V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1965

УСТОЙЧИВОСТЬ В ИГРАХ С m-КВОТОЙ

О. Н. БОНДАРЕВА

Следуя [1], *кооперативной игрой* n *лиц* Γ будем называть пару $\langle N, v\rangle$, где 1) $N=(1, 2, \ldots, n)$ – множество игроков и 2) $v(B)$ – вещественная характеристическая функция, заданная на некоторой системе подмножеств $\mathfrak{S}=\{B: B\subset N\}$ (считаем всегда $\{i\}\in\mathfrak{S}$). Будем предполагать $v(B)$ нормированной так, что

$$v(\{i\})=0, \qquad i\in N,$$
$$v(B)\geqslant 0, \qquad B\in\mathfrak{S}.$$

Если далее положить $v(S)=0$, $S\subset N$, но $S\notin\mathfrak{S}$, то данное определение перестает отличаться от классического ([3]).

Вместо дележей рассматриваются векторы выигрышей вместе с коалиционной структурой $\mathfrak{B}$

$$(x;\ \mathfrak{B})=(x_1,\ \ldots,\ x_n;\ B_1,\ \ldots,\ B_m):$$

$$B_1\cup\ldots\cup B_m=N;\quad B_i\cap B_j=\Lambda,\quad i\neq j;\quad \sum_{j\in B_i} x_j=v(B_i),\quad i=1,\ \ldots,\ m.$$

В дальнейшем пару $(x;\ \mathfrak{B})$ будем называть *структурой выигрышей.*

Множеством партнеров в $(x;\ \mathfrak{B})$ множества K называется

$$P[K;\ (x;\ \mathfrak{B})]=\bigcup_j\{i\,|\,i\in B_j,\ B_j\cap K\neq\Lambda\}.$$

Структура выигрышей $(x;\ \mathfrak{B})$ называется *коалиционно рациональной,* если $\sum_{i\in B} x_i\geqslant v(B)$ для всех $B\subset B_j$.

Рассмотрим коалиционно-рациональную структуру выигрышей $(x;\ \mathfrak{B})$, и пусть $K\cap L=\Lambda$; $K,\ L\subset B_j$, тогда *угрозой* K *против* L называется коалиционно рациональная структура выигрышей

$$(y,\ \mathfrak{C})=(y_1,\ \ldots,\ y_n;\ C_1,\ \ldots,\ C_p),$$

для которой

$$L\cap P[K;\ (x;\ \mathfrak{B})]=\Lambda,$$
$$y_i>x_i,\quad i\in K,$$
$$y_i\geqslant x_i,\quad i\in P[K;\ (x;\ \mathfrak{B})],$$

и *контругрозой* L *против* K называется коалиционно рациональная структура выигрышей

$$(z,\ \mathfrak{D})=(z_1,\ \ldots,\ z_n;\ D_1,\ \ldots,\ D_q)$$

такая что $K \notin P[L;\ (z,\ \mathfrak{d})]$ и

$$z_i \geqslant x_i, \quad i \in P[L;\ (z,\ \mathfrak{d})],$$
$$z_i \geqslant y_i, \quad i \in P[L;\ (z,\ \mathfrak{d})] \cap P[K;\ (y,\ \mathfrak{L})].$$

Коалиционно рациональная структура выигрышей $(x;\ \mathfrak{L})$ в Γ называется *устойчивой*, если на любую угрозу некоторого множества K против L существует контругроза L против K. Множество M всех устойчивых структур называется *множеством соглашений*; $M \neq \Lambda$, т. к. структура $(0,\ \ldots,\ 0;\ \{1\},\ \ldots,\ \{n\})$ – всегда устойчива.

§ 1. Эффективные коалиции. Коалиция B^* называется *эффективной*, если существует такой вектор выигрышей $\{x_i\}_{i \in B^*}$, что

$$\sum_{i \in B^*} x_i = v(B^*); \quad \sum_{i \in B} x_i \geqslant v(B), \quad B \subset B^*, \quad B \in \mathfrak{S}$$

$(x_i \geqslant 0$, т. к. $\{i\} \in \mathfrak{S})$.

Назовем игрой Γ_{B^*} следующее усечение игры Γ: $N^* = B^*$ и $v^*(B) = v(B)$, $B \subset B^*$, т. е. $\mathfrak{S}^* = B^* \cap \mathfrak{S}$. Очевидно, что необходимым и достаточным условием эффективности B^* является существование ядра в Γ_{B^*}.

Пусть $\Omega = (B_1,\ \ldots,\ B_k)$. Назовем, как и в [4], *покрытием* множества N такой набор вещественных чисел $(\lambda_1 \geqslant 0,\ \ldots,\ \lambda_k \geqslant 0)$, что $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \cdot \overline{B}_j = \overline{N}$, где $\overline{B}_j$ и $\overline{N}$ – характеристические функции соответствующих множеств, т. е.

$$\overline{B}_j = (\delta_{1j},\ \ldots,\ \delta_{nj}),\ \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i \in B_j \\ 0, & i \notin B_j \end{cases}, \quad \overline{N} = (1,\ \ldots,\ 1).$$

Покрытие называется *приведенным*, если векторы $\{\overline{B}_j\}$, соответствующие $\lambda_j > 0$, линейно независимы. Приведенных покрытий конечное число. В [4] показано, что для того, чтобы у Γ существовало ядро, необходимо и достаточно, чтобы для любого приведенного покрытия $(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_k)$ было

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \cdot v(B_j) \leqslant v(N).$$

Теорема 1. *Для того чтобы B^* была эффективной коалицией, необходимо и достаточно, чтобы для любых таких $B_1 \subset B^*,\ \ldots,\ B_l \subset B^*$, что $\overline{B}_1,\ \ldots,\ \overline{B}_l$ линейно независимы и $\sum_{j=1}^{l} \lambda_j \cdot \overline{B}_j = \overline{B}^*$, выполнялось $\sum_{j=1}^{l} \lambda_j \cdot v(B_j) \leqslant$ $\leqslant v(B^*)$.*

Теорема 3.1 из [1] является следствием этой теоремы, т. к если все допустимые множества $B_j \subset B^*$ имеют вид $B^* \setminus \{i\}$, то покрытия B^* могут быть составлены лишь двумя способами: 1) из множеств $B^* \setminus \{i\}$, $i \in B^*$

$$\sum_{i \in B^*} \frac{1}{k-1} \overline{B^* \setminus \{i\}} = \overline{B} \qquad (k = |B^*|),$$

или 2) из множеств $B^* \setminus \{i\}$, $i \in B^*$ и $\{i\}$

$$\overline{B^* \setminus \{i\}} + \overline{\{i\}} = \overline{B}^*;$$

для покрытий первого вида получаем условие

$$\sum_{i\in B} v(B^*\setminus\{i\})\leqslant(k-1)\cdot v(B^*),$$

и для второго – $v(B^*\setminus\{i\})\leqslant v(B^*)$, $i\in B^*$.

§ 2. **m-игры.** Назовем игру Γ *m-игрой*, если допустимыми коалициями в ней являются лишь коалиции, состоящие из одного, m и n игроков.

Набор вещественных чисел $\omega_1, \ldots, \omega_n$ называется в [1] m-квотой, если $v(B)=\sum_{i\in B}\omega_i$ для всех $B:|B|=m$ $\Big($это определение отличается от соответствующего определения Шепли и Кэлиша (см. [3]) тем, что здесь отсутствует требование $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=v(N)\Big)$.

Исследуем теперь устойчивые структуры в m-играх. Заметим, что вообще $(x_1, \ldots, x_n; N)$ может быть устойчивой, только если коалиция N эффективна. Эффективность любых $B_i\neq N$ в m-игре тривиальна, т. к. отличные от одноэлементных подмножества существуют только у N.

Теорема 2. *Если для любых*

$$B_{i_k}\in\mathfrak{S},\qquad \sum_{k=1}^{n} v(B_{i_k})\leqslant mv(N),$$

то N эффективна в т-игре. Для $m=n-1$ эти условия и необходимы.

Теорема следует из теоремы 1, если заметить, что любое приведенное покрытие, содержащее n компонент „покрывает" каждый элемент N не менее, чем m раз. Для покрытий же, содержащих меньше, чем n компонент, необходимо выполнение более слабых условий.

Теорема 3. *Если в т-игре существует т-квота, то в ней существует устойчивая структура вида*

$$(x_1, \ldots, x_n; B, \{i_1\}, \ldots, \{i_k\})\ (x_{i_1}=\ldots=x_{i_k}=0,\ |B|=m).$$

Доказательство. Рассмотрим m-квоту игры и пусть $\omega_1\geqslant\omega_2\geqslant\ldots\geqslant\omega_n$. Положим, $B=\{1, 2, \ldots, m\}$. Рассмотрим отдельно случаи $\omega_m\geqslant 0$ и $\omega_m<0$.

1) $\omega_m\geqslant 0$, т. е. все $\omega_i\geqslant 0$, $i\in B$. Покажем, что в этом случае структура $(\omega_1, \ldots, \omega_m, 0, \ldots, 0;\ B, \{m+1\}, \ldots, \{n\})$ – устойчива. Пусть для некоторых $K\cap L=\Lambda$, $K\cup L\subset B$ существует угроза K против L, т. е. существует такая структура $(y_1, \ldots, y_n;\ C_1, \ldots, C_p)$, что $L\cap P[K;(y, \mathfrak{L})]=\Lambda$ (если обозначить через $\tilde{C}_j$ те C_j, для которых $C_j\cap K\neq\Lambda$, то удобнее вместо $P[K;(y, \mathfrak{L})]$ писать $\cup\tilde{C}_j$

$$\begin{aligned} &y_i>\omega_i, && i\in K,\\ &y_i\geqslant\omega_i, && i\in\cup\tilde{C}_j\cap B,\\ &y_i\geqslant 0, && i\in\cup\tilde{C}_j\setminus B, \end{aligned}$$

$$\sum_{\tilde{C}_j} y_i=\sum_{\tilde{C}}\omega_i,\quad \text{т. е.}\quad \sum_{\cup\tilde{C}_j} y_i=\sum_{\cup\tilde{C}_j}\omega_i.$$

Перенумеруем игроков в $\cup \tilde{C}_j$ следующим образом: пусть $i_1, \ldots, i_l \in K$. Для остальных имеем $\sum\limits_{\cup \tilde{C}_j \setminus K} y_i < \sum\limits_{\cup \tilde{C}_j \setminus K} \omega_i$, далее а) если все $y_i < \omega_i$, то перенумеруем их произвольно, б) если существует $i: y_i > \omega_i$, то назовем его i_{l+1}, а для остальных игроков получим $\sum y_i < \sum \omega_i$; продолжая этот процесс, построим последовательность $i_1, \ldots, i_q$, обладающую свойством

$$\sum_{k=r}^{q} y_{i_k} < \sum_{k=r}^{q} \omega_{i_k}, \qquad r > 1. \tag{$*$}$$

Положим

$$D = L \cup \{i_q\} \cup \{i_{q-1}\} \cup \ldots \cup \{i_{q-|L|+1}\},$$

так как $|L| < m (L \subset B \cup C)$, то $q - |L| + 1 > 1$ и $K \notin D$.

Покажем теперь, что L имеет против K контругрозу вида

$$(z, \mathfrak{b}) = (z_1, \ldots, z_n; D, \{i_{k_1}\}, \ldots, \{i_{k_{n-m}}\}).$$

Действительно, чтобы $(z, \mathfrak{b})$ была контругрозой, необходимо и достаточно выполнение условий

$$z_i \geqslant \omega_i, \quad i \in L,$$
$$z_i \geqslant y_i, \quad i \in D \setminus L \quad (D \setminus L = D \cap \cup \tilde{C}_j),$$
$$\sum_{i \in D} z_i = \sum_{i \in D} \omega_i.$$

Для разрешимости этой системы в свою очередь необходимо и достаточно выполнение условий $\sum\limits_{i \in D \setminus L} y_i \leqslant \sum\limits_{i \in D \setminus L} \omega_i$, которые следуют из ($*$) по построению D.

2) $\omega_m < 0$, пусть $\omega_1, \ldots, \omega_k \geqslant 0$, $\omega_{k+1} < 0$. Положим

$$\Delta = \left| \sum_{i=k+1}^{m} \omega_i \right| \quad \text{и} \quad S = \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Покажем, что структура выигрышей

$$(\omega_1 - \varepsilon_i \Delta, \ldots, \omega_k - \varepsilon_k \Delta, 0, \ldots, 0; B, \{m+1\}, \ldots, \{n\})$$

устойчива $\left(\varepsilon_i \geqslant 0, \sum\limits_{i=1}^{k} \varepsilon_i = 1, \varepsilon_i \Delta \leqslant \omega_i\right.$, можно взять, например, $\varepsilon_i = \dfrac{\omega_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} \omega_i}$, так как $\Delta \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} \omega_i$, то $\left.\varepsilon_i \Delta \leqslant \omega_i\right)$.

Докажем, что никакое множество $K \subset B$ не может иметь угрозы против какого бы то ни было L.

Для существования угрозы K против L необходимо существование такой структуры $(y_1, \ldots, y_n; C, \{i_1\}, \ldots, \{i_{n-m}\})$, (из определения m-квоты, $m > \frac{n}{2}$ в данном случае, поэтому все структуры выигрышей имеют такой вид), что

$$y_i > \omega_i - \varepsilon_i \Delta, \quad i \in (S \cap C) \cap K,$$
$$y_i \geqslant \omega_i - \varepsilon_i \Delta, \quad i \in (S \cap C) \setminus K,$$
$$y_i \geqslant 0, \quad i \in C \setminus S,$$
$$\sum_{i \in C} y_i = \sum_{i \in C} \omega_i.$$

Для разрешимости этих неравенств необходимо, чтобы

$$\sum_{S\cap C} (\omega_i - \varepsilon_i \Delta) < \sum_{C} \omega_i.$$

Заметим, что

$$-\Delta = \sum_{i=k+1}^{m} \omega_i \geqslant \sum_{C\setminus S} \omega_i,$$

так как $|C\setminus S| \geqslant m-k$ ($|C|=m$ и $|S|=k$), все $\omega_i \geqslant \omega_j$, $i>j$ и $\omega_i \leqslant 0$, $i \notin S$. Итак,

$$\sum_{i\in S\cap C} \omega_i - \Delta \sum_{i\in S\cap C} \varepsilon_i \geqslant \sum_{i\in S\cap C} \omega_i - \Delta \geqslant \sum_{i\in S\cap C} \omega_i + \sum_{i\in C\setminus S} \omega_i = \sum_{C} \omega_i,$$

т. е. система не имеет решения.

Заметим, что для случая 1) неравенства $\omega_1 \geqslant \ldots \geqslant \omega_n$ не имеют значения, важно только, чтобы $\omega_i \geqslant 0$ для $i \in B$.

Математический институт
Ленинградского Государственного
университета им. А. А. Жданова

Поступило в редакцию
14.I.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Maschler, n-Person Games with only 1, $n-1$ and n-Person Permissible Coalitions, Journal of Math. Analysis and Applications, 6, 230–256, 1963.
2. M. Maschler, Stable Payoff Configuration for Quota Games, Econ. R.P.R.M., 36, 8 December 1961.
3. Р. Д. Льюс, Х. Райфа, Игры и решения, ИЛ, 1961.
4. О. Н. Бондарева, Некоторые применения линейного программирования к теории кооперативных игр, Проблемы кибернетики, № 10, 1963.

STABILUMAS LOŠIMUOSE SU m-KVOTA

O. BONDAREVA

(Reziumė)

Nagrinėjami lošimai, kuriuose netrivialios yra tik m ir n lošėjų koaliacijos, bei lošimai su m-kvota (žr. [1]). Įrodoma, kad tokiems lošimams visada egzistuoja tam tikro pavidalo stabili struktūra. Dalis [1] darbo rezultatų gali būti gauta iš šio straipsnio rezultatų.

STABILITY IN m-QUOTA GAMES

O. N. BONDAREVA

(Summary)

The bargaining set for m-quota games (in the sense of [1]) is discussed. It is shown, that in m-quota game the payoff configuration $(x_1, \ldots, x_n;\ B,\ \{i_1\}, \ldots, \{i_k\})$, $(x_{i_1} = \ldots = x_{i_k} = 0,\ |B| = m)$ is stable. Some results of [1] may be obtained from the results of this paper.