V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1965

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА ЦЕНТРАЛЬНЫХ КОПУНКТОРОВ

В. И. БЛИЗНИКАС

Симметрические пространства аффинной связности без кручения были подробно изучены Э. Картаном [3], а с кручением – П. К. Рашевским [4]. Различные вопросы геометрии симметрических пространств подробно освещены в монографии [5].

В этой заметке рассматриваются симметрические пространства центральных копункторов [1].

§ 1. Канонический объект центро-проективной связности. Топологическое произведение n-мерного дифференцируемого многообразия и пространства значений копунктора называется пространством центральных копункторов W_n^*. Допустимые преобразования координат центрального копунктора (x^i, u_i) имеют вид:

$$x^{i'} = x^{i'}(x^i),$$

$$u_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} u_i - \frac{1}{n+1} \frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^{i'}} \tag{1}$$

$$(i, j, k = 1, 2, \ldots, n; \ \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, r).$$

В работе автора [2] было доказано, что на многообразии W_n^* можно определить операции инвариантного дифференцирования для копункторных и для векторных полей при помощи полного объекта центро-проективной связности Γ_{jk}^i, Γ_{ij}, C_j^{ik}, C_j^i. Если ограничиться только операцией инвариантного дифференцирования для тензорных величин, то такую операцию можно определить при помощи объекта полной усеченной аффинной связности $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$, $\tilde{C}_k^{ij}$ и объекта линейной дифференциально-геометрической связности E_j^i, E_{ij}, законы преобразования компонент которых имеют вид [2]:

$$E_{j'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} E_j^i, \tag{2}$$

$$E_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \left\{ E_{ij} + \left[\left(u_p - \frac{\partial \ln \det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|^{-\frac{1}{n+1}}}{\partial x^p} \right) \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^p}{\partial x^{p'} \partial x^{q'}} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \frac{\partial x^{q'}}{\partial x^q} - \frac{\partial^2 \ln \det \left\| \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|^{-\frac{1}{n+1}}}{\partial x^j \partial x^q} \right] E_i^q \right\}, \tag{3}$$

$$\tilde{C}^{i'j'}_{k'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j}}\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\tilde{C}^{ij}_{k},\tag{4}$$

$$\tilde{\Gamma}^{i'}_{j'\,k'}=\frac{\partial^2 x^{i}}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\tilde{\Gamma}^{i}_{jk}.\tag{5}$$

Приведем различные тензоры кручения и кривизны этого пространства.

Тензоры кручения пространства W_n^*:

1. Первый тензор кручения $\tilde{C}^{ij}_{k}$, причем

$$R^{ij}_{k}=\tilde{C}^{[ij]}_{k}.$$

2. Второй тензор кручения

$$R^{i}_{jk}=\tilde{\Gamma}^{i}_{[jk]}.\tag{6}$$

Тензоры дополнительной кривизны пространства W_n^*:

1. Первый тензор дополнительной кривизны

$$R_{ikr}=2\left(\frac{\partial\tilde{E}_{i\,[k}}{\partial x^{r]}}-\tilde{E}_{s[k}\frac{\partial E_{|i|r]}}{\partial u_s}\right).\tag{7}$$

2. Первый картанов тензор дополнительной кривизны

$$K_{ikr}=E^{s}_{i}R_{skr}.\tag{8}$$

3. Второй тензор дополнительной кривизны

$$\mathfrak{S}^{kr}_{i}=2\tilde{E}^{[r}_{l}\frac{\partial\tilde{E}^{k]}_{i}}{\partial u_l}.\tag{9}$$

4. Второй картанов тензор дополнительной кривизны

$$S^{kr}_{i}=E^{l}_{i}\mathfrak{S}^{kr}_{l}-2R^{kr}_{i}.\tag{10}$$

5. Третий простейший тензор дополнительной кривизны

$$L^{i}_{jk}=\frac{\partial\tilde{E}_{jk}}{\partial u_i}-\tilde{\Gamma}^{i}_{jk}.\tag{11}$$

6. Третий тензор дополнительной кривизны

$$Q^{i}_{jk}=\nabla_k\tilde{E}^{i}_{j}-\tilde{E}^{i}_{s}L^{s}_{jk}.\tag{12}$$

7. Третий картанов тензор дополнительной кривизны

$$P^{i}_{jk}=E^{l}_{j}Q^{i}_{lk},\tag{13}$$

где

$$E^{i}_{j}\tilde{E}^{j}_{k}=\delta^{i}_{k},\quad E^{i}_{j}\tilde{E}^{k}_{i}=\delta^{k}_{j}\tag{14}$$

и

$$E_{ij}=E^{k}_{i}\tilde{E}_{kj},\quad C^{ik}_{j}=\tilde{E}^{k}_{p}\tilde{C}^{ip}_{j}.\tag{15}$$

Тензоры кривизны пространства W_n^*:

1. Первый тензор кривизны

$$R^{i}_{jkr}=2\left(\frac{\partial\tilde{\Gamma}^{i}_{j\,[k}}{\partial x^{r]}}-\tilde{\Gamma}^{s}_{j\,[k}\tilde{\Gamma}^{i}_{|s|r]}+\tilde{E}_{s\,[k}\frac{\partial\Gamma^{i}_{|j|r]}}{\partial u_s}\right).\tag{16}$$

2. Первый картанов тензор кривизны

$$K^{i}_{jkr}=R^{i}_{jkr}-C^{is}_{j}R_{skr}.\tag{17}$$

3. Второй тензор кривизны

$$\mathfrak{S}^{jkr}_{i}=2\left(\frac{\partial\tilde{C}^{j\,[k}_{i}}{\partial u_l}\tilde{E}^{r]}_{l}+\tilde{C}^{l\,[k}_{i}\tilde{C}^{|j|r]}_{l}\right).\tag{18}$$

4. Второй картанов тензор кривизны

$$S^{jkr}_{i}=\mathfrak{S}^{jkr}_{i}-C^{jl}_{i}\mathfrak{S}^{kr}_{l}.\tag{19}$$

5. Третий простейший тензор кривизны

$$L^{ik}_{jr}=\frac{\partial\tilde{\Gamma}^i_{jr}}{\partial u_k}. \tag{20}$$

6. Третий тензор кривизны

$$Q^{ik}_{jr}=\nabla_r\tilde{C}^{ik}_j-\tilde{E}^k_l\frac{\partial\tilde{\Gamma}^i_{jr}}{\partial u_l}. \tag{21}$$

7. Третий картанов тензор кривизны

$$P^{ik}_{jr}=Q^{ik}_{jr}-C^{il}_j Q^k_{lr}. \tag{22}$$

Оказывается, что первый тензор дополнительной кривизны пространства W^*_n совпадает с первым картановым тензором дополнительной кривизны тогда и только тогда, когда $E^i_j=\delta^i_j$. Если объект линейной дифференциально-геометрической связности $\tilde{E}_{ij}$ пространства W^*_n рассматривается как подобъект полного объекта центро-проективной связности, то $E^i_j=\delta^i_j$ тогда и только тогда, когда (см. [2], стр. 464):

$$C^i_j+u_k C^{ki}_j=0.$$

В этом случае второй тензор дополнительной кривизны $\mathfrak{S}^{kr}_i$, как это следует из (9), равен нулю и

$$S^{ij}_k=-2R^{ij}_k,$$
$$P^i_{jk}=Q^i_{jk}=-L^i_{jk},$$
$$\tilde{E}_{ij}=E_{ij},\quad \tilde{C}^{ij}_k=C^{ij}_k,\quad S^{ijk}_p=\mathfrak{S}^{ijk}_p.$$

Так как L^i_{jk} — тензор, то величины $\frac{\partial E_{jk}}{\partial u_i}$ преобразуются так как компоненты объекта $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$. Если третий простейший тензор дополнительной кривизны L^i_{jk} пространства W^*_n равен нулю, то такой специальный объект центро-проективной связности будем называть каноническим объектом центро-проективной связности. Таким образом, полный объект центро-проективной связности является каноническим, если

$$E^i_j=\delta^i_j,\ \tilde{\Gamma}^i_{jk}=\frac{\partial E_{jk}}{\partial u_i}.$$

В этом случае

$$\begin{gathered}K_{ijk}=R_{ijk},\quad \mathfrak{S}^{ij}_k=0,\quad S^{ij}_k=-2R^{ij}_k,\\ L^i_{jk}=0,\quad Q^i_{jk}=0,\quad P^i_{jk}=0,\\ S^{ijk}_p=\mathfrak{S}^{ijk}_p,\quad P^{ij}_{kp}=Q^{ij}_{kp}.\end{gathered} \tag{24}$$

Если тензоры кручения C^{ij}_k, R^i_{jk}, первый картанов тензор дополнительной кривизны K_{ijk} и картановые тензоры кривизны K^i_{jkp}, S^{ijk}_p и P^{ij}_{kp} канонической центро-проективной связности являются инвариантно постоянными, то и все остальные тензоры дополнительной кривизны и кривизны являются инвариантно постоянными.

Если считать переменные x^i первыми интегралами вполне интегрируемой системы $\omega^i=0$, то структурные уравнения пространства W^*_n с канонической центро-проективной связностью можно записать в виде [2]:

$$\begin{gathered}D\omega^i-[\omega^k,\ \omega^i_k]=\Omega^i,\\ D\omega^i_j-[\omega^k_j,\ \omega^i_k]=\Omega^i_j,\\ D\Theta_i+[\Theta_k,\ \omega^k_i]=\Omega_i,\end{gathered} \tag{24}$$

где

$$\Omega^i = -R^i_{pq}[\omega^p, \omega^q] - C^{iq}_p[\omega^p, \Theta_q],$$

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2} K^i_{jpq}[\omega^p, \omega^q] + P^{iq}_{jp}[\omega^p, \Theta_q] + \frac{1}{2} S^{ipq}_j[\Theta_p, \Theta_q], \tag{25}$$

$$\Omega_i = -\frac{1}{2} K_{ipq}[\omega^p, \omega^q] - \frac{1}{2} S^{pq}_i[\Theta_p, \Theta_q]$$

и

$$\Theta_i = du_i - E_{ij}\omega^j.$$

Следует заметить, что величины R^i_{pq}, C^{iq}_p, K^i_{jpq}, P^{iq}_{jp}, S^{ipq}_j, K_{ipq} и S^{pq}_i при $\omega^i = dx^i$ имеют такой же вид, как и раньше, и поэтому мы их будем называть тензорами кручения и кривизны пространства W^*_n.

§ 2. Симметрическое пространство центральных копункторов. Пространство центральных копункторов с канонической центро-проективной связностью мы будем называть симметрическим, если все тензоры кривизны и кручения имеют равные нулю инвариантные производные (первого и второго рода), т. е.

$$D^* R^i_{pq} = 0, \quad D^* C^{iq}_p = 0, \quad D^* K^i_{jpq} = 0, \quad D^* P^{iq}_{jp} = 0, \quad D^* S^{ipq}_j = 0, \quad D^* K_{ipq} = 0, \tag{26}$$

где D^* — символ неголономного инвариантного дифференцирования пространства W^*_n и при $\omega^i = dx^i$ совпадает с инвариантным дифференциальным оператором (для дифференцирования тензорных величин), определенном в работе [2].

Центральный копунктор и n линейно независимых векторов будем называть локальным репером пространства W^*_n. Множество локальных реперов пространства W^*_n зависит от $n(n+2)$ параметров. Если в пространстве W^*_n произвольно выбран репер, то в нем компоненты всех тензоров кручения и кривизны имеют определенные численные значения. Будем понимать под допустимыми реперами те реперы, в которых компоненты упомянутых тензоров имеют одни и те же численные значения. Для любого центрального копунктора пространства W^*_n существует по крайней мере один допустимый репер, так как при параллельном перенесении исходного репера, соответствующего центральному копунктору (x^i_0, u^0_i), по любой кривой пространства W^*_n (имеется в виду однопараметрическое семейство центральных копункторов) численные значения компонент тензоров кручения и кривизны не меняются (по определению симметрического пространства). Мы будем предполагать, что пространство W^*_n односвязно, т. е., что любые два центральных копунктора из данной окрестности можно связать гладкой кривой пространства W^*_n. Кроме того, мы будем рассматривать только такие допустимые реперы, которые можно связать с исходным репером непрерывной последовательностью допустимых реперов.

Если $(e_1, \ldots, e_n)$ — допустимая система линейно независимых векторов, соответствующая центральному копунктору (x^i_0, u^0_i), то все остальные допустимые системы векторов получаются из данной при помощи линейных преобразований

$$e'_i = A^k_i e_k, \tag{27}$$

при которых компоненты тензоров кручения и кривизны не меняют своих численных значений. Таким образом элементы матрицы $\|A^i_j\|$ связаны условиями:

$$
\begin{aligned}
R^i_{pq} &= \tilde{A}^i_s A^t_p A^r_q R^s_{tr},\\
C^{iq}_p &= \tilde{A}^i_s \tilde{A}^q_r A^t_p C^{sr}_t,\\
K^i_{jpq} &= \tilde{A}^i_s A^r_j A^t_p A^v_q K^s_{rtv},\\
P^{iq}_{jp} &= \tilde{A}^i_s \tilde{A}^q_t A^r_j A^v_p P^{st}_{rv},\\
S^{ipq}_j &= \tilde{A}^i_s \tilde{A}^p_r \tilde{A}^q_t A^v_j S^{srt}_v,\\
K_{ipq} &= A^s_i A^r_p A^t_q K_{srt},
\end{aligned}
\tag{28}
$$

где $\|\tilde{A}^i_j\|$ — обратная матрица матрицы $\|A^i_j\|$*). Совокупность всех невырожденных матриц $\|A^i_j\|$, элементы которых являются решением алгебраической системы (28), образует группу, которую назовем группой изотропии H пространства центральных копункторов W^*_n с канонической центро-проективной связностью. Так как группа H является подгруппой группы Ли $GL(n)$, то она тоже является группой Ли. Пусть r — число параметров группы изотропии, $\|a^i_{j\alpha}\|$ — линейно независимые матрицы, соответствующие инфинитезимальным преобразованиям группы H и $C^\alpha_{\beta\gamma}$ — структурные константы группы H, т. е. имеют место следующие тождества:

$$
a^k_{j\alpha} a^i_{k\beta} - a^k_{j\beta} a^i_{k\alpha} = c^\gamma_{\alpha\beta} a^i_{j\gamma}. \tag{29}
$$

Рассмотрим матрицу $\|\omega^i_j\|$, которая определяет инфинитезимальное преобразование допустимых векторов репера следующим образом:

$$
de_i = \omega^j_i e_j.
$$

Так как это инфинитезимальное преобразование должно принадлежать множеству инфинитезимальных преобразований группы H, то матрицы $\|\omega^i_j\|$ являются линейными комбинациями матриц $\|a^i_{j\alpha}\|$:

$$
\omega^i_j = a^i_{j\alpha} \varphi^\alpha, \tag{30}
$$

где φ^α — линейно независимые пфаффовые формы.

§ 3. Группа изоморфии. На основании равенств (30) и структурных уравнений (24) мы можем определить структуру форм φ^α, ω^i и Θ_i. Считая, что внешние дифференциалы форм φ^α, ω^i и Θ_i разлагаются только по этим формам, выполнив вычисления, мы получим:

$$
\begin{aligned}
D\varphi^\alpha &= C^\alpha_{\beta\gamma}[\varphi^\beta, \varphi^\gamma] + A^\alpha_{pq}[\omega^p, \omega^q] + B^{\alpha pq}[\Theta_p, \Theta_q] + C^{\alpha q}_p[\omega^p, \Theta_q],\\
D\omega^i &= a^i_{k\alpha}[\omega^k, \varphi^\alpha] - R^i_{pq}[\omega^p, \omega^q] + C^{iq}_p[\Theta_q, \omega^p],\\
D\Theta_i &= -a^k_{i\alpha}[\Theta_k, \varphi^\alpha] - \frac{1}{2} K_{ipq}[\omega^p, \omega^q] - \frac{1}{2} S^{pq}_i[\Theta_p, \Theta_q],
\end{aligned}
\tag{31}
$$

где

$$
\begin{aligned}
K^i_{jpq} &= 2a^i_{j\alpha} A^\alpha_{pq},\\
S^{ipq}_j &= 2a^i_{j\alpha} B^{\alpha pq},\\
P^{iq}_{jp} &= a^i_{j\alpha} C^{\alpha q}_p.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Очевидно, что величины A^α_{pq}, $B^{\alpha pq}$ и $C^{\alpha q}_p$ являются постоянными и кососимметрическими по тем же индексам как и величины K^i_{jpq}, S^{ipq}_j и P^{iq}_{jp}.

---

*) Одна система уравнений пропущена, ибо $S^{pq}_i = -2C^{[pq]}_i$.

Таким образом, в $2n+r$-мерном связном многообразии допустимых реперов, присоединенном к симметрическому пространству W_n^*, заданы $2n+r$ линейно независимых пфаффовых форм φ^α, ω^i и Θ_i, связанных структурными уравнениями с постоянными коэффициентами. Эти формы определяют некоторую просто транзитивную группу Ли со структурными константами $C^\alpha_{\beta\gamma}$, A^α_{pq}, $B^{\alpha pq}$, $C^{\alpha q}_p$, $a^i_{k\alpha}$, R^i_{pq}, C^{iq}_p и K_{ipq}. Полученную группу Ли будем называть группой изоморфии G симметрического пространства W_n^*, ибо ее можно рассматривать как группу преобразований в себе многообразия допустимых реперов, сохраняющую формы φ^α, ω^i и Θ_i инвариантными.

Так как опорный центральный копунктор симметрического пространства W_n^* можно задавать совокупностью допустимых реперов, присоединенных к этому центральному копунктору, то такая совокупность реперов представляет собою в $2n+r$-мерном многообразии всех допустимых реперов r-мерную интегральную поверхность пфаффовой системы дифференциальных уравнений

$$\omega^i=0, \quad \Theta_i=0.$$

В силу инвариантности форм ω^i и Θ_i эта интегральная поверхность всегда преобразуется в интегральную поверхность. Отсюда следует, что преобразование группы изоморфии G индуцирует преобразование центральных копункторов в симметрическом пространстве W_n^*, ибо инвариантность форм W следует из инвариантности форм φ^α (величины $a^i_{j\alpha}$ являются постоянными). Оказывается, что группа, преобразующая центральные копункторы симметрического пространства W_n^*, индуцирует группу изоморфии в многообразии допустимых реперов, так как из инвариантности форм ω^i, Θ_i и ω^i_j следует инвариантность форм φ^α. Отсюда следует, что группа изоморфии G всегда изоморфна группе движений симметрического пространства W_n^*.

§ 4. Алгебраические зависимости между структурными константами группы изоморфии. Если X_i, X^i и X_α базисные операторы группы изоморфии G, соответствующие инвариантным формам ω^i, Θ_i и φ^α этой группы, то структурные уравнения Маурера имеют вид

$$[X_\alpha X_\beta]=C^\gamma_{\alpha\beta}X_\gamma, \tag{33}$$

$$[X^i X^j]=B^{\alpha ij}X_\alpha-\frac{1}{2}S^{ij}_k X^k, \tag{34}$$

$$[X_\alpha X^i]=a^i_{k\alpha}X^k, \tag{35}$$

$$[X_i X_j]=-R^k_{ij}X_k-\frac{1}{2}K_{pij}X^p+A^\alpha_{ij}X_\alpha, \tag{36}$$

$$[X_i X^j]=C^{\alpha j}_i X_\alpha-C^{kj}_i X_k, \tag{37}$$

$$[X_i X_\alpha]=a^k_{i\alpha}X_k. \tag{38}$$

Структурные константы любой группы Ли связаны тождествами Якоби. В нашем случае эти тождества разбиваются на 10 групп, в зависимости от того, какие операторы войдут в тождество.

1. Рассмотрим тождество:

$$\Big[[X_i X_j]\,X_k\Big]+\Big[[X_j X_k]\,X_i\Big]+\Big[[X_k X_i]\,X_j\Big]=0. \tag{39}$$

Пользуясь дважды формулой (36), мы получим

$$\Big[[X_i X_j] X_k\Big] = \left(R^s_{ij} R^p_{sk} - \frac{1}{2} K_{sij} C^{ps}_k - A^\beta_{ij} a^p_{k\beta}\right) X_p + \frac{1}{2} R^s_{ij} K_{psk} X^p +$$
$$+ \left(\frac{1}{2} K_{sij} C^{\alpha s}_k - R^s_{ij} A^\alpha_{sk}\right) X_\alpha.$$

Циклируя по индексам i, j, k и приравнивая нулю коэффициенты при линейно независимых операторах X_p, X^p и X_α, получим

$$R^p_{(ij} R^s_{k)\,p} + \frac{1}{2} K_{p\,(ij} C^{sp}_{k)} + A^\beta_{(ij} a^s_{k)\,\beta} = 0, \tag{40}$$

$$K_{sp\,(k} R^p_{ij)} = 0, \tag{41}$$

$$\frac{1}{2} K_{p\,(ij} C^{\alpha p}_{k)} - A^\alpha_{p\,(k} R^p_{ij)} = 0. \tag{42}$$

2. Если тождество имеет вид

$$\Big[[X_i X_j] X^k\Big] + \Big[[X_j X^k] X_i\Big] + \Big[[X^k X_i] X_j\Big] = 0, \tag{43}$$

то, пользуясь уравнениями Маурера и приравнивая коэффициенты при линейно независимых операторах, мы получим

$$C^{\beta k}_{[i} a^p_{j]\,\beta} + R^p_{q\,[i} C^{qk}_{j]} + \frac{1}{2} R^q_{ij} C^{pk}_q = 0, \tag{44}$$

$$A^\alpha_{q\,[i} C^{qk}_{j]} + R^q_{ij} C^{\alpha k}_q + \frac{1}{4} K_{qij} B^{\alpha q k} = 0, \tag{45}$$

$$A^\beta_{ij} a^k_{p\beta} + K_{pq\,[i} C^{qk}_{j]} + \frac{1}{4} K_{qij} S^{qk}_p = 0. \tag{46}$$

3. Тождество

$$\Big[[X^i X^j] X_k\Big] + \Big[[X^j X_k] X^i\Big] + \Big[[X_k X^i] X^j\Big] = 0 \tag{47}$$

дает следующие соотношения:

$$B^{\beta ij} a^p_{k\beta} - 2C^{q\,[i}_k C^{|p|\,j]}_q + \frac{1}{2} S^{ij}_q C^{pq}_k = 0, \tag{48}$$

$$C^{q\,[i}_k C^{|\alpha|\,j]}_q - \frac{1}{4} S^{ij}_q C^{\alpha q}_k = 0, \tag{49}$$

$$C^{\beta\,[i}_k a^{j]}_{p\beta} = 0. \tag{50}$$

4. Если в тождество Якоби входят три оператора X^i, X^j, X^k, то

$$B^{\alpha q\,(i} S^{jk)}_q = 0, \tag{51}$$

$$B^{\alpha\,(ij} a^{k)}_{p\alpha} - \frac{1}{4} S^{(ij}_q S^{k)\,q}_p = 0. \tag{52}$$

5. Если в тождество Якоби входят три оператора X_α, X_β, X_γ, то получим тождество Якоби для структурных констант группы изотопии H, которая является подгруппой группы изоморфии G $\Big($это следует из структурных уравнений (33)$\Big)$:

$$C^\alpha_{\sigma\,(\beta} C^\sigma_{\gamma\varepsilon)} = 0. \tag{53}$$

6. Тождество

$$\Big[[X_i X_j] X_\alpha\Big] + \Big[[X_j X_\alpha] X_i\Big] + \Big[[X_\alpha X_i] X_j\Big] = 0 \tag{54}$$

дает

$$a^p_{i\alpha} R^k_{pj} + a^p_{j\alpha} R^k_{ip} - a^k_{p\alpha} R^p_{ij} = 0, \tag{55}$$

$$a^q_{p\alpha} K_{qij} + a^q_{i\alpha} K_{pqj} + a^q_{j\alpha} K_{piq} = 0, \tag{56}$$

$$a^p_{i\alpha} A^\beta_{pj} - a^p_{j\alpha} A^\beta_{pi} = C^\beta_{\gamma\alpha} A^\gamma_{ij}. \tag{57}$$

7. Из тождества Якоби для операторов X^i, X^j и X_α следуют соотношения:

$$a^i_{p\alpha} S^{pj}_k + a^j_{p\alpha} S^{ip}_k - a^p_{k\alpha} S^{ij}_p = 0, \tag{58}$$

$$a^i_{p\alpha} B^{\beta pj} - a^j_{p\alpha} B^{\beta pi} = C^\beta_{\alpha\gamma} B^{\gamma ij}. \tag{59}$$

8. Если в тождество Якоби входят операторы X_i, X^j и X_α, то получим

$$a^j_{p\alpha} C^{kp}_i + a^k_{p\alpha} C^{pj}_i - a^p_{i\alpha} C^{kj}_p = 0, \tag{60}$$

$$a^j_{p\alpha} C^{\beta p}_i - C^{\beta j}_p a^p_{i\alpha} = C^\beta_{\alpha\gamma} C^{\gamma j}_i. \tag{61}$$

9. Тождества Якоби

$$\Big[[X_\alpha X_\beta] X_i\Big] + \Big[[X_\beta X_i] X_\alpha\Big] + \Big[[X_i X_\alpha] X_\beta\Big] = 0 \tag{62}$$

и

$$\Big[[X_\alpha X_\beta] X^i\Big] + \Big[[X_\beta X^i] X_\alpha\Big] + \Big[[X^i X_\alpha] X_\beta\Big] = 0 \tag{63}$$

дают одно и то же соотношение (29).

С точки зрения исходного симметрического пространства W^*_n формулы (40)–(42), (44)–(46), (48)–(52) эквивалентны тождествам Бианки этого пространства [2]. Так как инфинитезимальное преобразование группы изотропии H имеет вид

$$\delta^j_i + t a^j_{i\alpha} \qquad (\alpha \text{ фиксированно !}),$$

где t – параметр, то соотношения (55), (56), (58) и (60) выражают тот факт, что при упомянутом преобразовании допустимого репера компоненты тензоров кручения R^i_{jk}, C^{ij}_k и компоненты первого картанова тензора дополнительной кривизны K_{ijp}, а также и тензора $C^{[ij]}_k$, остаются инвариантными. Таким же свойством обладает и тензор кручения симметрического пространства аффинной связности [4].

Из формул (57) и (59) следует, что ковариантные бивекторы A^1_{ij}, A^2_{ij}, ..., A^r_{ij} и контровариантные бивекторы B^{1ij}, B^{2ij}, ..., B^{rij} при инфинитезимальном преобразовании группы изотропии H получают инфинитезимальные приращения в виде линейных комбинаций этих же бивекторов с коэффициентами $c^\gamma_{\alpha\beta}$. Инфинитезимальные приращения каждой из матриц $\|C^{1q}_p\|$, $\|C^{2q}_p\|$, ..., $\|C^{rq}_p\|$, соответствующие инфинитезимальному преобразованию группы изотропии H, как это следует из формулы (61), разлагаются через эти же матрицы с коэффициентами $c^\gamma_{\alpha\beta}$.

Из третьей теоремы Ли – Картана [3] следует, что мы получили алгебраический эквивалент симметрического пространства W^*_n с канонической центро-проективной связностью, ибо структурные константы однозначно определяют просто транзитивную группу G (с точностью до изоморфизма), которую можно принять за группу изоморфии симметрического пространства W^*_n. Группа G имеет две подгруппы: группу изоморфии слоя (операторы X^i и X_α) и группу изотропии (операторы X_α). Тензоры кривизны образуются из структурных констант группы G по формулам (32).

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
12.I.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Близникас, О некоторых многообразиях опорных элементов, Лит. мат. сб., 1963, 3, 231–232.
2. В. И. Близникас, Полный объект центро-проективной связности и объект круче, ния—кривизны пространства центральных копункторов, Лит. мат. сб., 1964, IV, 4 457–475.
3. Э. Картан, Геометрия групп Ли и симметрические пространства, М., ИИЛ, 1949.
4. П. К. Рашевский, Симметрические пространства аффинной связности с кручением. I, Труды сем. по вект. и тензорн. анализу, 1950, вып. 8, 82–92.
5. С. Хелгасон, Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, Изд. „Мир", М., 1964.

SIMETRINĖS CENTRINIŲ KOPUNKTORIŲ ERDVĖS

V. BLIZNIKAS

(*Reziumė*)

Šis straipsnis yra autoriaus [1] ir [2] straipsnių tęsinys. Jame nagrinėjamos specialios centrinių kopunktorių erdvės W_n^*, kurių sukimosi, kreivumo ir papildomo kreivumo tenzoriai yra invariantiškai pastovūs (simetrinės centrinių kopunktorių erdvės). Įrodoma, kad simetrinė erdvė W_n^* yra vienareikšmiškai apibrėžiama izomorfijos grupe G (izomorfinės erdvės ir grupės yra skaitomos ekvivalentiškomis).

DIE SYMMETRISCHEN MANNIGFALTIGKEITEN VON ZENTRALKOPUNKTOREN

V. BLIZNIKAS

(*Zusammenfassung*)

In diesem Artikel, das als Fortsetzung der Artikel [1] und [2] betrachtet werden soll, werden spezielle Mannigfaltigkeiten W_n^* der Zentralkopunktoren untersucht, d.h. solche Mannigfaltigkeiten W_n^*, daren Torsions-, Ergänzungstorsions-, Krümmungs- und Ergänzungskrümmungstensoren invariantisch konstant bleiben (symmetrische Mannigfaltigkeit der Zentralkopunktoren). Wir beweisen, dass die symmetrische Mannigfaltigkeit W_n^* durch die Gruppe G der Isomorphie eindeutig definiert wird (isomorphische Mannigfaltigkeiten und Gruppen werden als identisch betrachtet).