ТЕНЗОРЫ КРУЧЕНИЯ И КРИВИЗНЫ ПРОСТРАНСТВА ЦЕНТРАЛЬНЫХ ПУНКТОРОВ

С. МАЗИЛЯУСКАЙТЕ

§ 1. Объект центро-проективной связности

Допустимые преобразования координат пространства центральных пункторов W_n имеют вид [1]:

$$x^{i'} = x^{i'}(x^i), \tag{1}$$

$$u^{i'} = \frac{\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} u^i}{-\dfrac{1}{n+1}\dfrac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^j} u^j + 1}, \qquad (i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, n),$$

где u^i – компоненты опорного пунктора. Пространство W_n является частным случаем пространства опорных элементов [2].

Хорошо известно, что на дифференцируемом многообразии V_n параллельное перенесение пункторного поля $T^i(x)$ можно определить при помощи следующей системы дифференциальных уравнений [3]:

$$\frac{\partial T^i}{\partial x^k} = -T^j \Gamma^i_{jk} + T^i T^j \Gamma_{jk}, \tag{2}$$

где $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij})$ – объект центро-проективной связности, закон преобразования которого имеет вид:

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma^i_{jk},$$

$$\Gamma_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \left[\Gamma_{ij} - \frac{\partial^2 \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|^{-\frac{1}{n+1}}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|^{-\frac{1}{n+1}}}{\partial x^k} \Gamma^k_{ij} \right]. \tag{3}$$

Если ввести дифференциальный оператор D:

$$DT^i = \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^k} + T^j \Gamma^i_{jk} - T^i T^j \Gamma_{jk} \right) dx^k, \tag{4}$$

который отображает пункторное поле $T^i(x)$ на некоторое поле пфаффовых форм DT^i, то пфаффовую форму DT^i можно рассматривать как элемент кольца дифференциальных форм, присоединенного к пространству переменных (x^i, T^i). Закон преобразования этих форм имеет вид:

$$DT^{i'} = \frac{\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} DT^i}{\left(-\dfrac{1}{n+1} \dfrac{\partial \ln \det \left\| \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \right\|}{\partial x^k} T^k + 1 \right)^2}, \tag{5}$$

т. е. пфаффовая форма DT^i является проективно-релятивным тензором веса $N = -2$.

Операцию инвариантного дифференцирования для пункторных полей $T^i(x, u)$, определенных на W_n, введем следующим образом:

$$DT^i = dT^i + T^j\,\omega^i_j - T^i\,T^j\,\omega_j, \tag{6}$$

где

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{jk}\,dx^k + C^i_{jk}\,du^k, \tag{7}$$

$$\omega_j = \Gamma_{jk}\,dx^k + C_{jk}\,du^k. \tag{8}$$

Оказывается, что пфаффовые формы DT^i, определенные равенством (6), преобразуются по закону проективно-релятивного тензора веса $N=-2$ тогда и только тогда, когда система функций Γ^i_{jk}, Γ_{ij}, C^i_{jk}, C_{ij}, определенных на W_n, преобразуется по следующему закону:

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\left\{\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^i_{jk} + \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\left[\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'}\partial x^{p'}}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^p}u^p \times \right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(-\frac{1}{n+1}\,\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^l}\,u^l+1\right) - \frac{1}{n+1}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,\frac{\partial^2 \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^l\partial x^p}\,u^l u^p\right] C^i_{jk}\right\}, \tag{9}$$

$$\Gamma_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\left(\Gamma_{ij} - \frac{\partial^2 \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|^{-\frac{1}{n+1}}}{\partial x^i\partial x^j} + \frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|^{-\frac{1}{n+1}}}{\partial x^k}\,\Gamma^k_{ij}\right) +$$

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,u^p\left[\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'}\partial x^{p'}}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^p}\left(-\frac{1}{n+1}\,\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^l}\,u^l+1\right) - \right.$$

$$\left.-\frac{1}{n+1}\,\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial^2 \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^l\partial x^p}\,u^l\right]\left(C_{ij} - \frac{1}{n+1}\,\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^k}\,C^k_{ij}\right), \tag{10}$$

$$C^{i'}_{j'k'} = \left(-\frac{1}{n+1}\,\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^l}\,u^l+1\right)^2\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\,C^i_{jk}, \tag{11}$$

$$C_{i'j'} = \left(-\frac{1}{n+1}\,\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^l}\,u^l+1\right)^2\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\times$$

$$\times\left(C_{ij} - \frac{1}{n+1}\,\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^k}\,C^k_{ij}\right). \tag{12}$$

Дифференциально-геометрический объект $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij}, C^i_{jk}, C_{ij})$ будем называть полным объектом центро-проективной связности пространства W_n.

Так как C^i_{jk} проективно-релятивный тензор веса $N=2$, то система величин

$$C^i = C^i_{jk}\,u^j u^k, \tag{14}$$

где u^j — компоненты опорного пунктора, образует вектор, т. е. проективно-релятивный тензор нулевого веса.

Инвариантный оператор D, определенный равенством (6), индуцирует гомоморфное отображение пространства дифференциалов (dx^i, du^i), т. е., дуального касательного пространства многообразия W_n, на пространство проективно-релятивных пфаффовых форм веса $N=-2$:

$$h : (dx^i, du^i) \to (\omega^i),$$

где

$$\omega^i = F^i_j\,dx^j + E^i_j\,du^j, \tag{15}$$

$$F^i_j = u^k\,\Gamma^i_{kj} - u^i u^k\,\Gamma_{kj}, \tag{16}$$

$$E^i_j = \delta^i_j + u^k\,C^i_{kj} - u^i u^k\,C_{kj}. \tag{17}$$

Предположим, что $\det\|E^i_j\|\neq 0$. В этом случае можно однозначно определить величины $\bar{E}^j_i$ следующим образом:

$$\bar{E}^i_k E^k_j = \delta^i_j, \quad \bar{E}^k_j E^i_k = \delta^i_j. \tag{18}$$

Из (9)–(12), (15) и (16) следует, что система величин $(F^i_j,\ E^i_j)$ образует дифференциально-геометрический объект следующей структуры:

$$F^{i'}_{j'} = \left(-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^k}u^k+1\right)^{-2}\left\{\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}F^i_j+\right.$$
$$+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\left[\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'}\partial x^{p'}}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^p}u^p\left(-\frac{1}{n+1}\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^k}u^k+1\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{n+1}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial^2 \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^l\partial x^p}u^l u^p\right]E^i_j\right\}, \tag{19}$$

$$E^{i'}_{j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}E^i_j. \tag{20}$$

Пфаффовые формы ω^i_j и ω_i можно определить в следующем виде

$$\omega^i_j = G^i_{jk}\,dx^k + \gamma^i_{jk}\,\omega^k, \tag{21}$$

$$\omega_i = G_{ij}\,dx^j + \gamma_{ij}\,\omega^j, \tag{22}$$

где

$$G^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - C^i_{jl}\bar{E}^l_p F^p_k, \tag{23}$$

$$\gamma^i_{jk} = C^i_{jl}\bar{E}^l_k, \tag{24}$$

$$G_{ij} = \Gamma_{ij} - C_{il}\bar{E}^l_p F^p_j \tag{25}$$

и

$$\gamma_{ij} = C_{ik}\bar{E}^k_j. \tag{26}$$

Система величин $(G^i_{jk},\ G_{ij},\ \gamma^i_{jk},\ \gamma_{ij})$ образует дифференциально-геометрический объект следующей структуры:

$$G^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}G^i_{jk}, \tag{27}$$

$$G_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\left(G_{ij}+\frac{1}{n+1}\frac{\partial^2 \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{1}{n+1}\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^k}G^k_{ij}\right), \tag{28}$$

$$\gamma^{i'}_{j'k'} = \left(-\frac{1}{n+1}\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^l}u^l+1\right)^2\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\gamma^i_{jk}, \tag{29}$$

$$\gamma_{i'j'} = \left(-\frac{1}{n+1}\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^l}u^l+1\right)^2\left(\gamma_{ij}-\frac{1}{n+1}\frac{\partial \ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^k}\gamma^k_{ij}\right), \tag{30}$$

т. е. G^i_{jk} – объект аффинной связности, $(G^i_{jk},\ G_{ij})$ – объект центро-проективной связности, γ^i_{jk} – проективно-релятивный тензор веса $N=2$ и $(\gamma^i_{jk},\ \gamma_{ij})$ – проективно-релятивный дифференциально-геометрический объект веса $N=2$ и класса $h=2$.

§ 2. Инвариантное дифференцирование векторных полей

При помощи дифференциально-геометрического объекта $(X^i_{jk},\ Y^i_{jk})$ можно определить инвариантный оператор D^*:

$$D^*\xi^i = d\xi^i + \xi^j X^i_{jk}\,dx^k + \xi^j Y^i_{jk}\,du^k, \tag{31}$$

который любое контравариантное векторное поле $\xi^i(x, u)$ переводит в поле тензорных пфаффовых форм $D^*\xi^i$ тогда и только тогда, когда компоненты этого объекта преобразуются по закону:

$$X^{i'}_{j'k'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\left\{\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}X^i_{jk}+\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}+\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\left[\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{k'}\partial x^{p'}}\cdot\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^p}u^p\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(-\frac{1}{n+1}\frac{\partial\ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^l}u^l+1\right)-\frac{1}{n+1}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial^2\ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^l\partial x^p}u^l u^p\right]Y^i_{jk}\right\},\qquad(32)$$

$$Y^{i'}_{j'k'}=\left(-\frac{1}{n+1}\frac{\partial\ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^l}u^l+1\right)^2\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}Y^i_{jk}.\qquad(33)$$

Если выразить du^k через ω^k, то формула (31) принимает вид:

$$D^*\xi^i=d\xi^i+\xi^j\bar{X}^i_{jk}dx^k+\xi^j\bar{Y}^i_{jk}\omega^k,\qquad(34)$$

где

$$\bar{X}^i_{jk}=X^i_{jk}-\tilde{E}^p_l F^l_k Y^i_{jp},$$

$$\bar{Y}^i_{jk}=Y^i_{jl}\tilde{E}^l_k.$$

Оказывается, что система величин $(\bar{X}^i_{jk}, \bar{Y}^i_{jk})$ преобразуется по следующему транзитивному закону:

$$\bar{X}^{i'}_{j'k'}=\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\bar{X}^i_{jk},\qquad(35)$$

$$\bar{Y}^{i'}_{j'k'}=\left(-\frac{1}{n+1}\frac{\partial\ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^l}u^l+1\right)^2\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\bar{Y}^i_{jk}.\qquad(36)$$

Сравнивая формулы (27), (29), (35) и (36) мы получаем, что если на многообразии W_n определена операция инвариантного дифференцирования пункторных полей, то к ней всегда инвариантным образом присоединяется и операция инвариантного дифференцирования векторных полей, ибо в качестве объекта $(\bar{X}^i_{jk}, \bar{Y}^i_{jk})$ мы можем взять объект $(G^i_{jk}, \gamma^i_{jk})$. Так как

$$d\xi^i=\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}dx^j+\frac{\partial\xi^i}{\partial u^j}du^j,$$

то в силу (15) и (34) мы получим

$$D^*\xi^i=D_j\xi^i dx^j+D^*_j\xi^i\omega^j,\qquad(37)$$

где

$$D_j\xi^i=\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}-\frac{\partial\xi^i}{\partial u^l}\tilde{E}^l_k F^k_j+\xi^k\bar{X}^i_{kj},\qquad(38)$$

$$D^*_j\xi^i=\frac{\partial\xi^i}{\partial u^k}\tilde{E}^k_j+\xi^k\bar{Y}^i_{kj}.\qquad(39)$$

Величина $D_j\xi^i$ образует тензор, а $D^*_j\xi^i$ – проективно-релятивный тензор веса $N=2$.

Если на W_n задан дифференциально-геометрический объект (A^i_j, B^i_j) со следующим законом преобразования

$$A^{i'}_{j'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}A^i_j+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\left[\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}u^k\left(-\frac{1}{n+1}\frac{\partial\ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^l}u^l+1\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n+1}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial^2\ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^l\partial x^k}u^l u^k\right]B^i_j,\qquad(40)$$

$$B^{i'}_{j'}=\left(-\frac{1}{n+1}\frac{\partial\ln\det\left\|\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\right\|}{\partial x^k}u^k+1\right)^2\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}B^i_j,\qquad(41)$$

то дуальное касательное пространство многообразия W_n гомоморфно отображается на n-мерное пространство тензорных пфаффовых форм Θ^i:

$$H:(dx^i,\ du^i)\to(\Theta^i),$$

где

$$\Theta^i=A^i_j\,dx^j+B^i_j\,du^j. \tag{42}$$

Если на многообразие W_n задан объект центро-проективной связности и если вектор C^i, определенный равенством (14), отличен от нуля, то поле гомоморфизмов H можно внутренним образом определить следующим образом:

$$A^i_j=\frac{\partial C^i}{\partial x^j}+C^k\,\Gamma^i_{kj},$$

$$B^i_j=\frac{\partial C^i}{\partial u^j}+C^k\,C^i_{kj}. \tag{43}$$

Если $\det\|B^i_j\|\neq 0$, то инвариантный дифференциал векторного поля мы можем представить в следующем виде:

$$D^*\xi^i=\nabla_j\xi^i\,dx^j+\nabla^*_j\,\xi^i\,\Theta^j, \tag{44}$$

где

$$\nabla_j\xi^i=\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}-\frac{\partial\xi^i}{\partial u^k}\,\bar{A}^k_j+\xi^k\,\tilde{X}^i_{kj}, \tag{45}$$

$$\nabla^*_j\,\xi^i=\frac{\partial\xi^i}{\partial u^k}\,\tilde{B}^k_j+\xi^k\,\tilde{Y}^i_{kj}, \tag{46}$$

$$B^k_i\,\tilde{B}^j_k=\delta^j_i,\quad B^j_k\,\tilde{B}^k_i=\delta^j_i, \tag{47}$$

$$\bar{A}^k_j=A^i_j\,\tilde{B}^k_i, \tag{48}$$

$$\tilde{X}^i_{jk}=X^i_{jk}-\bar{A}^l_j\,Y^i_{lk}, \tag{49}$$

$$\tilde{Y}^i_{jk}=\tilde{B}^l_j\,Y^i_{lk}. \tag{50}$$

Компоненты дифференциально-геометрического объекта $(\tilde{X}^i_{jk},\ \tilde{Y}^i_{jk})$ преобразуются следующим образом:

$$\tilde{X}^{i'}_{j'k'}=\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\cdot\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\,\tilde{X}^i_{jk}, \tag{51}$$

$$\tilde{Y}^{i'}_{j'k'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\,\tilde{Y}^i_{jk}. \tag{52}$$

Величины $\nabla_j\xi^i$ и $\nabla^*_j\,\xi^i$ являются тензорами, и мы их будем называть инвариантными производными, соответственно, первого и второго рода рассматриваемого векторного поля. Аналогично определяются инвариантные производные и тензорных полей произвольных валентностей.

§ 3. Тождества Риччи

Альтернируя вторые инвариантные производные первого рода, мы получим

$$2\nabla_{[k}\nabla_{l]}\,\xi^i=2R^i_{ljk}\,\xi^l+2K^l_{jk}\,\nabla^*_l\,\xi^i+2R^l_{jk}\,\nabla_l\,\xi^i, \tag{53}$$

где

$$R^i_{ljk}=\partial_{[k}\,\tilde{X}^i_{|l|j]}+\partial^*_p\,\tilde{X}^i_{l[k}\,\bar{A}^p_{j]}+\tilde{X}^p_{l[j}\,\tilde{X}^i_{|p|k]}+$$
$$+\tilde{Y}^i_{lr}\,B^r_p\,\partial_{[k}\,\bar{A}^p_{j]}+\tilde{Y}^i_{lr}\,B^r_p\,A^q_{[j}\,\partial^*_{|q|}\,A^p_{k]}, \tag{54}$$

$$K^l_{jk}=B^l_i\,\partial_{[j}\,\bar{A}^i_{k]}+B^l_i\,\bar{A}^p_{[k}\,\partial^*_{|p|}\,\bar{A}^i_{j]}, \tag{55}$$

$$R^l_{jk}=\tilde{X}^l_{[kj]}, \tag{56}$$

причем

$$\partial_k=\frac{\partial}{\partial x^k},\quad \partial^*_k=\frac{\partial}{\partial u^k}.$$

Тензор R^{i}_{ljk} будем называть первым картановым тензором кривизны пространства W_n, K^{l}_{jk} – первым картановым тензором дополнительной кривизны, а тензор R^{l}_{jk} – первым тензором кручения. Формулы (53) являются тождествами Риччи для альтернированных производных первого рода.

Вторую группу обобщенных тождеств Риччи получим, рассматривая инвариантные производные второго рода $\nabla^{*}_{k} \nabla^{*}_{j} \xi^{i}$:

$$2\nabla^{*}_{[k} \nabla^{*}_{j]} \xi^{l} = 2P^{i}_{ljk} \xi^{l} + P^{l}_{jk} \nabla^{*}_{l} \xi^{i}, \tag{57}$$

где

$$P^{i}_{ljk} = \tilde{B}^{p}_{[k} \partial^{*}_{|p|} \tilde{Y}^{i}_{|l|j]} + B^{p}_{q} \tilde{B}^{r}_{[j} \partial^{*}_{|r|} B^{q}_{k]} \tilde{Y}^{i}_{lp} + \tilde{Y}^{p}_{l[j} \tilde{Y}_{|p|k]}, \tag{58}$$

$$P^{l}_{jk} = B^{l}_{p} \tilde{B}^{r}_{[k} \partial^{*}_{|r|} \tilde{B}^{p}_{j]} + \tilde{Y}^{l}_{[kj]}. \tag{59}$$

Тензор P^{i}_{ljk} будем называть вторым картановым тензором кривизны пространства центральных пункторов W_n, а P^{l}_{jk} – вторым картановым тензором дополнительной кривизны. Формулы (57) являются тождествами Риччи для альтернированных производных второго рода.

Третью группу обобщенных тождеств Риччи получим при рассмотрении инвариантных производных $\nabla_{k} \nabla^{*} \xi^{i}$:

$$2\nabla_{[k} \nabla^{*}_{j]} \xi^{i} = S^{i}_{ljk} \xi^{l} + \sigma^{l}_{jk} \nabla^{*}_{l} \xi^{l} + S^{l}_{jk} \nabla_{l} \xi^{i}, \tag{60}$$

где

$$\begin{gathered} S^{i}_{ljk} = \partial_{k} \tilde{Y}^{i}_{lj} - \tilde{Y}^{i}_{lp} B^{p}_{r} \partial_{k} \tilde{B}^{r}_{j} - \bar{A}^{p}_{k} \partial^{*}_{p} \tilde{Y}^{i}_{lj} - \tilde{B}^{p}_{j} \partial^{*}_{p} \tilde{X}^{i}_{lk} + \\ + \tilde{Y}^{i}_{lr} \bar{A}^{p}_{k} B^{r}_{q} \partial^{*}_{p} B^{q}_{j} - \tilde{Y}^{i}_{lr} \tilde{B}^{p}_{j} B^{r}_{q} \partial^{*}_{p} \bar{A}^{q}_{k} + 2\tilde{Y}^{p}_{\{l|j|} \tilde{X}^{i}_{p\}k} + 2\tilde{Y}^{p}_{kj} \tilde{X}^{i}_{lr} A^{r}_{p}, \end{gathered} \tag{61}$$

$$\sigma^{l}_{jk} = B^{l}_{p} \partial_{k} \tilde{B}^{p}_{j} - \bar{A}^{p}_{k} B^{l}_{r} \partial^{*}_{p} B^{r}_{j} + B^{p}_{j} B^{l}_{r} \partial^{*}_{p} \bar{A}^{r}_{k} - \tilde{X}^{l}_{jk} - 2\tilde{Y}^{p}_{kj} A^{l}_{p}, \tag{62}$$

$$S^{l}_{jk} = \tilde{Y}^{l}_{jk}. \tag{63}$$

Тензор S^{i}_{ljk} будем называть третьим картановым тензором кривизны пространства центральных пункторов W_n, σ^{l}_{jk} – третьим картановым тензором дополнительной кривизны. Формулы (60) являются тождествами Риччи для альтернированных производных третьего рода.

Выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю В. Близникасу за помощь при выполнении этой работы.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 20.X.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Близникас, О некоторых многообразиях опорных элементов, Лит. мат. сб., 1963, 3, 231–232.
2. Б. Л. Лаптев, Производная Ли в пространстве опорных элементов, Труды сем. по векторн. и тензорн. анализу, 1956, вып. 10, 227–248.
3. Б. Г. Лемлейн, Локальные центро-проективные пространства и связности в дифференцируемом многообразии, Лит. мат. сб., 1964, 4, 43–130.

CENTRINIŲ PUNKTORIŲ ERDVĖS SUKIMOSI IR KREIVUMO TENZORIAI

S. MAZILIAUSKAITĖ

(*Reziumė*)

Centrinių punktorių erdvė W_n yra atskiras atraminių elementų erdvės atvejis. Šiuo atveju atraminio elemento (x, u) koordinačių transformacijos formulės yra (1). Punktorinio lauko, apibrėžto ant W_n, invariantinis diferencialas yra įvestas, remiantis (6) formule, kur

$(\Gamma^i_{jk}$ Γ_{ij}, C^i_{jk}, $C_{ij})$ yra diferencialinis geometrinis objektas (pilnas centro-projektyvinio sąryšio objektas), apibrėžtas transformacijos formulėmis (9), (10), (11), (12).

(14) vektoriaus pagalba iš centro-projektyvinio sąryšio objekto komponenčių galima sudaryti diferencialinį geometrinį objektą $(G^i_{jk}$, G_{ij}, γ^i_{jk}, $\gamma_{ij})$, apibrėžtą formulėmis (23)–(26), kurio komponenčių transformacijos dėsniai yra (27)–(33). Remiantis šiuo diferencialiniu geometriniu objektu, yra įvestas invariantinis vektorinio lauko, apibrėžto ant W_n, diferencialas.

Surastos apibendrintos Riči tapatybės, sukimosi bei kreivumo tenzoriai.

KRÜMMUNGS- UND TORSIONSTENSOREN DES RAUMES VON ZENTRALPUNKTOREN

S. MAZILIAUSKAITĖ

(*Zusammenfassung*)

Das Punktor ist ein geometrisches Objekt im n-dimensionalen Punktraum W_n, dessen Komponenten bei einer zulässigen Koordinatentransformation (1_1) die Transformationsgleichung (1_2) genügen. Ein Punkt samt einem Punktor (oder kurz Zentralpunktor) soll mit (x^i, u^i) bezeichnet werden. Der Mannigfaltigkeit W_n von Zentralpunktoren (x^i, u^i) ist $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Das invariante Differential eines Punktors $T^i(x, u)$ ist durch (6) festgelegt, wo Γ^i_{jk}, C^i_{jk}, Γ_{ij} und C_{ij} das vollständige Objekt vom zentral-projektiven Zusammenhang ist. Das invariante Differential eines differenzierbaren Vektorfeldes $\xi^i(x, u)$ hat die Form (31). Die Torsions-, Ergänzungstorsions-, Krümmungs- und die Ergänzungskrümmungstensoren der Mannigfaltigkeit W_n kann man durch die Gleichungen (54), (55), (56), (58), (59), (61), (62) und (63) einführen. Die Identitäten (53), (57) und (60) sind die verallgemeinerten Identitäten von Ricci.