции в одинаковой степени удовлетворяют указанным выше требованиям. Но в школьной практике принято все круглые тела и их комбинации с другими телами изображать в ортогональной проекции. Поэтому в сообщении основное внимание уделяется доказательству того, что специальная косоугольная проекция для изображения круглых тел ни в чем не уступает ортогональной проекции. Более того применение специальной косоугольной проекции упрощает построение некоторых изображений, облегчает их сознательное выполнение учащимися.

Изображения цилиндра и конуса в специальной косоугольной проекции имеет явное преимущество перед изображениями этих тел в ортогональной проекции и поэтому применение специальной косоугольной проекции для изображения этих тел категорических возражений не вызывает.

Что же касается изображения шара, то оно более наглядно в ортогональной проекции. Но требование наглядности и требование простоты выполнения относительны и связаны между собой: изображение не может быть одновременно и максимально наглядным и максимально простым по построению. Результаты проведенного сравнения изображения шара в обеих проекциях убеждает в том, что потеря наглядности при изображении шара в специальной косоугольной проекции очень незначительная, но за то такое изображение является наиболее простым по выполнению и по доступности обоснования построений. Особенно эти превосходства видны при изображении шара в комбинациях с другими телами, что особенно трудно дается учащимся.

В сообщении указывается, какие сведения необходимо дать учащимся, чтобы ознакомить их с изображениями круглых тел в специальной косоугольной проекции, приводятся некоторые результаты экспериментальной работы.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРОСТРАНСТВА КОРРЕЛЯТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. ДРЕЙМАНАС

Имеем четырехмерное проективное пространство. Инфинитезимальное перемещение репера $\{A_i\}$ определяют ω_i^j. Они удовлетворяют уравнениям структуры

$$dA_i=\omega_i^k \overset{\bullet}{A}_k, \quad D\omega_i^k=[\omega_i^j \omega_j^k],$$

где $i, j, k=1, 2, 3, 4, 5$; $p, q=1, 2$; $\alpha, \beta, \gamma=3, 4, 5$.

Класс корреляций определяем уравнением

$$e^{10\rho} A^2=a^5, \text{ где } A=|a_{ij}|, \; a=|a_{pq}|.$$

Условие инвариантности есть

$$d\rho+\omega_\alpha^\alpha-\omega_p^p=0.$$

Система $\omega_p^\alpha=0$ вполне интегрируема и первые интегралы определяют прямую $(A_1 A_2)$. Система $\omega_p^\alpha=0$ и $d\rho+\omega_\alpha^\alpha-\omega_p^p=0$ тоже вполне интегрируема и определяет коррелятивный элемент $\mathfrak{A}$ (т. е. луч $(A_1 A_2)$ и класс корреляций). Уравнением

$$d\rho+\omega_\alpha^\alpha-\omega_p^p=(F_\alpha^p \rho^2+2G_\alpha^p \rho+H_\alpha^p)\,\omega_p^\alpha$$

выделяем 6-мерное многообразие коррелятивных элементов. Требуем, чтобы оно было вполне интегрируемым. Системы величин

$$F_\alpha^p;\ F_\alpha^p,\ G_\alpha^p;\ F_\alpha^p\, G_\alpha^p,\ H_\alpha^p$$

являются геометрическими объектами.

Система в инволюции и решение существует с произволом трех функций от шести аргументов. Даётся интерпретации геометрических объектов и рассматриваются другие вопросы.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР РАЗВИТИЯ ЛИТОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

З. ЖЕМАЙТИС

В докладе дается краткий исторический обзор и делается анализ математической литературы по периодам, характерным для культурного развития литовского народа.

1. Период деятельности старого Вильнюсского университета: первые учебники по математике на латинском языке и, к концу периода, частично, — на польском языке.

2. XIX в. и начало XX в. до Великой Октябрьской соц. революции: первые шаги в направлении создания учебной литературы для начальной и средней школы.

3. Период господства буржуазии в Литве: создание учебников для средней школы и первые шаги по созданию руководств для высшей школы, а также появление публикаций отдельных научно-исследовательских работ по математике.

4. Советский период: период бурного роста учебной и научно-популярной математической литературы и быстро растущего количества публикаций научно-исследовательских работ, в последнее время — с явным преобладанием работ, выполняемых в созданной при ВГУ им. ВК математической вероятностной школе.

НЕКОТОРОЕ РАСШИРЕНИЕ ОБЛАСТИ АБСОЛЮТНОЙ ГЕОМЕТРИИ

З. ЖЕМАЙТИС

В своей работе: «Некоторые новые соотношения в гиперболической и эллиптической геометриях» («Труды» ВГУ, 1958) автор установил ряд положений, общих для всех трех геометрий. В предлагаемом докладе излагаются результаты дальнейших исследований в этой области. Найдены новые формулы, выражающие площади и отношение площадей определенных круговых вырезков через весьма простые алгебраические функции углов, соответствующих взятым вырезкам, принадлежащим кругам, разным по величине радиусов. В этой работе выдвигается новый метод исследований в области неевклидовых геометрий и демонстрируется применение его на конкретных примерах.

Найденные соотношения являются тоже общими для всех трех геометрий и тем в некоторой степени расширяют область абсолютной геометрии.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ИНВАРИАНТНОЙ ФИНСЛЕРОВОЙ МЕТРИКИ В ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. ИОНУШАУСКАС

В основу настоящего доклада легло изучение ниже описанного класса однородных пространств, которое дало возможность очутиться в основных типичных ситуациях рассматриваемого вопроса о существовании инвариантной финслеровой метрики.

Предположим, что в n-мерном векторном пространстве L_n действует группа $H \subset GL(n, R)$, являющаяся стационарной подгруппой m-мерного подпространства $L_m \subset L_n$. Под действием группы H p-мерное подпространство $L_p \subset L_n$ описывает некоторое семейство $L_p(H)$ p-мерных подпространств — однородное пространство. Как известно, инвариантные векторные и тензорные поля, а также инвариантные поля многообразий векторов или тензоров на однородном пространстве $\mathfrak{M}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с векторами и тензорами или многообразиями векторов и тензоров N-мерного векторного пространства L_N $(N=\dim \mathfrak{M})$, инвариантными относительно линейной группы изотропии рассматриваемого однородного пространства. Следовательно, существование в однородном пространстве инвариантной финслеровой метрики равносильно существованию в L_N тангенциально невырожденного $(N-1)$-мерного подмногообразия, инвариантного относительно линейной группы изотропии. Линейная группа изотропии однородного пространства $L_p(H)$ приводима, однако в случае группы H она действует транзитивно, значит, инвариантная финслерова метрика в $L_p(H)$ невозможна. Такая метрика оказывается возможной в случае некоторых подгрупп $\bar{H}$ группы H, и нами проведена классификация однородных пространств типа $L_p(\bar{H})$ для важнейших подгрупп $\bar{H} \subset H$ в смысле существования или несуществования в $L_p(\bar{H})$ инвариантной финслеровой метрики. Эта классификация охватывает случаи, когда H — аффинная группа или группа движений евклидова пространства.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

С. Г. КРЕЙН
(тезисы доклада)

В докладе рассказывается о работах воронежских математиков по применению теории дифференциальных уравнений в банаховых пространствах к задачам математической физики и, в частности, к теории колебаний. Рассматриваются некоторые задачи теории цилиндрических периодических волноводов и теории колебаний вязкой жидкости. Формулируются теоремы существования, изучается спектр соответствующих задач. Выделяется группа задач, приводящая к исследованию операторных уравнений, мероморфно зависящих от параметра. Указывается ряд следствий, имеющих непосредственный физический смысл.

Результаты, изложенные в докладе, опубликованы в работах Н. Г. Аскерова, Г. И. Лаптева и докладчика.

О СЕКУЩЕЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ПРОСТРАНСТВА ЦЕНТРАЛЬНЫХ КОРРЕЛЯТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. КРИЩЮНАЙТЕ

Пусть P_n n-мерное проективное пространство с подвижным репером $\{A_I\}$ и

$$dA_I = \omega_I^J A_J,$$

где

$$D\omega_I^J = [\omega_I^K \omega_K^J] \qquad (I, J, K = 0, 1, \ldots, n).$$

Система дифференциальных уравнений

$$\omega_0^i=0 \qquad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

вполне интегрируема, и её первые интегралы определяют геометрическую точку A_0 в пространстве P_n, которое будем называть базой.

Система дифференциальных уравнений

$$\omega_0^i=0,$$
$$d\rho-n\omega_0^0+\omega_i^i=0$$

вполне интегрируема, и её первые интегралы определяют точку расслоенного пространства V_{n+1} в понятиях базисного пространства, пару, состоящую из точки базисного пространства и из одного класса

$$e^{2\rho}\,|\,U\,|=|\,u_{00}\,|^{n+1}$$

корреляций $u_{IJ}\,x^I\,y^J=0$, где $U=|\det|\,u_{IJ}\,||$.

Слоями расслоенного пространства являются однопараметрические семейства классов корреляций.

Секущая гиперповерхность расслоенного пространства, пересекающаяся с каждым слоем в данной точке, определяется уравнениями

$$\begin{cases} d\rho-n\omega_0^0+\omega_i^i=\lambda_i\,\omega^i, \\ d\lambda_i=\lambda_j\,\omega_i^j-\lambda_i\,\omega_0^0+(n+1)\,\omega_i^0+\lambda_{ij}\,\omega^j, \\ d\lambda_{ij}=\lambda_{ik}\,\omega_j^k+\lambda_{jk}\,\omega_i^k-2\lambda_{ij}\,\omega_0^0-\lambda_i\,\omega_j^0-\lambda_j\,\omega_i^0+\lambda_{ijk}\,\omega_0^k, \end{cases}$$

$$[d\lambda_{ijk}-\lambda_{ije}\,\omega_k^e-\lambda_{ike}\,\omega_j^e-\lambda_{jke}\,\omega_i^e-3\lambda_{ijk}\,\omega_0^0-2\lambda_{ij}\,\omega_k^0-2\lambda_{jk}\,\omega_i^0-2\lambda_{ik}\,\omega_j^0,\ \omega_0^k]=0,$$

где все λ_{ij}, λ_{ijk}, ... симметричны относительно всех индексов.

Коэффициенты λ_i образуют фундаментальный объект первого порядка, $\{\lambda_i,\ \lambda_{ij}\}$ — второго порядка, $\{\lambda_i,\ \lambda_{ij},\ \lambda_{ijk}\}$ — третьего порядка.

Фундаментальный геометрический объект четвертого порядка является полным.

Получены некоторые подобъекты фундаментальных объектов.

Для некоторых из указанных объектов получена геометрическая интерпретация.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ СЛАБО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В ТЕОРИИ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

И. П. КУБИЛЮС

В докладе было сообщено о доказательстве следующих двух теорем.

1. Пусть $f(u)$ — вещественная периодическая с периодом 1 функция, удовлетворяющая условию Липщица: для любых u_1 и u_2 $|f(u_1)-f(u_2)|\leqslant c\,|u_1-u_2|^\delta$, где c и δ — положительные константы, и пусть

$$\sigma=\left(\int_0^1 f^2(u)\,du+2\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 f(u)\,f(2^k u)\,du\right)^{\frac{1}{2}}>0.$$

Тогда мера Лебега множества всех тех $\alpha\in(0,\ 1)$, для которых

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(2^k\alpha)-\sqrt{n}\int_0^1 f(u)\,du\right)<x,$$

при $n\to\infty$ равна

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du+O\left(\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}\right). \qquad (1)$$

2. Пусть $q_n(\alpha)$ означает знаменатель n-ой проходящей дроби числа α. Мера Лебега множества тех $\alpha \in (0, 1)$, для которых

$$\frac{\ln q_n(\alpha) - na}{\sqrt{n}} < x$$

$a = \ln\gamma$, γ — константа Хинчина, равна (1) при $n \to \infty$.

Эти теоремы являются усилением известных результатов Р. Форте, М. Каца, М. Р. Минеева, И. А. Ибрагимова. В их доказательстве используется теория суммирования слабо зависимых случайных величин.

ОЦЕНКА ОТСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДИСКРЕТНОГО ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

В. ЛЮТИКАС

Дискретным процессом восстановления называем последовательность $\{x_i\}$ независимых, неотрицательных, одинаково распределенных решетчатых случайных величин, представляющих собой время действия последовательно заменяемых элементов. Во избежании тривиальных случаев определим, что $x_i \neq 0$ с вероятностью единица.

В дискретном случае процесса восстановления основой многих теоретических выводов является уравнение восстановления

$$a_n = b_n + \sum_{j=0}^{n} a_j p_{n-j}, \tag{1}$$

где a_n — среднее число элемемтов, заменяемых в момент времени n, b_n — среднее число элементов, действовавших от начала процесса, заменяемых впервые в момент времени n, p_k — вероятность того, что вновь поставленный элемент будет действовать k единиц времени.

В. Феллером доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{B(1)}{\mu}$, где $B(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ и $\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kp_k$ — математическое ожидание времени действия элементов.

Возникает вопрос определения скорости приближения a_n к $\frac{B(1)}{\mu}$. К решению этой проблемы применяется метод А. Гельфонда, предложенный в его статье „Оценка отстаточного члена в предельной теореме рекуррентных событий".

Пусть $A(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $B(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ и $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ — соответствующие функции. Тогда из (1) получаем

$$A(z) = \frac{B(z)}{1 - P(z)}. \tag{2}$$

Пусть $u(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} S_k z^k$, где $S_k = \sum\limits_{m \geqslant k+1} p_m$. Тогда

$$A(z) = \sum_{k=0}^{N} \frac{B(z)\,[\mu - u(z)]^k}{(1-z)\,\mu^{k+1}} + \frac{B(z)\,[\mu - u(z)]^{N+1}}{(1-z)\,\mu^{N+1}\,u(z)} \tag{3}$$

Разлагая правую часть (3) равенства в степенной ряд, при $N=1$ получаем

$$a_n = \frac{B(1)}{\mu} - \frac{1}{\mu} \sum_{j \geqslant n+1} b_j + \frac{1}{\mu^2} \sum_{j=0}^{n} b_j \Big(\sum_{k \geqslant n+1-j} S_k \Big) + R_n(1),$$

где, при обозначении

$$\frac{\mu-u(r)}{1-z}=\nu(z),\quad R_n(1)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|<1}\frac{B(z)(1-z)\nu^2(z)}{\mu^2 u(z)}\cdot\frac{dz}{z^{n+1}}.$$

ν-кратным интегрированием по частьям получаем оценку $R_n(1)$ и тем самым полное доказательство следующей теоремы.

Пусть $\nu\geqslant 1$ — такое целое число, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}k^{\nu}p_k$ сходится. Тогда

$$a_n=\frac{B(1)}{\mu}-\frac{1}{\mu}\sum_{j\geqslant n+1}b_j+\frac{1}{\mu^2}\sum_{j=0}^{n}b_j\Big(\sum_{k\geqslant n-j+1}S_k\Big)+0\left(\frac{\ln n}{n^{\nu}}\right).$$

ОБ ИНВАРИАНТНОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ПУНКТОРОВ

С. МАЗИЛЯУСКАЙТЕ

Допустимые преобразования пространства центральных пункторов W_n имеют вид [1]:

$$x^{i'}=x^{i'}(x^{i}),$$

$$u^{i'}=\frac{\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}u^{i}}{-\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{\partial\ln\det\left\|\dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r}}\right\|}{\partial x^{j}}u^{j}+1}.$$

При помощи дифференциально-геометрического объекта $(\Gamma^{i}_{jk},\ C^{i}_{jk},\ \Gamma_{ij},\ C_{ij})$, т. е. полного объекта центро-проективной связности, построен дифференциальный оператор D, который отображает пункторное поле на поле проективно-релятивных тензорных пфаффовых форм. Если вектор $C^{i}=C^{i}_{jk}u^{j}u^{k}\neq 0$, то к дифференциальному оператору D инвариантным образом присоединяется гомоморфное отображение пространства дифференциалов на пространство тензорных пфаффовых форм

$$H:(dx^{i},\ du^{i})\to\Theta^{i},$$

$$\Theta^{i}=A^{i}_{j}dx^{j}+B^{i}_{j}du^{j},$$

$$A^{i}_{j}=\frac{\partial C^{i}}{\partial x^{j}}+C^{k}\Gamma^{i}_{kj},\quad B^{i}_{j}=\frac{\partial C^{i}}{\partial u^{j}}+C^{k}C^{i}_{kj}.$$

Построен инвариантный дифференциальный оператор для дифференцирования тензорных полей произвольной валентности. Получены инвариантные производные первого и второго рода, тождества Риччи и тензоры кривизны.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Близникас. О некоторых многообразиях опорных элементов, Лит. мат. сб. 1963, т. 3, № 2, 231—232.

О НЕРАЗЛОЖИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ГРУППЫ ТИПА $(p,\ p)$

А. МАТУЛЯУСКАС

Пусть G — элементарная абелева группа типа $(p,\ p)$ (p — простое число), Z — кольцо целых рациональных чисел, R — поле рациональных чисел.

Теорема. *Если число классов идеалов поля $R(\sqrt[p]{1})$ равно 1, то каждое Z-представление Γ группы G, все рациональные компоненты которого принадлежат какой-нибудь системе из трех R — неприводимых представлений этой группы, разлагается на конечное число неразложимых Z-представлений.*

Дается полное описание всех неразложимых Z-компонент представления Γ.

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

А. МИШКЕЛЯВИЧЮС

В работе изучается сходимость рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, \tag{B}$$

где показатели λ_n удовлетворяют условиям

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty, \tag{1}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \arg(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=\alpha; \ \underline{\lim_{n\to\infty}} \arg(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=-\alpha, \tag{2}$$

$$0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

При этих условиях доказывается аналог теоремы Абеля: если ряд $|B|$сходится в точке $z=z_0$, то он сходится в угле $V: |\arg(z-z_0)|<\frac{\pi}{2}-\alpha$, причём равномерно во всяком угле, лежащем внутри угла V с общей вершиной в точке z_0.

Дальше выводятся формулы граничных кривых областей сходимости и абсолютной сходимости. Доказывается, что область сходимости ряда $|B|$ выпуклая, изучается вопрос единственности суммы ряда $|B|$.

ОБ ОДНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

И. МОЦКУС

Пусть $U(x)$ есть однозначная функция, ограниченная в D. Величину $U=U(x)$ будем называть стоимостью объекта.

При этом

$$x=(x_i), \quad i=1, \ 2, \dots, l,$$

где x_i — независимые переменные, определяющие состояние рассматриваемого объекта,

D — пространство, являющееся l-мерным интервалом

$$d_{i0}\leqslant x_i\leqslant d_{i1}.$$

Пусть в пространстве D фиксированы области D_{i1}, D_{i0}, где $i=1, 2, \dots, l$; $j=0, 1$, образованные разбиением D плоскостями

$$x_i=\frac{d_{i1}+d_{i0}}{2}.$$

Испытанием области D_{ij} назовем вычисление $U(x)$ при случайном задании $x\in D_i$ по закону равной вероятности.

Пусть нам представлена возможность выполнить заданное число n испытаний в одну из областей D_{ij}.

Через μ_z обозначим математическое ожидание нижнего выборочного значения Z_n величины U в выборке из n испытаний.

Будем считать, что, решая вопрос о размещений данных n испытаний, предпочтение следует отдавать области с наименьшим значением величины μ_z. Это представляется вполне естественным, если рассмотрению подлежит большое число объектов, а потери, вызванные отклонением от минимума стоимости, пропорциональны величине этих отклонений. Аналогичное положение имеет место, например, при решений вопроса о наилучшем выборе заданного числа подлежащих рассмотрению вариантов в проектировании сложных объектов.

Величины μ_z, соответствующие различным областям D_{ij}, не известны.

Для отыскания подходящих оценок для этих величин дополнительно предусматривается некоторое число «разведывательных» испытаний, называемых пробными.

Для удобства вычислений в каждую из областей D_{ij} размещается одинаковое число m равномерно распределенных пробных испытаний. Предположим, что вероятностные функции величины U, а следовательно и значения μ_z в области D_{ij} заданы с точностью до конечного числа параметров. Тогда нахождение асимптотически эффективных оценок для μ_z в ряде случаев может быть сведено к отысканию соответствующих оценок для этих параметров.

Ошибкой назовем решение разместить n испытания в некоторой области, например D_{i1}, если в самом деле предпочтение следует отдавать другой области, например D_{i0}.

Предположим, что потери, возникающие в результате указанных ошибок, пропорциональны абсолютному значению разности μ_z в областях D_{i1} и D_{i0}.

Предположим также существование априорного распределения вероятностей величины μ_z. Это предположение имеет очевидный смысл, так как рассмотрению подлежит большое число разных объектов с различными неизвестными нам значениями μ_z. Будем считать, что априорное распределение вероятностей удовлетворяет некоторым условиям. Стоимостью ошибок назовем наименьшее значение математического ожидания потерь, возникающих при размещении имеющихся в распоряжении n испытаний в одной из областей D_{ij} на основании результатов некоторого числа m пробных испытаний.

В рассматриваемом случае стоимость ошибок есть убывающая функция от числа пробных испытаний m. Стоимость разведки будем считать пропорциональной числу пробных испытаний. Стоимостью решения назовем сумму стоимости ошибки и стоимости разведки.

Оптимальной назовем последовательную процедуру, минимизирующую стоимость решения.

Рассматривается случай, когда закон распределения величины U логарифмически нормален. Дается последовательная процедура статистических решений. Эта процедура приближается к оптимальной с увеличением числа пробных испытаний m.

Близкая задача рассматривалась в литературе, в предположении, что минимальное значение U в каждой области D_{ij} известно, что в реальных ситуациях бывает редко.

ПОВЕДЕНИЕ ГОЛОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ В КРУГЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ МОДУЛЯ

А. НАГЯЛЕ

В работе изучается голоморфная в круге $|z|<1$ функция $f(z)$ в окрестности точек максимума ζ ее модуля $M(r, f)$ на концентрических окружностях $|z|=r$. Доказываются следующие предложения.

Теорема 1. *Вне некоторого множества интервалов E на интервале $0<r<1$ с $\int\limits_E \frac{dx}{1-x}<\infty$ имеет место неравенство*

$$|D^j \ln f(\zeta)| < \frac{\tilde{C} K(r)^{2\delta+(1-\delta)j-1} \ln^{(1+\alpha)[\gamma(j-2)+1]} K(r)}{(1-r)^{j-1}}, \quad \alpha>0,\ 0\leqslant\gamma\leqslant 1,\ 0\leqslant\delta<1,$$

$$\tilde{C}=\mathrm{const},\ j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Теорема 2. а) *Вне множества E, указанного в теореме 1 при условии*

$$\varliminf_{r\to 1} \frac{\ln K(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} = \beta > 1, \quad K(r) = \frac{rM'(r, f)}{M(r, f)}$$

и б) на некоторой последовательности точек ζ_j с $|\zeta_j| \to 1$ при

$$\varlimsup_{r\to 1} \frac{\ln K(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} = \beta' > 1.$$

Справедливо предельное соотношение

$$\lim_{r\to 1} \frac{\zeta^n f^{(n)}(\zeta)}{K^n(r) f(\zeta)} = 1; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Сформулированная теорема уточняет теорему Ж. Валирона* и получена средствами, основанными на новой идее, предложенной доц. Ш. Стрелицом, а также пользуясь найденным нами следующим предложением:

Лемма. *Пусть $u(x) > 0$ неубывающая и непрерывная справа на интервале $0 < x < 1$ функция и $\lim\limits_{x\to 1} u(x) = \infty$. Пусть, далее, $\varphi(t) > 0$ — убывающая и непрерывная на полуоси $t > 0$ функция, причем*

$$\int_{t_0}^{\infty} \varphi(t)\, dt < \infty.$$

Тогда, вне некоторого множества интервалов E интервала $0 < x < 1$, справедливо неравенство

$$u\left\{ xe^{(1-x)\varphi(u)} \right\} - u(x) < 1$$

при

$$\int_E \frac{dx}{1-x} < \infty.$$

Это предложение переносит теорему Р. Неванлинна**, обобщающую известную лемму Э. Бореля, сформулированную для функций возрастающих на луче, на монотонные функции на конечном отрезке.

ОГИБАЮЩИЕ ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА K^3

Д. ПЕТРУШКЕВИЧУТЕ

При изучении геометрии однородного пространства K_7 [1] удалось определить все вполне геодезические семейства пространственных кривых k^3. Тогда имеет смысл рассматривать подмногообразия, огибаемые этими семействами, то есть касающиеся в каждой точке какого либо из этих семейств. При этом ищутся лишь максимальные многообразия, то есть не содержащиеся в многообразиях высшей размерности. Будем обозначать их через $f(*)$, где $*$ — соответствующее вполне геодезическое семейство кривых k^3, описанное в [1]. Найдены следующие подмногообразия:

$f(A_4)$ — определяется с произволом одной функции одного аргумента; это однопараметрическое семейство подмногообразий B_3, касающихся пространственной кривой, касательные которой принадлежат линейному комплексу (касание второго порядка).

$f(B_3)$ — определяется с произволом одной функции одного аргумента это однопараметрическое семейство подмногообразий H_2, касающихся пространственной кри-

* Ж. Валирон. Аналитические функции, 1957.

** R. Nevanlinna. Remarques sur les fonctions monotones, Bul. des Sciences Math., 55, 1931, 140–144.

вой, касательные которой принадлежат линейному комплексу (касание третьего порядка).

Существуют три класса максимальных многообразий $f(C_3)$: одно из них (трёхмерное) совпадает с самим C_3; второе (двухмерное) задаётся с произволом двух функций одного аргумента, и третье (одномерное) — четырёх функций одного аргумента.

$f(E_3)$ — существует с произволом двух функций одного аргумента.

Существуют три класса максимальных многообразий $f(D_3)$: одно из них совпадает с самим семейством D_3, два других задаются соответственно с произволом трёх функций одного аргумента и четырёх функций одного аргумента.

$f(H_2)$ — существует с произволом одной функции одного аргумента; это однопараметрическое семейство конусов, вершины которых лежат на пространственной кривой k, касательные которой принадлежат линейному комплексу. Кривые семейства $f(H_2)$ имеют касание четвёртого порядка с кривой k.

$f(F_2)$ задаётся с произволом одной функции одного аргумента. Геометрически подмногообразие $f(F_2)$ можно описать следующим образом: прямая l_1 [1] описывает конус с вершиной в точке A, семейство кривых k^3 имеет общую касательную l в т. A и пересекает образующие конуса таким образом, что касательные, проведённые в точках пересечения с ними вдоль одной образующей, пересекаются в одной точке A. Если мы переходим от одной образующей к другой, то точка пересечения касательных A описывает плоскую кривую.

$f(G_2)$ задаётся с произволом двух функций одного аргумента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Петрушкевичуте. Вполне геодезические многообразия пространства K_7, Литовский математический сборник, т. III, № 2, 1963, 255.

КОНСТРУКТИВНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ $\mathbf{I}_0$ БЕЗ СТРУКТУРНЫХ ПРАВИЛ ВЫВОДА

Р. А. ПЛЮШКЕВИЧУС

Будем пользоваться следующими синтаксическими обозначениями: $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, — произвольные логические формулы (сокращенно: формулы) $\mathfrak{a}'$ — элементарная формула или произвольная формула, начинающаяся знаком $\neg$; $\mathfrak{d}$ — произвольная неэлементарная формула, не начинающаяся знаком $\neg$; Γ, Γ' Γ'' — произвольные формульные цепи; Θ — пустое слово или произвольная формула; $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$ произвольные предметные переменные.

Будем пользоваться также терминологией, например, термином равнообъемные исчисления, и обозначениями работы [1].

Исчисление $\mathbf{I}_0$ задается схемой аксиом

$$\Gamma'\mathfrak{a}\Gamma'' \to \mathfrak{a}$$

и следующими правилами вывода:

$$1.\ \frac{\Gamma\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}}{\Gamma \to (\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b})} \qquad 2а.\ \frac{\Gamma'\Gamma'' \to \mathfrak{a}';\ \Gamma'\mathfrak{b}\Gamma'' \to \Theta}{\Gamma'(\mathfrak{a}' \supset \mathfrak{b})\Gamma'' \to \Theta}$$

$$3.\ \frac{\Gamma \to \mathfrak{a};\ \Gamma \to \mathfrak{b}}{\Gamma \to (\mathfrak{a}\&\mathfrak{b})} \qquad 2б.\ \frac{\Gamma'(\mathfrak{d} \supset \mathfrak{b})\Gamma'' \to \mathfrak{d};\ \Gamma'\mathfrak{b}\Gamma'' \to \Theta}{\Gamma'(\mathfrak{d} \supset \mathfrak{b})\Gamma'' \to \Theta}$$

$$5а.\ \frac{\Gamma \to \mathfrak{b}}{\Gamma \to (\mathfrak{a} \vee \mathfrak{d})} \qquad 4.\ \frac{\Gamma'\mathfrak{a}\mathfrak{b}\Gamma'' \to \Theta}{\Gamma'(\mathfrak{a}\&\mathfrak{b})\Gamma'' \to \Theta}$$

$$5б.\ \frac{\Gamma \to \mathfrak{b}}{\Gamma \to (\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b})} \qquad 6.\ \frac{\Gamma'\mathfrak{a}\Gamma'' \to \Theta;\ \Gamma'\mathfrak{b}\Gamma'' \to \Theta}{\Gamma'(\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b})\Gamma'' \to \Theta}$$

$$7.\ \frac{\Gamma\mathfrak{a} \to}{\Gamma \to \neg\mathfrak{a}} \qquad 8а.\ \frac{\Gamma'\Gamma'' \to \mathfrak{a}}{\Gamma'\neg\mathfrak{a}\Gamma'' \to \Theta} \qquad 8б.\ \frac{\Gamma'\neg\mathfrak{d}\Gamma'' \to \mathfrak{d}}{\Gamma'\neg\mathfrak{d}\Gamma'' \to \Theta}$$

9. $$\frac{\Gamma \to \mathfrak{a} \qquad x \text{ и } y \text{ удовлетворяют условию } (*)}{\Gamma \to \forall x [\mathfrak{a}]^y_x}$$

10. $$\frac{\Gamma' [\mathfrak{a}]^x_z \, \forall x \mathfrak{a} \Gamma'' \to \Theta \qquad x \text{ и } z \text{ удовлетворяют условию } (**)}{\Gamma' \forall x \mathfrak{a} \Gamma'' \to \Theta}$$

11. $$\frac{\Gamma \to [\mathfrak{a}]^x_z \qquad x \text{ и } z \text{ удовлетворяют условию } (**)}{\Gamma \to \exists x \mathfrak{a}}$$

12. $$\frac{\Gamma' \mathfrak{a} \Gamma'' \to \Theta \qquad x \text{ и } y \text{ удовлетворяют условию } (*)}{\Gamma' \exists x [\mathfrak{a}]^y_x \Gamma'' \to \Theta}$$

Условие: (*) x не входит в $\mathfrak{a}$; y входит в выделенное вхождение формулы $\mathfrak{a}$ и притом только свободно, и не входит в другие вхождения формул в посылку.

Условие (**): переменная z свободна для x в $\mathfrak{a}$ (см. § 18 [2]) и либо z является любой из предметных переменных, входящих свободно в S, где S — секвенция, находящаяся под чертой, либо в S нет свободных вхождений предметных переменных и z является любой предметной переменной, не входящей в S.

Имеет место следующая

Теорема. *Исчисление $\mathbf{I}_0$ и конструктивное исчисление Клини G 1 равнообъемны.*

Приведены примеры, показывающие, что в исчислении $\mathbf{I}_0$ (в отличие от конструктивного исчисления Клини $\mathbf{G}$ 3) главные формулы правила вывода (см. § 77 и § 80 книги [2]) фигурируют в посылках лишь тех правил, для которых такое дублирование главной формулы действительно необходимо.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Матулис. Два варианта классического исчисления предикатов без структурных правил вывода. ДАН СССР, **147**, 1029—1031 (1962).
2. С. К. Клини. Введение в метаматематику, М. (1957).

КОНСТРУКТИВНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ $\mathbf{I}_0'$ И ОПИСАНИЕ АЛГОРИФМА ПОИСКА ВЫВОДА ВЫВОДИМЫХ СЕКВЕНЦИЙ

Р. А. ПЛЮШКЕВИЧУС

Введем в рассмотрение исчисление $\mathbf{I}_0'$, более приспособленное для поиска логического вывода, чем исчисление $\mathbf{I}_0$ (см. в [1]). При описании исчисления $\mathbf{I}_0'$, кроме упомянутых в [1], используются следующие синтаксические обозначения: $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{n-1}$ — произвольные формулы, $\mathfrak{a}_n$ — произвольная формула, не имеющая знака $\supset$, в качестве главного, $\mathfrak{d}_1$ — произвольная формула, не начинающаяся знаком $\neg$. Исчисление $\mathbf{I}_0'$ получается из исчисления $\mathbf{I}_0$ присоединением двух новых схем аксиом

$$\Gamma \mathfrak{a} \Gamma' \neg \mathfrak{a} \Gamma'' \to \Theta$$

$$\Gamma \neg \mathfrak{a} \Gamma' \mathfrak{a} \Gamma'' \to \Theta$$

следующего правила вывода:

2c. $$\frac{\Gamma' \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_{n-1} (\mathfrak{a}_n \supset \mathfrak{b}) \Gamma'' \to \mathfrak{a}_n; \quad \Gamma' \mathfrak{b} \Gamma'' \to \mathfrak{d}_1}{\Gamma' \Big(\big(\mathfrak{a}_1 \supset (\mathfrak{a}_2 \supset \ldots \supset (\mathfrak{a}_{n-1} \supset \mathfrak{a}_n) \ldots) \big) \supset \mathfrak{b} \Big) \Gamma'' \to \mathfrak{d}_1},$$

а также следующих обратимых* правил вывода:

2.1a. $$\frac{\Gamma' \big(\mathfrak{a} \supset (\mathfrak{c} \supset \mathfrak{b})\big) \Gamma'' \to \mathfrak{d}_1}{\Gamma' \big((\mathfrak{a} \,\&\, \mathfrak{c}) \supset \mathfrak{b}\big) \Gamma'' \to \mathfrak{d}_1}$$

2.2. $$\frac{\Gamma' (\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}) (\mathfrak{c} \supset \mathfrak{b}) \Gamma'' \to \mathfrak{d}_1}{\Gamma' \big((\mathfrak{a} \vee \mathfrak{c}) \supset \mathfrak{b}\big) \Gamma'' \to \mathfrak{d}_1}$$

2.1б. $$\frac{\Gamma' \big(\mathfrak{c} \supset (\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b})\big) \Gamma'' \to \mathfrak{d}_1}{\Gamma' \big((\mathfrak{a} \,\&\, \mathfrak{c}) \supset \mathfrak{b}\big) \Gamma'' \to \mathfrak{d}_1}$$

2.3. $$\frac{\Gamma' (\neg \mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}) \Gamma'' \to \Theta}{\Gamma' (\neg \neg \neg \mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}) \Gamma'' \to \Theta}$$

---

* Правило вывода называется обратимым, если во всякой его реализации, секвенции, стоящая под чертой, выводима тогда и только тогда, когда выводимы все секвенции, стоящие над чертой.

2.4 $\dfrac{\Gamma'\neg\,\mathfrak{a}\Gamma''\rightarrow;\ \Gamma'\,\mathfrak{b}\Gamma''\rightarrow}{\Gamma'(\mathfrak{a}\supset\mathfrak{b})\,\Gamma''\rightarrow}$

8.1 $\dfrac{\Gamma'\neg\mathfrak{a}\Gamma''\rightarrow\Theta}{\Gamma'\neg\neg\neg\mathfrak{a}\Gamma''\rightarrow\Theta}$

8.2. $\dfrac{\Gamma'\,\mathfrak{a}\Gamma''\rightarrow}{\Gamma'\neg\neg\mathfrak{a}\Gamma''\rightarrow}$

8.3. $\dfrac{\Gamma'\neg\neg\,\mathfrak{a}\neg\mathfrak{b}\Gamma''\rightarrow\Theta}{\Gamma'\neg(\mathfrak{a}\supset\mathfrak{b})\,\Gamma''\rightarrow\Theta}$

8.4. $\dfrac{\Gamma'\,(\mathfrak{a}\supset\neg\neg\,\mathfrak{b})\,\Gamma''\rightarrow\mathfrak{d}_1}{\Gamma'\neg\neg(\mathfrak{a}\supset\mathfrak{b})\,\Gamma''\rightarrow\mathfrak{d}_1}$

8.5. $\dfrac{\Gamma'(\mathfrak{a}\supset\neg\,\mathfrak{b})\,\Gamma''\rightarrow\Theta}{\Gamma'\neg(\mathfrak{a}\&\mathfrak{b})\,\Gamma''\rightarrow\Theta}$

8.6. $\dfrac{\Gamma'\neg\neg\,\mathfrak{a}\,\neg\neg\mathfrak{b}\Gamma''\rightarrow\mathfrak{d}_1}{\Gamma'\neg\neg(\mathfrak{a}\&\mathfrak{b})\,\Gamma''\rightarrow\mathfrak{d}_1}$

8.7. $\dfrac{\Gamma'\neg\,\mathfrak{a}\neg\mathfrak{b}\Gamma''\rightarrow\Theta}{\Gamma'\neg(\mathfrak{a}\vee\mathfrak{b})\,\Gamma''\rightarrow\Theta}$

8.8. $\dfrac{\Gamma'(\neg\mathfrak{a}\supset\neg\neg\,\mathfrak{b})\,\Gamma''\rightarrow\mathfrak{d}_1}{\Gamma'\neg\neg(\mathfrak{a}\vee\mathfrak{b})\,\Gamma''\rightarrow\mathfrak{d}_1}$

8.9. $\dfrac{\Gamma'\,\forall x\neg\,\mathfrak{a}\Gamma''\rightarrow\Theta}{\Gamma'\neg\exists x\mathfrak{a}\Gamma''\rightarrow\Theta}$

8.10. $\dfrac{\Gamma'\neg\forall x\neg\,\mathfrak{a}\Gamma''\rightarrow\mathfrak{d}_1}{\Gamma'\neg\neg\exists x\mathfrak{a}\Gamma''\rightarrow\mathfrak{d}_1}$

8. 11. $\dfrac{\Gamma'\,\forall x\neg\,\mathfrak{a}\Gamma''\rightarrow\Theta}{\Gamma'\neg\neg\,\forall x\neg\,\mathfrak{a}\Gamma''\rightarrow\Theta}$

Имеет место следующая

Теорема. *Исчисления* $\mathbf{I}_0$ *и* $\mathbf{I}'_0$ *равнообъемны.*

Кроме изложенных выше, обратимыми правилами вывода являются следующие правила вывода исчисления $\mathbf{I}'_0$: 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12. Правила 2 (а, б, с) и 8 оказываются обратимыми в тех случаях, когда Θ пустое слово. В связи с правилом 2 (а, б, с) отметим, что если выводимо заключение, то выводима и правая посылка.

Общая схема алгорифма поиска вывода выводимых секвенций для конструктивного исчисления предикатов, построенного на основе исчисления $\mathbf{I}'_0$ следующая.

Начиная от данной секвенции S (1), применяем обратимые правила исчисления $\mathbf{I}'_0$, рассматривая их снизу вверх, как переход от заключения к посылкам, причем правило 10 применяем в последнюю очередь. Далее, если можно, применяем теорему Р. Гарона [2] относительно секвенций $\Gamma\rightarrow(\mathfrak{a}\vee\mathfrak{b})$ и $\Gamma\rightarrow\exists x\mathfrak{a}$ (в этих случаях правила 5 и 11 можно применять как обратимые).

После каждого применения правила следует проверка, не получен ли вывод секвенции S. Если получен, то алгорифм кончает работу и выдает вывод секвенции S.

Если пункт (1) не применим, то переходим к пункту (2). Применяем необратимое правило, рассматривая его снизу вверх, как переход от заключения к посылкам, и переходим к пункту (1).

Если пункты (1) и (2) не применимы, т. е. нельзя применить (в указанном выше смысле) никакого правила исчисления $\mathbf{I}'_0$ и не получен вывод секвенции S, то рассматриваемая секвенция S не выводима.

Для любой выводимой секвенции S алгорифм работу заканчивает и выдает вывод секвенции S. Если рассматриваемая секвенция S не выводима, то может оказаться, что процесс применения алгорифма закончится и выявит невыводимость секвенции S, но, так как разрешающий алгорифм для чистого исчисления предикатов отсутствует, может оказаться, что алгорифм будет работать бесконечно.

Если все формулы, входящие в рассматриваемую секвенцию, образованы только при помощи знаков $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, то описанный алгорифм превращается в разрешающую процедуру для выводимости в конструктивном исчислении высказываний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. А. Плюшкевичус (Первая заметка).
2. R. Haarop, Concerning formulas of the types A → BVC, A → (Ex) B (x) in intuitionistic formal systems, The Journal of symbolic logic, vol. 25 (1960), p.p. 27–32.
3. В. А. Матулис. Два варианта классического исчисления предикатов без структурных правил вывода, ДАН СССР, 147, 1029–1031 (1962).
4. С. К. Клини. Введение в метаматематику, М. (1957).

О СЕКУЩЕЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ КОРРЕЛЯТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. РАЧЕНЕ

Пусть в $(n-1)$-мерном точечном проективном пространстве задан подвижной тетраэдр $\{A_i\}$ $(i, j, k=1, 2, \ldots, n)$, где

$$dA_i=\omega_i^j A_j, \quad D\omega_i^j=[\omega_i^k \omega_k^j].$$

Система дифференциальных уравнений

$$\omega_p^\alpha=0, \quad d\rho+\omega_\alpha^\alpha-\frac{n-m}{m}\omega_p^p=0 \tag{1}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma=m+1, \ldots, n, \quad p, q, r=1, 2, \ldots, m)$$

вполне интегрируема и первые интегралы определяют элемент, образованный плоскости $(A_1 \ldots A_m)$ и класса корреляций

$$e^{2\rho}\left|\det \| u_{ij} \|\right|=\left\{\left|\det \| u_{pq} \|\right|\right\}^{\frac{n}{m}}, \tag{2}$$

где u_{ij} — компоненты линейного геометрического объекта. Этот элемент назовём коррелятивным элементом. Понятие коррелятивного элемента в случае $n=4$, $m=2$ введено К. Гринцевичюсом [1].

Если константы первых интегралов системы (1) являются переменными параметрами, то коррелятивный элемент описывает $\left(m(n-m)+1\right)$-мерное расслоённое пространство, где базой является $m(n-m)$-мерное многообразие $(m-1)$-мерных плоскостей $(n-1)$-мерного пространства, а слоем — одномерное многообразие классов коррелятивных элементов.

Секущая гиперповерхность в этом расслоённом пространстве определяется уравнениями

$$d\rho+\omega_\alpha^\alpha-\frac{n-m}{m}\omega_p^p=\lambda_\alpha^p\omega_p^\alpha,$$

$$\left[d\lambda_\alpha^p+\lambda_\alpha^q\omega_q^p-\lambda_\beta^p\omega_\alpha^\beta-\frac{n}{m}\omega_\alpha^p, \omega_p^\alpha\right]=0,$$

где λ_α^p образуют фундаментальный геометрический объект первого порядка секущей гиперповерхности и определяют $(n-m-1)$-мерную плоскость

$$x^p+\frac{m}{n}\lambda_\alpha^p x^\alpha=0. \tag{3}$$

Эта плоскость определяется полярным соответствием

$$a_{pq}x^p y^q+\frac{m}{n}a_{pq}\lambda_\alpha^q(x^p y^\alpha+x^\alpha y^p)+a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta=0, \tag{4}$$

т. е. пара плоскостей (3) и $(A_1, \ldots, A_m)$ принадлежат соответствию (4) при любых a_{pq}, $a_{\alpha\beta}$.

Соответствия (4) являются теми полярными соответствиями, которые принадлежат классу (2) и всем классам секущей поверхности первого порядка.

В дифференциальной окрестности второго порядка возникает соответствие между двумя точками $T^\alpha A_\alpha$, $\tilde{T}^\alpha A_\alpha$ плоскости (3), точкой $t^p A_p$ и $(m-2)$-мерной плоскостью $a_p x^p=x^\alpha=0$ плоскости $(A_1 \ldots A_m)$.

Это соответствие, при $\lambda_\alpha^p=0$, определяется уравнением

$$t^p=\lambda_{\alpha\beta}^{pq}a_q\tilde{T}^\alpha T^\beta, \tag{5}$$

где $\lambda_{\alpha\beta}^{pq}$ — компоненты фундаментального геометрического объекта второго порядка. Найдена геометрическая интерпретация уравнений (5). Из соответствия (5) следуют некоторые частные соответствия.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. И. Гринцевичюс. О коррелятивных элементах, Литовский математический сборник, т. III, № 2, 248–249, 1963.
2. Г. Ф. Лаптев. Геометрия погруженных многообразий. Труды Московского матем. об-ва, 1952, т. II, 275–381.

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ПРОГОНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. П. САПАГОВАС

Для системы нелинейных разностных уравнений

$$a_{i-1} u_{i-1}-(a_{i-1}+a_i) u_i+a_i u_{i+1}=f_i,$$
$$u_0=\alpha,\ u_N=\beta \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1), \tag{1}$$

которая возникает при решении краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения

$$\left(a(y')\,y'\right)'=F(x,\ y,\ y'), \qquad a<x<b,$$
$$y(a)=\alpha,\ y(b)=\beta \tag{2}$$

методом конечных разностей, рассматривается итерационный процесс решения:

$$a_{i-1}^{(n)} u_{i-1}^{(n+1)}-(a_{i-1}^{(n)}+a_i^{(n)})\,u_i^{(n+1)}+a_i^{(n)} u_{i+1}^{(n+1)}=f_i^{(n)},$$
$$u_0^{(n+1)}=\alpha,\ u_N^{(n+1)}=\beta \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{3}$$

где

$$a_i^{(n)}=a(v_i^{(n)}),\ f_i^{(n)}=h^2 F\left(x_i,\ u_i^{(n)},\ \frac{u_{i+1}^{(n)}-u_{i-1}^{(n)}}{2h}\right),\ v_i^{(n)}=\frac{u_{i+1}^{(n)}-u_i^{(n)}}{h}.$$

Предполагается, что для всех $i=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$ и $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

$$1\leqslant m\leqslant a(v_i^{(n)})\leqslant M<\infty,\quad 0\leqslant m'\leqslant\frac{da(v_i^{(n)})}{dv_i^{(n)}}\leqslant M'<\infty,$$

$$|F|\leqslant L_0,\ |F(x,\ y_1,\ z_1)-F(x,\ y_2,\ z_2)|\leqslant L_1|y_1-y_2|+L_2|z_1-z_2|.$$

Очередное приближение $u_i^{(n+1)}$ при известном $u_i^{(n)}$ находится путём решения системы линейных алгебраических уравнений (3) методом прогонки [1] по формулам:

$$u_i^{(n+1)}=p_i^{(n)} u_{i+1}^{(n+1)}+q_i^{(n)},\ (i=N-1,\ N-2,\ \ldots,\ 2,\ 1), \tag{4}$$

где

$$p_i^{(n)}=\frac{a_i^{(n)}}{a_i^{(n)}+a_{i-1}^{(n)}(1-p_{i-1}^{(n)})},\ q_i^{(n)}=\frac{a_{i-1}^{(n)} q_{i-1}^{(n)}-f_i^{(n)}}{a_i^{(n)}+a_{i-1}^{(n)}(1-p_{i-1}^{(n)})},\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1)$$

$$p_0^{(n)}=0,\ q_0^{(n)}=\alpha. \tag{5}$$

Доказательство сходимости итерационного процесса (3) проводится методами функционального анализа, вводя обобщенные расстояния и нормы [2]. При этом необходимые оценки норм конечно-разностного аналога функции Грина и её производной получаются путём выражения элементов обратной матрицы для системы (3) через прогоночные коэффициенты $p_i^{(n)}$, используя формулы (4) и (5).

Пусть

$$\varepsilon_1^{(n)}=\max_{1\leqslant i\leqslant N-1}|u_i-u_i^{(n)}|,\ \varepsilon_2^{(n)}=\max_{0\leqslant i\leqslant N-1}|v_i-v_i^{(n)}|,$$

$$\eta_1=\max_{1\leqslant i\leqslant N-1}|u_i^{(1)}-u_i^{(0)}|,\ \eta_2=\max_{0\leqslant i\leqslant N-1}|v_i^{(1)}-v_i^{(0)}|,$$

$$p_{11}=\frac{ML_1}{8m^2}(b-a)^2,\ P_{21}=\frac{ML_1}{2m^2}(b-a),$$

$$p_{12}=\frac{L_0(b-a)^2}{48}\left(7\frac{M^2M'}{m^4}-\frac{m^2m'}{M^4}\right)+\frac{L_2}{8m}(b-a)^2+\frac{M^2|\beta-\alpha|}{4}\left(\frac{M'}{m^3}-\frac{m'}{M^3}\right),$$

$$p_{22}=\frac{L_0(b-a)}{6}\left(4\frac{M^2M'}{m^4}-\frac{m^2m'}{M^4}\right)+\frac{ML_2}{2m^2}(b-a)+\frac{M^2|\beta-\alpha|}{b-a}\left(\frac{M'}{m^3}-\frac{m'}{M^3}\right),$$

$$\varepsilon^{(n)}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1^{(n)}\\ \varepsilon_2^{(n)}\end{pmatrix},\ \eta=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}p_{11}\,p_{12}\\ p_{21}\,p_{22}\end{pmatrix}.$$

Тогда имеет место следующая

Теорема. Итерационный процесс (3) сходится к решению системы (1), если все собственные значения λ матрицы P по абсолютной величине меньше единицы. Быстрота сходимости оценивается неравенством

$$\varepsilon^{(n)}\leqslant\frac{1}{1-\lambda}P^n\eta. \tag{6}$$

Аналогичная теорема имеет место также без предположения о монотонности функции $a(y')$, только с более грубыми оценками.

Изложенная в данной работе методика доказательства сходимости итерационного процесса переносится на другие системы нелинейных разностных уравнений, связанные с краевыми задачами для более общих квазилинейных дифференциальных уравнений и систем с общими краевыми условиямм.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Шаманский. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ, ч. I, Изд. АН УССР, Киев, 1963.
2. J. Schröder. Mathematische Zeitschrift, 1956, 66, N. 1, 111–117.

ОЦЕНКИ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПОПАДАНИЯ В ИНТЕРВАЛЫ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

П. СУРВИЛА

Рассматривается последовательность частичных сумм $S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ последовательности независимых случайных величин $\{\xi_k\}$ с функциями распределения $F_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, n, \ldots$

Пусть I — интервал на действительной оси, длину которого будем обозначать через $l(I)$.

Исследуются оценки вероятностей попадания частичных сумм S_n в интервалы I_n при различных длинах интервалов.

Делаются следующие предположения:

1. Если взять разложения $F_k(x)=a_k\int_{-\infty}^{x}\rho_k(u)\,du+b_kV_k(x)$, где $a_k\geqslant 0$, $b_k\geqslant 0$ и $a_k+b_k=1$, а $\rho_k(x)$ — плотность распределения, $V_k(x)$ — функция распределения, необязательно имеющая только сингулярную и чисто ступенчатую компоненты, с $\sup_x \rho_k(x)=\overline{C}_k<\infty$, то существуют конечные дисперсии $\overline{\sigma}_k^2$ распределений с плотностями $\rho_k(x)$ и $\overline{\sigma}_k^2\overline{C}_k^2\leqslant M<\infty$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\overline{\sigma}_k^2\right)^{-1}\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}a_k^{-2}{}_k=0.$

Обозначим через $B_n^2=\sum_{k=1}^{n}a_k\overline{\sigma}_k^2$, $\overline{F}_n(x)=P\{S_n<x\}$.

Доказываются следующие утверждения:

если выполнены условия 1 и 2, то верны следующие оценки для $P\{S_n \in I_n\}$:

а) $P\{S_n \in I_n\} \leqslant C_1 B_n^{-(1-p)}$, когда $l(I_n) \leqslant B_n^p$ для $0<p<1$,

б) $P\{S_n \in I_n\} \leqslant \varepsilon\left(C_2 + \lambda(\varepsilon_1 B_n)\right)$, когда $l(I_n) \leqslant \varepsilon B_n$, где $\lambda(\varepsilon_1 B_n) \to 0$ при $n \to \infty$,

в) $P\{S_n \in I_n\} \leqslant C_3 B_n^{-1}$, когда $l(I_n) \leqslant N$ (N — постоянная),

г) $\max\limits_a P\{S_n = a\} \leqslant C_3 B_n^{-1}$.

Константы C_1, C_2, C_3 не зависят от n.

Если случайные величины последовательности имеют конечные дисперсии σ_k^2 и существует постоянное число $\alpha > 0$, такое что, начиная с некоторого n_0,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \bar{\sigma}_k^2 \geqslant \alpha \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \qquad \text{при } n \geqslant n_0,$$

тогда можно брать $B_n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k^2$.

Кратко наметим доказательство.

Если $\varphi_n(t)$ и $\vartheta_n(x)$ функции, удовлетворяющие условиям:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(t)|\, dt < \infty$ и $|\varphi_n(t)| \leqslant 1$,

2. $\vartheta_n(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi_n(t)\, dt$,

3. $\vartheta_n(x) \geqslant 0$,

то можно написать $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \vartheta_n(x)\, dF_n(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) f_n(t)\, dt$, где $f_n(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\bar{F}_n(x)$. Следовательно, будет иметь место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_n(x)\, dF_n(x) \geqslant \min_{x \in I_n} \vartheta_n(x)\, P\{S_n \in I_n\},$$

откуда легко получаем для вероятности попадания S_n в интервал I_n следующую оценку:

$$P\{S_n \in I_n\} \leqslant \frac{1}{\min\limits_{x \in I_n} \vartheta_n(x)} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(t)|\, |f_n(t)|\, dt.$$

Доказательство сводится к оценке последнего интеграла при соответствующем подборе функций $\varphi_n(t)$ и $\vartheta_n(x)$.

МАЖОРАНТЫ ДЛЯ МОДУЛЕЙ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Ш. И. СТРЕЛИЦ

Рассматриваются решения вида

$$u = z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} f(z_1, z_2), \tag{1}$$

где λ_1, λ_2 — постоянные числа, а $f(z_1, z_2)$ — целая трансцендентная функция, уравнения

$$F\left(z_1 z_2,\, u,\, z_1 \frac{\frac{\partial u}{\partial z_1}}{u},\, z_2 \frac{\frac{\partial u}{\partial z_2}}{u},\, \ldots,\, z_1^{i_1} z_2^{i_2} \frac{\frac{\partial^{i_1+i_2} u}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}}}{u}\right) = 0, \tag{2}$$

где F — полином относительно всех своих переменных. Для модуля функции $f(z_1, z_2)$ любого решения вида (1) уравнения (2), испытывающего соответствующим образом определенную „эллиптичность“ в некоторой области D комплексного пространства C^2, можно построить мажоранту в соответствующей D области, общую для всех решений вида (1). Если „эллиптичность" имеет место только в одной точке, то удается получить верхнюю грань для порядков роста функций $f(z_1, z_2)$ решений вида (1) уравнения (2), причем верхняя грань в наших условиях — число конечное. В частных случаях уравнений вида (2) можно построить конечное число пар функций $\{\mu_j^{(1)}(r), \mu_j^{(2)}(r)\}$, $j=1, 2, \ldots, m$ со свойством

$$0<A\leqslant\frac{\mu_j^{(1)}(r)}{\mu_j^{(2)}(r)}\leqslant B<\infty;\ r=(r_1, r_2),\ A,\ B=\mathrm{const},\ j=1, 2, \ldots, m$$

таких, что для функции $f(z_1, z_2)$ произвольного решения (1) уравнения (2) найдется такая пара функций $\mu_i^{(1)}(r_1, r_2)$, $\mu_i^{(2)}(r_1, r_2)$, что в определенной области

$$\mu_i^{(1)}(r_1, r_2)\leqslant \max_{\substack{|z_1|=r_1,\\ |z_2|=r_2.}} |f(z_1, z_2)|\leqslant\mu_i^{(2)}(r_1, r_2).$$

Это, например, всегда возможно сделать для всех r_1, $r_2\geqslant\delta>0$ ($\delta>0$ — число произвольное) в случае уравнения

$$\sum_{j=0}^{n} Q_j(z_1, z_2)\sum_{p_1+p_2=j} a_{p_1p_2} z_1^{p_1} z_2^{p_2}\frac{\partial^{p_1+p_2}u}{\partial z_1^{p_1}\partial z_2^{p_2}}=0;\ a_{p_1p_2}\equiv\mathrm{const}, \tag{3}$$

где $Q_j(z_1, z_2)$ — полиномы, если все однородные формы

$$H_j=\sum_{p_1+p_2=j}\alpha_{p_1p_2}\alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2};\ j=1, 2, \ldots, n$$

не обращаются в нуль на прямой $\alpha_1+\alpha_2=1$ при $\alpha_1\geqslant 0$ и $\alpha_2\geqslant 0$. Нами доказано, что если $Q_n\equiv\mathrm{const}$ и не все $Q_j(z_1, z_2)\equiv\mathrm{const}$ при $j<n$, то уравнение (3) имеет бесконечное множество линейно независимых решений вида (1) (при условии необращения в нуль формы H_n).

Отметим, что все изложенное здесь с очевидными видоизменениями имеет место в случае любого конечного числа независимых переменных.

О ПРЕДЕЛЬНО ТОЧНЫХ ШАУДЕРОВСКИХ ОЦЕНКАХ

Л. СТУПЯЛИС

О. А. Ладыженская предложила мне решить следующую задачу: получить предельно точные Шаудеровские оценки для задач Дирихле и Неймана для уравнения $\Delta u=f$.

Введем некоторые обозначения.

Пусть Ω — некоторая ограниченная область в E_3; ее границу обозначим через S. Через $C_l(\Omega)$ $[C_l(\overline{\Omega})]$ будем обозначать классы функций, имеющих непрерывные производные до порядка $l\geqslant 0$ включительно в Ω $[\overline{\Omega}]$. Для каждой функции f из $C_l(\Omega)$ определим псевдонормы

$$[f]_j=[f]_j^{\Omega}=\sup_{\Omega, j}\left|\frac{\partial^j f}{\partial x^{j_1}\partial y^{j_2}\partial z^{j_3}}\right|$$

и норму

$$|f|_l=|f|_l^{\Omega}\sum_{j=0}^{l}[f]_j.$$

Подкласс всех функций из $C_l(\overline{\Omega})$, производные которых порядка l равномерно удовлетворяют условию Гельдера с показателем α, $0<\alpha<1$, будем обозначать через $C_{l+\alpha}(\Omega)$. Для функций $f\in C_{l+\alpha}(\Omega)$ определим псевдонорму

$$[f]_{l+\alpha}=\sup_{\substack{\Omega, l\\ m_0\neq m_1}}\frac{\left|\dfrac{\partial^l f(m_0)}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}\partial z^{l_3}}-\dfrac{\partial^l f(m_1)}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}\partial z^{l_3}}\right|}{|m_0-m_1|^{\alpha}}$$

и норму

$$|f|_{l+\alpha}=|f|_l+[f]_{l+\alpha}.$$

Пусть S — поверхность типа Ляпунова. Уравнение части поверхности S внутри сферы Ляпунова с центром в m_0 в местной системе координат имеет вид

$$\zeta=F(\xi, \eta).$$

Будем говорить, что поверхность S принадлежит классу C_k, если $F(\xi, \eta)$ имеет непрерывные производные до порядка $k\geqslant 0$ включительно. Подкласс всех поверхностей из C_k, для которых $F(\xi, \eta)$ производные порядка k равномерно по ξ, η, и m_0 удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α, $0<\alpha<1$, будем обозначать через $C_{k+\alpha}$. Через $V[\mu]$ и $W[\mu]$ обозначаются, соответственно, потенциалы простого и двойного слоя с плотностью μ. Значения $W[\mu]$ на S — через $\overline{W}[\mu]$. Буквой C всегда обозначаются постоянные, зависящие только от поверхности S. Через Ω_i будем обозначать области, не содержащие бесконечно удаленной точки, и через Ω_l — области, которые дополняют Ω_i до полного пространства.

Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. *Если* $\mu\in C_\alpha(S)$ *и* $S\in C_{1+\alpha}$, *то* $W[\mu]\in C_\alpha(\Omega_i)$ $\left(C_\alpha(\Omega_e)\right)$ *и имеет место неравенство*

$$|W|_\alpha^{\Omega_i(\Omega_e)}\leqslant C_1|\mu|_\alpha^S.$$

Теорема 2. *Если* $\mu\in C_\alpha(S)$ *и* $S\in C_{1+\alpha}$, *то*

$$V[\mu]\in C_{1+\alpha}(\Omega_i) \qquad \left(C_{1+\alpha}(\Omega_e)\right)$$

и выполняется неравенство

$$|V|_{1+\alpha}^{\Omega_i(\Omega_e)}\leqslant C_2|\mu|_\alpha^S.$$

Теорема 3. *Если* $S\in C_{2+\alpha}$ *и* $\mu\in C_\alpha(S)$, *то* $\overline{W}[\mu]\in C_{1+\alpha}(S)$ *и*

$$|\overline{W}|_{1+\alpha}\leqslant C_3|\mu|_\alpha.$$

Теорема 4. *Если* $S\in C_{2+\alpha}$, $\mu\in C_\alpha(S)$, *то* $\dfrac{dV[\mu]}{dn}\in C_{1+\alpha}(S)$ *и*

$$\left|\frac{dV[\mu]}{dn}\right|_{1+\alpha}\leqslant C_4|\mu|_\alpha.$$

Из них выводится основная теорема:

Теорема 5. *Если* $S\in C_{2+\alpha}$, $f\in C_\alpha(\Omega_i)$, $\varphi\in C_{2+\alpha}(S)$, $\psi\in C_{1+\alpha}(S)$, *то решение уравнения*

$$\Delta u=f \tag{1}$$

при условиях либо $u|_s=\varphi$, (2)

$$\text{либо } \frac{du}{dn}\Big|_s=\psi \tag{3}$$

(*предполагается, что выполнено равенство* $\int\limits_{\Omega_i} f d\tau=\int\limits_S \psi d\sigma$) *принадлежит классу* $C_{2+\alpha}(\Omega_i)$ *и удовлетворяет неравенствам*

$$|u|_{2+\alpha}^{\Omega_i}\leqslant C_5|\varphi|_{2+\alpha}^S+C_6|f|_\alpha^{\Omega_i},$$

или

$$|u|_{2+\alpha}^{\Omega_i}\leqslant C_7|\psi|_{1+\alpha}^S+C_8|f|_\alpha^{\Omega_i}.$$

О СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Л. СТУПЯЛИС

Пусть в трехмерном пространстве мы имеем две ограниченные области Ω_1 и Ω_2, которые имеют общую часть границы; обозначим ее через S_2. Всю границу области Ω_1 будем обозначать через S_{I}, а области Ω_2 — через S_{II}; $S_1=S_{\mathrm{I}}\backslash S_2$, $S_3=S_{\mathrm{II}}\backslash S_2$. Считаем, что S_{I}, $S_{\mathrm{II}}\in C_{2+\alpha}$.

Соответственно через Q_1 и Q_2 будем обозначать цилиндрические области $\Omega_1\times[0\leqslant t\leqslant l]$ и $\Omega_2\times[0\leqslant t\leqslant l]$.

Пусть задана разрывная функция:

$$\zeta(P,\ t)=\begin{cases}0, & \text{при } (P,\ t)\in Q_1\\ 1, & \text{при } (P,\ t)\in Q_2.\end{cases}$$

Для уравнения

$$\zeta\ \frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u-k^2 u=0 \tag{1}$$

ставится следующая краевая задача: найти функцию $u(P,\ t)$, имеющую непрерывные вторые производные по $x,\ y,\ z$ в Q_1, и Q_2 и непрерывную первую производную по t в Q_2, удовлетворяющую в Q_1, Q_2 и при $t=0$ в Ω_1 уравнению (1), начальному условию

$$u|_{t=0}=0 \qquad \text{при } P\in\Omega_2, \tag{2}$$

граничным условиям

$$u|_{S_1}=f_1(P_1,\ t),\ u|_{S_2}=f_2(P_2,\ t) \text{ при } t\in[0,\ l], \tag{3}$$

и условиям сопряжения

$$[u]_{S_2}=0,\ \text{при } t\in[0,\ l]$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{S_2}=0. \tag{4}$$

Кроме того, выполнены условия согласования $f_1(P_1,\ 0)=f_2(P_2,\ 0)=0$. Предполагается, что параметр k^2 является собственным числом внутренней задачи Дирихле для области Ω_1, т. е. задача

$$\Delta u+k^2 u=0 \qquad u_i/S_1=0$$

имеет не нулевые решения в области Ω_1.

Теорема. *Если* $\dfrac{\partial f_1(P_1,\ t)}{\partial t}\in C_\alpha(S_1\times[0\leqslant t\leqslant l])$ *и* $\dfrac{\partial f_2(P_2,\ t)}{\partial t}\in C_\alpha(S_2\times[0\leqslant t\leqslant l])$, *то задача* (1)—(4) *имеет единственное решение.*

При доказательстве существования решения используется классический метод сведения решения этой задачи к решению системы интегральных уравнений. Последняя сводится к системе интегральных уравнений Вольтерра.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ПОЛЯ

И. УРБЯЛИС

Пусть $x>3$, $n\geqslant 2$ (n — целое число), K — алгебраическое поле n-той степени; $\mathfrak{m}$ — целый идеал поля K, $\mathfrak{m}\neq 0$; α, ν — целые идеальные числа поля K, $(\nu,\ \mathfrak{m})=1$, $\nu\neq 0$; $h(\mathfrak{m})$ — порядок группы классов вычетов $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$ в узком смысле; $e(\mathfrak{m})$ — индекс подгруппы единиц $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$ относительно группы единиц поля K; $N(\alpha)$—норма числа α; w_j', w_j'' ($j=1,\ \ldots,\ n-1$) — вещественные числа; $w_j(\alpha)$ ($j=1,\ \ldots,\ n-1$) — амплитуды производящих характеров Гекке первого рода $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$.

Число простых неассоциированных $\operatorname{mod}\ \mathfrak{m}$ идеальных чисел π поля K, удовлетворяющих условиям

$$0<|N(\pi)|\leqslant x,\ \pi\equiv\nu\ (\operatorname{mod}\mathfrak{m}),\ \pi\nu^{-1}\succ 0,$$

$$0\leqslant w_j'\leqslant\{w_j(\pi)\}<w_j''\leqslant 1 \qquad (j=1,\ \ldots,\ n-1),$$

выражается формулой

$$Q(x,\ \mathfrak{m},\ \nu)=\frac{e(\mathfrak{m})}{h(\mathfrak{m})}\prod_{j=1}^{n-1}(w_j''-w_j')\int_2^x\frac{du}{\ln u}+O\left(x\exp\left(-c\ln^{\frac{7}{12}}x\,(\ln\ln x)^{-\frac{5}{12}}\right)\right),$$

где c положительная постоянная.

ОБ ОДНОМ МЕТОДИЧЕСКОМ ПОСОБИИ, ОПИСАННОМ В СТАРИННОЙ РУКОПИСИ ВИЛЬНЮССКОЙ АКАДЕМИИ

Б. ХМЕЛЕВСКИЙ

1. В начале 17-го столетия в различных странах изобретаются математические приборы, целью которых является упрощение процесса измерения и вычисления. Одним из первых таких приборов является изобретенный Галлилеем пропорциональный циркуль, описанный им в 1606 г. В шестидесятых годах 17-го столетия видоизмененные пропорциональные циркули появляются в Германии. Они снабжены функциональными шкалами и в сущности представляют собой подвижные номограммы. Примером таких пропорциональных циркулей является «Полиметр», описанный в 1672 году профессором Зальцбургского университета Готфридом Бемом.

2. В старинной Вильнюсской академии в 1763 году профессором математики Росиньолем был написан учебник плоской тригонометрии под заглавием „Trigonometria dictata Vilnae", оставшийся в рукописи. В приложении к этому сочинению, озаглавленному «О пропорциональном циркуле» („De circino proportionis"), Росиньоль описывает устройство и применение пропорционального циркуля с функциональными шкалами.

3. В настоящем докладе демонстрируется модель этого циркуля и показываются некоторые его применения к решению задач школьного типа. По замечанию Росиньоля, всякий, знакомый с элементами математики, может сам изобретать различные шкалы и применять их к решению многочисленных задач. С методической точки зрения описываемый прибор является интересным и полезным пособием, которое ученики средней школы могут самостоятельно изготовлять и применять к решению задач различных типов. Этим стимулируется математическое творчество школьников и наглядно показывается практическая применимость даже самых простых теорем школьного курса.