V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS

1965

О ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ МОМЕНТОВ ЧИСЛА ВОССТАНОВЛЕНИЙ В СЛУЧАЕ ДИСКРЕТНОГО ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

В. ЛЮТИКАС

Пусть $\{X_i\}$ – дискретный процесс восстановления, N_r – число восстановлений до момента r включительно. Основным аппаратом нахождения вероятностных характеристик числа N_r являются производящие функции. Кроме других результатов, В. Феллер в 1949 году нашел аналитическое выражение производящих функций моментов первого и второго порядка величины N_r. В. Феллером доказано, что $\mathrm{M}N_r$ и $\mathrm{M}N_r^2$ являются, соответственно, коэффициентами при s^r в выражениях

$$\frac{P(s)}{(1-s)[1-P(s)]} \text{ и } \frac{P^2(s)+P(s)}{(1-s)[1-P(s)]^2},$$

где

$$P(s)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \text{ и } p_k=P\{X_i=k\}$$

– распределение вероятностей случайных величин X_i.

В настоящей статье приводится доказательство теоремы, определяющей путь конструирования производящей функции моментов величины N_r любого порядка.

Теорема. *Пусть r – целое число и X_i принимают целочисленные значения, тогда производящая функция моментов m-того порядка величины N_r*

$$G_m(s)=\frac{\sum\limits_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)} P^{m-n}(s)}{(1-s)[1-P(s)]^m},$$

где

$$P(s)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad p_k=P\{X_i=k\}$$

и $a_n^{(m)}$ – постоянные, вычисляемые рекуррентной формулой

$$a_n^{(m)}=(n+1)\,a_n^{(m-1)}+(m-n)\,a_{n-1}^{(m-1)},$$

причем

$$a_0^{(m)}=a_{m-1}^{(m)}=1 \text{ и } a_n^{(m)}=a_{m-n-1}^{(m)}.$$

Доказательство. Известно, что момент m-того порядка величины N_r при условии, что r – целое число и X_i принимает только целочисленные значения, задается формулой

$$\mathrm{M}N_r^m=\sum_{n=1}^{r} n^m P\{N_r=n\}. \tag{1}$$

Также известно, что

$$P\{N_r \geqslant n\} = P\{S_n \leqslant r\},$$

где

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Этому соответствует

$$1 - P\{N_r < n\} = P\{S_n \leqslant r\}$$

и

$$1 - P\{N_r < n+1\} = P\{S_{n+1} \leqslant r\}.$$

Но,

$$P\{N_r < n\} = \sum_{k=0}^{n-1} P\{N_r = k\},$$

$$P\{N_r < n+1\} = \sum_{k=0}^{n} P\{N_r = k\}.$$

Разница последних двух равенств дает

$$P\{N_r = n\} = P\{S_n \leqslant r\} - P\{S_{n+1} \leqslant r\}.$$

Обозначим

$$P\{S_n \leqslant r\} = F_n(r),$$

$$P\{S_{n+1} \leqslant r\} = F_{n+1}(r)$$

и

$$\mathrm{M}N_r^m = q_r^{(m)}.$$

Тогда из (1) получаем

$$q_r^{(m)} = \sum_{n=1}^{r} n^m [F_n(r) - F_{n+1}(r)]. \tag{2}$$

Ясно, что

$$F_{n+1}(r) = \sum_{k=1}^{r} F_n(r-k) \cdot P\{X_{n+1} = k\}$$

и

$$F_{n+2}(r) = \sum_{k=1}^{r} F_{n+1}(r-k) \cdot P\{X_{n+2} = k\}.$$

Но все X_i распределены одинаково, поэтому

$$P\{X_{n+1} = k\} = P\{X_{n+2} = k\} = p_k.$$

Таким образом

$$F_{n+1}(r) = \sum_{k=1}^{r} F_n(r-k)\, p_k,$$

$$F_{n+2}(r) = \sum_{k=1}^{r} F_{n+1}(r-k)\, p_k. \tag{3}$$

По (2) формуле получаем

$$q_{r-k}^{(m)} = \sum_{n=0}^{r-1} n^m [F_n(r-k) - F_{n+1}(r-k)]. \tag{4}$$

Границы суммирования здесь для удобства доказательства берем другие, но это только формальная замена, и она сути дела не меняет.

Умножаем (4) равенство на p_k и суммируем

$$\sum_{k=1}^{r} q_{r-k}^{(m)} p_k = \sum_{n=0}^{r-1} n^m \left[\sum_{k=1}^{r} F_n(r-k) p_k - \sum_{k=1}^{r} F_{n+1}(r-k) p_k \right].$$

Но (3) нам дает

$$\sum_{k=1}^{r} q_{r-k}^{(m)} p_k = \sum_{n=0}^{r-1} n^m [F_{n+1}(r) - F_{n+2}(r)].$$

В последнем равенстве принимаем $n=\lambda-1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{r} q_{r-k}^{(m)} p_k = \sum_{\lambda=1}^{r} (\lambda-1)^m [F_\lambda(r) - F_{\lambda+1}(r)] =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{r} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_m^i \lambda^{m-i} [F_\lambda(r) - F_{\lambda+1}(r)] =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_m^i \sum_{\lambda=1}^{r} \lambda^{m-i} [F_\lambda(r) - F_{\lambda+1}(r)].$$

На основании (2) получаем

$$\sum_{k=1}^{r} q_{r-k}^{(m)} p_k = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_m^i q_r^{(m-i)}. \tag{5}$$

Естественно принять $p_0 = P\{X_i = O\} = 0$. Также $p_k = 0$ для всех $k > r$. Если $\sum_{k=0}^{\infty} q_k^{(m)} s^k = G_m(s)$, то, имея ввиду, что $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, из (5) при соответствующих значениях m получаем производящие функции моментов величины N_r

$G_1(s) = \frac{P(s)}{(1-s)[1-P(s)]}$; (формула впервые получена В. Феллером)

$G_2(s) = \frac{P^2(s)+P(s)}{(1-s)[1-P(s)]^2}$; (формула впервые получена В. Феллером)

$$G_3(s) = \frac{P^3(s)+4P^2(s)+P(s)}{(1-s)[1-P(s)]^3};$$

$$G_4(s) = \frac{P^4(s)+11P^3(s)+11P^2(s)+P(s)}{(1-s)[1-P(s)]^4};$$

$$G_5(s) = \frac{P^5(s)+26P^4(s)+66P^3(s)+26P^2(s)+P(s)}{(1-s)[1-P(s)]^5}.$$

Таким образом, есть основание предполагать, что

$$G_m(s) = \frac{\sum_{n=0}^{m-1} a_n^{(m)} P^{m-n}(s)}{(1-s)[1-P(s)]^m},$$

где $a_n^{(m)}$ — постоянные, вычисляемые рекуррентной формулой

$$a_n^{(m)} = (n+1) a_{n-1}^{(m)} + (m-n) a_{n-1}^{(m-1)},$$

причем

$$a_0^{(m)} = a_{m-1}^{(m)} = 1 \text{ и } a_n^{(m)} = a_{m-n-1}^{(m)}.$$

Пусть

$$G_i(s) = \frac{\sum_{n=0}^{i-1} a_n^{(i)} P^{i-n}(s)}{(1-s)[1-P(s)]^i},$$

где

$$a_n^{(i)} = (n+1) a_n^i + (i-n) a_{n-1}^{(i-1)} \text{ для } i = 1, 2, 3, \ldots m-1. \tag{6}$$

Из (5) получаем

$$G_m(s)=\frac{1}{1-P(s)}\Big[mG_{m-1}(s)-C_m^2 G_{m-2}(s)+\ldots+(-1)^{m-1}C_m^2 G_2(s)+ +(-1)^m mG(s)+(-1)^{m+1}\cdot\frac{P(s)}{1-s}\Big].$$

Применяя (6), получаем

$$G_m(s)=\frac{\sum\limits_{n=0}^{m-1} L_n^{(m)} P^{m-n}(s)}{(1-s)[1-P(s)]^m}, \tag{7}$$

где

$$L_n^{(m)}=\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i+1}C_m^i[a_{n-i}^{(m-i)}-(i-1)\,a_{n-i+1}^{(m-i)}+C_{i-1}^2\,a_{n-i+2}^{(m-i)}-$$

$$-C_{i-1}^3\,a_{n-i+3}^{(m-i)}+\ldots+(-1)^i(i-1)\,a_{n-2}^{(m-i)}+(-1)^{i-1}a_{n-1}^{(m-i)}]+(-1)^n C_{m-1}^n,$$

где $a_0^{(i)}=a_{i-1}^{(i)}=1$, а $a_j^{(i)}=O$, если $j\geqslant i$. Таким же образом, вычисляя $L_n^{(m-1)}$ и $L_{n-1}^{(m-1)}$, получаем

$$L_n^{(m)}=(n+1)\,L_n^{(m-1)}+(m-n)\,L_{n-1}^{(m-1)},$$

то есть

$$L_n^{(m)}=(n+1)\,a_n^{(m-1)}+(m-n)\,a_{n-1}^{(m-1)}. \tag{8}$$

Остается доказать, что $L_n^m=a_n^{(m)}$, то есть доказать, что $L_n^{(m)}=L_{m-n-1}^{(m)}$, ибо $a_n^{(m)}$ по нашему предположению должен быть коэффициентом при $P^{m-n}(s)$ и $P^{n+1}(s)$. Из (8) получаем

$$L_n^{(m)}=(n+1)\,a_n^{(m-1)}+(m-n)\,a_{n-1}^{(m-1)}$$

и

$$L_{m-n-1}^{(m)}=(m-n)\,a_{m-n-1}^{(m-1)}+(n+1)\,a_{m-n-2}^{(m-1)}.$$

Но из (6) получаем

$$a_n^{(m-1)}=a_{m-n-2}^{(m-1)} \text{ и } a_{n-1}^{(m-1)}=a_{m-n-1}^{(m-1)}.$$

Поэтому

$$L_n^{(m)}=L_{m-n-1}^{(m)}=a_n^{(m)}. \tag{9}$$

Таким образом, вставляя (9) в (8) и (7), получаем то, что требовалось доказать.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
6.XI.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, ИЛ, Москва, 1952.
2. A. Renyi, Wahrscheinlichkeitsrechnung mit einem Anhang über Informationstheorie VED, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962.

APIE ATSTATYMŲ SKAIČIAUS MOMENTŲ GENERUOJANČIĄ FUNKCIJĄ DISKRETINIO ATSTATYMO PROCESO ATVEJU

V. LIUTIKAS

(Reziumė)

$\{X_i\}$ – diskretinis atstatymo procesas, N_r – atstatymų skaičius iki r-tojo momento imtinai. Darbe parodomas konstravimas generuojančios funkcijos momentų MN_r^m, žinant generuojančią funkciją $P(s)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k s^k$, kur $p_k=P\{X_i=k\}$.

ÜBER ERZEUGENDE FUNKTION DER MOMENTE DES ZAHLES DER WIEDERSTELLUNGEN IM FALLE DES DISKRETEN WIEDERSTELLUNGPROZESSES

V. LIUTIKAS

(Zusammenfassung)

$\{X_i\}$ – diskreter Wiederstellungprozess, N_r – Zahl der Wiederstellungen bis zum r-ten Moment. In der Arbeit wird die Konstruktion der erzeugenden Funktion der Momente $\mathbf{M}N_r^m$ durch die erzeugende Funktion $P(s)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ wobei $p_k=P\{X_i=k\}$ bewiesen.