ЕДИНАЯ АКСИОМАТИКА ПРОСТРАНСТВ С МАКСИМАЛЬНОЙ ГРУППОЙ ДВИЖЕНИЙ

Р. И. ПИМЕНОВ

1°. Известно, что, опираясь на проективную геометрию, можно получить 3^n геометрий размерности n, допускающих максимальную группу движений. См. обзорную статью [9]. Мы даем аксиоматику, позволяющую получить все указанные геометрии, не вводя предварительно проективной геометрии. Результаты данной статьи анонсированы в [1], [2], а здесь мы излагаем доказательства сформулированных там утверждений.

Предлагаемая аксиоматика состоит из „постоянной" и „переменной" частей. Постоянная часть определяет свойства, общие всем 3^n геометриям Кэли—Клейна. Это, так сказать, аксиоматика „абсолютной геометрии" в широком смысле этого слова. Первая трудность заключается в том, что указанные пространства имеют различные топологии (двумерные пространства могут иметь топологию плоскости, цилиндра и сферы). Поэтому приходится начинать с обобщения отношения „между" на случай, пригодный для замкнутой прямой; (избегая введения несобственных элементов). Вторая трудность в том, что в указанных пространствах не всякие две k-мерные плоскости (k-плоскости) можно совместить движением (прямые вещественной длины на псевдоэвклидовой плоскости нельзя совместить с прямыми мнимой длины). Группа движений транзитивна, если рассматривать пространство как множество точек, но может быть интранзитивна, если рассматривать пространство как множество k-плоскостей. Поэтому мы говорим про k-неоднородность пространства и начинаем с выделения семейства „постулированных k-плоскостей", совмещаемых друг с другом движениями.

Переменная часть состоит из системы n варьируемых постулатов, каждый из которых может принимать одну из трех формулировок. Постулаты формулируются так, что во всяком случае один из них необходимо истинен. Поэтому они служат только для конкретизации вида геометрии.

Мы не претендуем на решение всех вопросов, связанных с предлагаемой аксиоматикой. Так, мы совершенно оставляем в стороне вопросы разрешимости, независимости и креативности предлагаемой аксиоматики (точнее, например, вопрос: можно ли аналогично пути Тарского [10] переформулировать нашу аксиоматику так, чтобы она стала разрешима. Тарский, как известно, показал возможность этого для обычной эвклидовой геометрии. Недавно это сделано для геометрии Лобачевского). Точно так же мы оставляем в стороне проблемы топологического обоснования геометрии, намеченные Гуггенхаймером [11]. Всем этим логическим и топологическим направлениям свойственно ограничиваться геометриями Эвклида и Лобачевского. Вообще же обстоятельно разработана также аксиоматика сферической (эллиптической) геометрии, но обычно она строится существенно иначе, нежели аксиоматика первых двух. Также изучалась многими аксиоматика псевдоэвклидовой геометрии. Один частный случай полуэвклидовой геометрии $R_3^{1,2}$ был аксиоматизирован И. В. Парнасским [3]. Не было попыток дать синтетическую аксиоматику для полунеэвклидовых геометрий и для того, что можно было бы назвать „псевдонеэвклидовыми геометриями“ – сфер, специфичных для псевдоэвклидового пространства. Положение дел довольно адекватно описывают слова В. Ф. Кагана, относящиеся к 1956: „Клейн неоднократно указывал, что дело отнюдь не в одном только перечислении возможных систем; следует действительно построить геометрию каждой из этих систем, установить ее аксиоматику, из этой аксиоматики дедуктивно вывести самую геометрию каждой системы – как геометрию положения, так и метрику. Но это удовлетворительно в необходимом объеме еще не выполнено и по настоящее время.“ ([5] § 78). Мы хотим дать недостающие аксиоматики, наложив на них дополнительное требование: все геометрии должны получаться по существу из одной и той же аксиоматики, разве что с варьированием некоторых переменных постулатов. Основная цель нашей работы – показать, что возможна (т. е. непротиворечива и полна) такая единая аксиоматика и она охватывает все системы Кэли—Клейна. Этим мы отвечаем на раздававшиеся на II геометрической конференции (Харьков, 1964) вопросы: „В чем то общее, что объединяет все геометрии с проективной метрикой?“ (А. Д. Александров), „Не возникает ли „инфляции пространств“ ввиду такого их обилия?“ (И. П. Егоров).

2°. *Аксиомы и теоремы порядка.* Аксиоматизируемые понятия: „точка“ A, „прямая“ a, „k-плоскость“ α^k. Иногда обозначаем прямую α^1, а точку α^0. Аксиоматизируемые отношения: „точка A близка точке B“ (обозначаем $A|B$), „точка B между точек A и C“ (обозначаем ABC), „k-плоскость лежит на $(k+1)$-плоскости“ (обозначаем $\alpha^k \in \alpha^{k+l}$); здесь $k \geqslant 0$, $l > 0$. Объекты и отношения удовлетворяют аксиомам I – VI групп.

Аксиомы расположения:

I_1. ABC влечет CBA.

I_2. ABC отрицает BAC.

I_3. ABC и ADB влекут ADC.

I_4. ABC и ADC влекут либо ADB, либо $B = D$, либо BDC.

I_5. ABC подразумевает $A|C$.

I_6. ABC и ABD влекут $C|D$.

I_7. Если $M|A$ и $M|B$, то из AXB следует $M|X$.

I_8. Для любых трех различных попарно близких точек A, B, C одной прямой имеет место либо ABC, либо BCA, либо CAB. Очевидно проверяется, что отношение близости рефлексивно и симметрично.

Аксиомы структуры:

II_1. На любой k-плоскости есть хотя бы $k+1$ различные точки, не лежащие в одной l-плоскости ($0 \leqslant l < k \leqslant n$).

II_2. Если $A|B$ и $A \neq B$, то существует C такая, что ABC.

II_3. Если ABC и $B|M$, то найдется D такая, что ADB и $D|M$.

II_4. Если $A \in \alpha^k$, $B \in \alpha^k$ ($1 \leqslant k \leqslant n$), то существуют точки A_0, A_1, ..., A_m такие, что $A_0 = A$, $A_m = B$, $A_i \in \alpha^k$ и $A_{i-1}|A_i$ для $1 \leqslant i \leqslant m$.

II_5. Если $A|B$, $B|C$, $C|A$, то для треугольника ABC выполняется аксиома Паша (например, в формулировке Гильберта II_4 [4], § 3).

II_6. Если $A|B$, то для точек X между A и B выполняется аксиома Дедекинда.

Мы видим, что множество точек, близких данной (называем его *окрестностью данной точки*), оказывается выпуклым (I_7) открытым (II_3) множеством.

Аксиомы принадлежности суть:

III_1. Если $\alpha^k \in \alpha^{k+l}$ и $\alpha^{k+l} \in \alpha^{k+l+m}$, то $\alpha^k \in \alpha^{k+l+m}$ при $k \geqslant 0$ и l, $m > 0$.

III_2. Для любых $k+1$, различных попарно близких точек A_0, ..., A_k существует k-плоскость α^k такая, что $A_i \in \alpha^k$ при $0 \leqslant i \leqslant k$.

III_3. Для любых $k+1$, не лежащих в одной l—плоскости ($0 \leqslant l < k$), попарно близких точек A_0, ..., A_k, если $0 \leqslant i \leqslant k$ $A_i \in \alpha^k$ и $A_i \in \beta^k$, то $\alpha^k = \beta^k$.

III_4. Если $\alpha^l \in \alpha^m$ и $\alpha^k \in \alpha^m$ и $O \in \alpha^l$ и $O \in \alpha^k$, то существует $\alpha^{k+l-m} \in \alpha^l$ и $\alpha^{k+l-m} \in \alpha^k$ и $O \in \alpha^{k+l-m}$.

Из предпоследней аксиомы следует, что если две прямые пересекаются в двух различных точках, то эти точки далеки друг от друга. В качестве примера сошлемся на сферическую геометрию: диаметрально-противоположные точки в ней не являются близкими в нашем смысле. Рассуждения с попарно близкими точками ничем не отличаются от обычных рассуждений в основаниях геометрии; в частности, очевидно доказательство теоремы:

2.1. k-окрестность точки (т. е. окрестность ее на k-плоскости) делится всякой проходящей через нее $(k-1)$-плоскостью на две непересекающиеся части.

Каждую из этих частей называем *k-полуплоскостью* и обозначаем $\overrightarrow{\alpha^k}$ и $\overleftarrow{\alpha^k}$. Вообще говоря, плоскость не состоит из двух полуплоскостей плюс разделяющая их прямая, ибо на плоскости могут быть точки, далекие от данной, и окрестность не совпадает со всей плоскостью. Систему $(0, \overrightarrow{\alpha^1}, \ldots, \overrightarrow{\alpha^k})$ назовем *k-репером*. Частный случай при $k=1$ назовем *лучом*. Опять-таки тривиально доказательство теоремы:

2.2. Из трех лучей с общей вершиной и в одной полуплоскости один находится между двумя другими (в смысле расположения точек пересечения этих лучей некоторой прямой).

3°. *Аксиомы и теоремы движения*. Вводим еще аксиоматизируемый объект „движение“ и два отношения: „при движении $\mathfrak{A}$ k-плоскость α^k перешла в β^k“ (обозначаем $\mathfrak{A}(\alpha^k) = \beta^k$, или $\mathfrak{A}: \alpha^k \to \beta^k$) и, k-плоскость α^k является постулированной“.

IV группа — аксиомы движения:

IV_1. При движении k-плоскость переходит в k-плоскость.

IV_2. Движение сохраняет отношение принадлежности.

IV_3. Движение сохраняет отношение между. (Отсюда следует сохранение близости.)

IV_4. Движения образуют группу.

V группа — аксиомы выделения (ниже $1 \leqslant k \leqslant n$, где не оговорено противное):

V_1. Движение сохраняет свойство k-плоскости быть постулированной.

V_2. Существуют $\alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^n$ такие, что всякая α^i из них постулированная и $\alpha^{i-1} \in \alpha^i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$.

V_3. Если две постулированные k-плоскости α^k и γ^k пересекаются по постулированной $(k-1)$-плоскости (при $k=1$ — в точке), то хотя бы один из двух смежных углов $\angle \vec{\alpha}^k, \vec{\gamma}^k$ таков, что всякая k-плоскость β^k, лежащая между $\vec{\alpha}^k$ и $\vec{\gamma}^k$ в этом углу, является постулированной k-плоскостью.

V_4. Если β^k постулированная и ω^{k-1} (при $k>1$) постулированная и $\omega^{k-1} \in \beta^k$ либо (при $k=1$) $O \in \beta^k$, то в любой постулированной $(k+1)$-плоскости, проходящей через ω^{k-1}, существуют постулированные α^k и γ^k такие, что $\omega^{k-1} \in \alpha^k, \gamma^k$ $(O \in \alpha^k, \gamma^k)$ и β^k между α^k и γ^k в том из смежных углов, в котором всякая k-плоскость является постулированной.

V_5. Каковы бы ни были два k-репера*) $(O, \vec{\alpha}^1, \ldots, \vec{\alpha}^k)$ и $(Q, \vec{\beta}^1, \ldots, \vec{\beta}^k)$, если при $1 \leqslant i \leqslant k$ α^i и β^i суть постулированные, то найдется движение такое, что $\left(\mathfrak{A}(0), \mathfrak{A}(\vec{\alpha}^1), \ldots, \mathfrak{A}(\vec{\alpha}^k)\right)$ совпадает с $(Q, \vec{\beta}^1, \ldots, \vec{\beta}^k)$.

V_6. Если точки A и B лежат на постулированной прямой, то нет движения такого, что $A \to A'$, $B \to B'$ и $AA'B$ и $A'B'B$ одновременно.

V_7. Если постулированные α^k, β^k имеют общую постулированную ω^{k-1} (или точку при $k=1$), то не существует движения такого, что $\alpha^k \to \alpha^k_1$, $\beta^k \to \beta^k_1$ и α^k_1 между α^k и β^k, а β^k_1 между α^k_1 и β^k одновременно.

V_8. Пусть $A \mid B$, $A \in a$, $B \notin a$, a — постулированная. Тогда существует постулированная, содержащая B, пересекающая a в точке C, близкой A и B.

Так как аксиомы V_6 и V_7 выражают, что ни отрезка постулированной, ни угла из постулированных нельзя сжать, то получаем теоремы:

3.1. Два постулированных n-репера однозначно определяют движение.

3.2. При выборе произвольного отрезка (угла и т. п.) постулированной в качестве масштабного, всякому постулированному отрезку (углу и т. п.) однозначно сопоставляется вещественное число.

---

*) Мы называем, как обычно, k-репером систему из точки, полупрямой, ..., k-мерной полуплоскости, расположенных так, что m-плоскость, содержащая m-полуплоскость, является граничной плоскостью для $(m+1)$-полуплоскости при всех $0 \leqslant m < k$. Если к тому же все входящие в репер плоскости — постулированные, то называем репер постулированным.

Определяем *перпендикуляр* к постулированной, $b \perp a$ означает, что существует движение, при котором все точки a неподвижны, полуплоскости, опирающиеся на a, меняются местами и прямая b переходит в себя. Определяем *близость точки и прямой*: $X|a$ означает, что при описанном отражении относительно a точка $X \to X'$, где $X|X'$.

3.3. На постулированной плоскости, если точка A близка постулированной прямой a и $A \notin a$, то из нее можно опустить на a единственный перпендикуляр. Доказательство. Отразим плоскость (A, a) относительно a; $A \to A'$. По определению $A|A'$ и в силу 2.1 $A \neq A'$, а поэтому существует b, проходящая через A и A'; b пересекает a в некоторой точке O. С другой стороны, при указанном движении $A' \to A$ в силу 3.1 и по III_3 $b \to b'$, т. е. $b \perp a$. Если бы из A можно было бы опустить два перпендикуляра на a, то через A и A' проходили бы две различные прямые, что исключено в силу их близости.

3.4. На постулированной плоскости к постулированной прямой из любой ее точки можно восставить единственный перпендикуляр. Доказательство. Прежде всего заметим, что для любой постулированной прямой найдется близкая ей точка, а также то, что если перпендикуляр существует, то он, конечно, единственный. С учетом 3.3 отсюда следует, что существует точка P, $P \notin a$ такая, что $P \in b$ и $b \perp a$. Пусть O — точка пересечения a и b. Совершим перенос вдоль a из O в заданную A. Тогда $b \to b'$ и $A \in b'$ и при этом перпендикулярность сохраняется (в силу упомянутой единственности). Итак, существование перпендикуляра доказано.

Аналогично доказываются аналогичные теоремы для k-плоскостей.

4⁰. *Однородность на плоскости.* Рассмотрим постулированную плоскость (2-плоскость). На ней рассмотрим пучок прямых с общей точкой. Возможно одно из трех:

I_1^*. Всякая прямая пучка постулированная (*однородная плоскость*);

II_1^*. В пучке есть единственная не постулированная прямая (*вырожденная плоскость*, или, иначе, *флагплоскость*);

III_1^*. В пучке есть две или более не постулированных прямых (*псевдоплоскость*).

Для иллюстрации перечислим проективные двумерные системы (ср. [5], § 77–78) с указанием, каким постулатам 1-однородности они удовлетворяют. Постулату I_1^* удовлетворяют те три геометрии, в которых на абсолюте выделены две мнимые точки. Тогда мероопределение углов — эллиптическое. Постулату I_2^* удовлетворяют те три геометрии, в которых на абсолюте выделена одна двойная точка. Мероопределение углов — параболическое. (Удобно в этом случае для невырожденного абсолюта представлять его в виде параболы.) Постулату I_3^* удовлетворяют те две (из априори возможных трех две изоморфны) геометрии, в которых на абсолюте выделены две вещественные точки. Мероопределение углов — гиперболическое. Постулированные прямые — это одно из двух возникающих тут семейств прямых. Если брать модель в виде внешней области круга, то следует одновременно рассматривать *все* прямые, проходящие через точку; удобнее представлять абсолют в виде гиперболы. См. рис. 8а.

Так как всякие две точки можно совместить и постулированность сохраняется при движении, то сформулированные утверждения оказываются характеристикой плоскости, а не точки. Называем их постулатами 1-*однородности*. Для конкретизации геометрии к аксиомам „абсолютной геометрии" I–V групп (к „постоянной аксиоматике") добавляем один из трех „переменных" постулатов 1-однородности.

Называем две k-плоскости *одноименными*, если их можно совместить движением. Называем прямую *изолированной*, если для нее нарушается одно из требований, аналогичных V_3, V_4. Непосредственно из постулатов 1-однородности и аксиомы Дедекинда следует:

4.1. На однородной плоскости все прямые одноименны и не изолированны; на флагплоскости через каждую точку проходит единственная *изолированная* прямая; на псевдоплоскости есть минимум две изолированные, одноименные друг другу и граничные для пучка постулированных; эти изолированные на псевдоплоскости называем *изотропными*.

4.2. На однородной плоскости постулированная прямая одноименна со своим перпендикуляром; на флагплоскости – разноименна со своим перпендикуляром и только с ним; на псевдоплоскости – разноименна не только со своим перпендикуляром.

Псевдоплоскость в точке имеет вид: две пересекающиеся изотропные, одна пара вертикальных углов, между которыми заполнена постулированными и только ими. Перпендикуляры к постулированным лежат во второй паре вертикальных углов. Докажем, что прямые из этой пары углов – назовем их *прямыми второго семейства* – являются перпендикулярами к постулированным, одноименны друг другу и не изолированы. Ниже, где не оговорено противное, подразумевается, что во всех рассуждениях упоминаемые точки попарно близки; это возможно в силу V_9 и II_5.

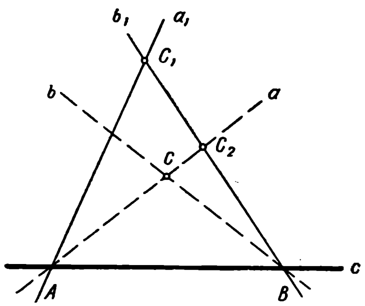

Рис. 1

4.3. Через всякие две точки (близкие) A и B прямой второго семейства c можно провести изотропные прямые, пересекающиеся в некоторой точке C, близкой A и B. Действительно, проведем через B произвольно постулированную b_1, а через A – a_1, пересекающую b_1 в точке C_1, так что $C_1 | A$, $C_1 | B$; такая прямая есть по V_9. Получаем треугольник из попарно близких точек. Изотропная прямая разделяет постулированные и прямые второго семейства, следовательно, во внутрь $\triangle ABC_1$ в вершине A входит изотропная a – она пересечет прямую b_1 в точке C_2 ($C_2 | A$, $C_2 | B$). Аналогичным рассуждением для $\triangle ABC_2$ и вершины B находим, что изотропные a и b пересекаются в некоей точке C, чтд. См. рис. 1.

4.4. Если две изотропные прямые a и b пересечены третьей изотропной c в точках A и B, то постулированные лежат в соответственных углах A и B. Для доказательства проведем через A постулированную p, пересекающую b в A'. Затем через A' проводим вторую изотропную d. Отражением относительно p обнаружим, что d пересекает a; точку пересечения B' можно соединить прямой с B (несмотря на то, что мы не знаем, близки ли B и B', середина O отрезка AA' уж во всяком случае близка и B и B'; легко видеть, что OB и OB' лежат на одной прямой); эта прямая перпендикулярна p, т. е. прямая второго семейства. Следовательно, во внутренних односторонних углах $\angle B'AB$ и $\angle ABA'$ лежат разноименные прямые, что равносильно требуемому. Следствие: изотропные прямые не образуют треугольника. Теперь возьмем точки A и B, удовлетворяющие 4.3. Проходящие через них изотропные a_1 и b_1 пересекаются в C. Проводим через A вторую изотропную a_2 и на ней точку C' в другой полуплоскости. По 4.4 CC' постулированная. Проводим через C' вторую изотропную и отражением в CC' убеждаемся, что она пересекает b_1. Легко подобрать C' и B так, что $C'B$ изотропная, а это дает, что $AB \perp CC'$. См. рис. 2. Итак:

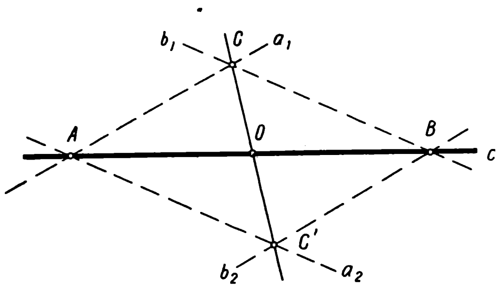

Рис. 2

4.5. На всякой прямой второго семейства a, существует точка O такая, что через нее проходит постулированная, к которой перпендикулярна a.

Теперь берем на a любую точку A, близкую O. На перпендикуляре b в точке O, только что найденном, есть точка P, близкая A (в силу II_3). Ей симметричная обозначается P'. При отражении от a $\angle PAO$ оказывается острым, а $\angle QAO$ – тупым. См. рис. 3. Из непрерывности ясно, что через A проходит прямая, которая при указанном отражении остается неподвижной. Но тогда и при отражении относительно этой прямой (необходимо постулированной) исходная прямая второго семейства a останется неподвижной (в силу единственности перпендикуляра) и поэтому a окажется перпендикуляром к найденной прямой. А так как, продолжая этот процесс, можно дойти до любой точки прямой a (по II_4), то

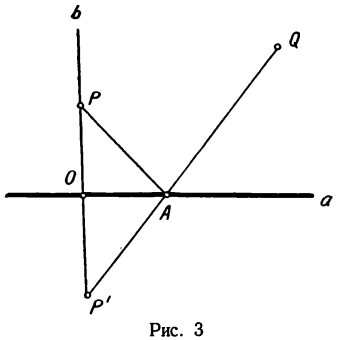

Рис. 3

4.6. Во всякой точке прямой второго семейства a существует постулированная b такая, что $a \perp b$.

С помощью этого перпендикуляра можно всякий репер, опирающийся на прямую второго семейства, свести к реперу, опирающемуся на постулированную. Поэтому прямые второго семейства оказываются одноименными друг другу, неизолированными, сплошь заполняющими вторую пару вертикальных углов между изотропными. Более того:

4.7. Выбрав произвольно отрезок прямой второго семейства в качестве масштабного, можно всякому отрезку прямой второго семейства однозначно приписать длину в виде вещественного числа. То же относится к углам.

Для доказательства достаточно убедиться, что отрезок второго семейства нельзя сжать движением. Допустим противное: AB передвинут в $A'B'$ (рис. 4). Проводя через A и A' перпендикуляры к AB, а через A', B' и B — изотропные, мы получим, что при допущенном движении отрезок постулированной AC переходит в меньший отрезок $A'C'$, что невозможно. Углам между прямыми второго семейства сопоставляем однозначно углы между перпендикулярами к ним.

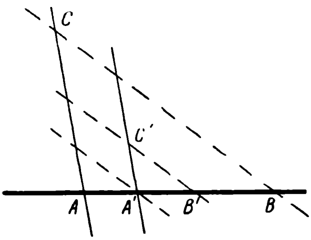

Рис. 4

4.8. Пусть OA, OB — постулированные, $OA = OB$, OC — изотропная и $\overrightarrow{OB}$ между $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$. Пусть A', $B' \in OC$ и AA', BB' — изотропные. Тогда A' между O и B'. См. рис. 5. В самом деле, тогда AB — прямая второго семейства и AA' пересекает OB во внутренней точке (по II_5). Следовательно, по 4.4 и 2.1 B' не может лежать внутри OA'. Аналогичное утверждение справедливо и для прямых второго семейства, и тогда как следствие получаем:

4.9. При вращении на псевдоплоскости перпендикуляры поворачиваются навстречу друг другу. Итак, на псевдоплоскости отрезок изотропной можно сжать во внутрь самого себя (например, $OB' \to OA'$ и $OA'B'$ в 4.8); этим вынуждается выбор длины для любого отрезка изотропной равной нулю. Совсем иначе обстоит дело на флагплоскости.

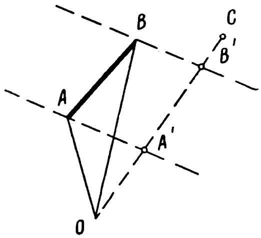

Рис. 5

4.10. Отрезок изолированной на флагплоскости нельзя сжать к его концу. Допустим противное. $A \to A$, $B \to B'$, $AB'B$. Проводим через A постулированную AC, $C \to C'$, $C \neq C'$ (иначе по 3.1 покоились бы все точки), но C и C' на одной изолированной в силу ее единственности в точке. По одну сторону от AB лучи расположены так, что $\overrightarrow{AC'}$ между $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ (2.1), т. е. B' и C' по разные стороны от BC. Следовательно, BC и $B'C'$ пересекаются в D. $D \to D$ из-за единственности изолированной. Следовательно, $\angle ADB \to \angle ADB'$, что противоречит V_8.

Из доказанной теоремы и соображений непрерывности известным образом вытекает, что отрезок изолированной на флагплоскости вообще нельзя сжать. Следовательно, на флагплоскости:

4.11. Выбрав отрезок изолированной в качестве масштабного, можно всякому отрезку изолированной однозначно приписать вещественное число — длину. В этом проявляется различие между изолированными на псевдоплоскости и на флагплоскости.

4.12. На псевдоплоскости перпендикуляр длиннее любой одноименной ему наклонной. Доказательство. Пусть, как на рисунке 6, $OA \perp AB$, OA и OB — постулированные; всякая точка на AB лежит на постулированной, проходящей через O. Пусть OC — биссектриса $\angle AOB$. Точка C между A и B. Перпендикуляр d к OC в точке C пройдет внутри угла $\angle OCA$ (по 4.9 и потому, что изотропные не образуют треугольника) и, следовательно, пересечет OA во внутренней точке D, а OB — на продолжении BD' в точке D'. При этом, разумеется, $OD = OD'$. Следовательно,

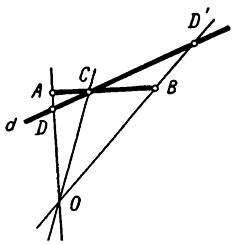

Рис. 6

$$OA = OD + DA,$$

$$OA > OD = OD' = OB + BD',$$

$$OA > OB,$$

чтд. Отсюда прямо следует:

4.13. Рассмотрим отрезок AB и ломаную ACB, однозначно проектирующуюся на AB; AB, AC, CB — постулированные. Тогда:

На однородной плоскости $AB < AC + CB$;

На флагплоскости $AB = AC + CB$;

На псевдоплоскости $AB > AC + CB$.

Отсюда, между прочим, видно, что на вырожденной плоскости прямая не определяется экстремальными свойствами.

На флагплоскости изолированная прямая перпендикулярна любой постулированной прямой, пересекающей ее. Это видно из 4.2. Иными словами, при отражении полуплоскости от изолированной прямой можно перевести любую постулированную в любую; отражение от изолированной не определяется однозначно. Поэтому введем определение *одинаковых перпендикуляров.*

Говорим, что постулированные прямые a и b одинаково перпендикулярны к изолированной прямой c, если при некотором движении все точки на c неподвижны, полуплоскости меняются местами, $a \to a$, $b \to b$. Обозначаем $(a, b \perp c)$. Если заданы c и a, то по V_5 можно произвести отражение от c такое, что $\overrightarrow{a} \to \overleftarrow{a}$. Взяв любую точку $X | c$, соединим X и X' и тем самым найдем прямую b, одинаково с a перпендикулярную к c. В силу 3.1 такой перпендикуляр единственен. Если точка X лежит на c, то по соображениям непрерывности (ср. доказательство 4.6) через нее проходит прямая b, неподвижная при взятом отражении. Итак:

4.14. Какова бы ни была постулированная a и пересекающая ее изолированная c, если точка X лежит на той же флагплоскости и близка c, то существует единственная прямая b, одинаково с a перпендикулярная c и проходящая через X. Поэтому задание одинаковых перпендикуляров сводится к выделению некоторого семейства (однопараметрического) прямых. Пока флагплоскость не оснащена таким семейством одинаковых перпендикуляров (а мы видели, что произвол в выборе этого семейства совпадает с произволом в выборе постулированной в пучке постулированных, проходящих через общую точку), многих задач нельзя ни решить, ни сформулировать*).

Рассмотрим постулированную плоскость и сконструируем на ней координатную сеть. Берем произвольно постулированную x и на ней точку O. Проводим через O прямую $y \perp x$. По 3.4 это построение однозначно осуществимо. Пусть точка M такова, что $M|x$ и $M|y$. Проводим $MM_1 \perp x$ (по 3.3 это возможно однозначно). Проводим MM_2 так, что $(MM_2, x \perp y)$. Если наша плоскость — не флагплоскость, то MM_2 — обычный перпендикуляр и применимы 3.3 и 4.6. Если же взятая плоскость — флагплоскость, то применима 4.14. Во всяком случае MM_2 существует и единственная в наших предположениях. Отрезки OM_1, OM_2 назовем *квазибельтрамиевыми координатами* точки M. Проведенное рассуждение доказывает теорему:

4.15. Точка, близкая от обеих координатных осей, всегда имеет координаты. О расположении этих точек говорит теорема:

4.16. На осях координат всегда можно отложить отрезки $a = OX = -OX'$, $b = OY = -OY'$ так, что все точки четырехугольника $XYX'Y'$ имеют квазибельтрамиевы координаты. В самом деле, берем на x произвольно точку X, близкую симметричной ей относительно O. В силу I_7 и II_3 такая точка всегда есть. Затем берем на y точку Z, близкую O и X; по II_3 такая точка есть, а по IV_3 она близка также к X'. Если она далека от симметричной ей относительно O, то берем Y на середине отрезка OZ; тогда по I_7 любые две точки внутри четырехугольника $XYX'Y'$ близки друг другу, а следовательно, близки осям и поэтому имеют координаты.

5°. *Многомерные геометрии.* Для конкретизации n-мерной геометрии вводим постулаты k-однородности $(1 \leqslant k < n)$. Рассматриваем пучок всех k-плоскостей, содержащих общую постулированную $(k-1)$-плоскость и содержащихся в общей постулированной $(k+1)$-плоскости. Тогда всегда имеет место одно из трех:

I_k^*. Все k-плоскости этого пучка суть постулированные;

II_k^*. В пучке существует единственная непостулированная k-плоскость;

III_k^*. В пучке есть по меньшей мере две непостулированные k-плоскости;

Соответственно называем эти утверждения *постулатами k-однородности*. Для конкретизации геометрии необходимо задать $n-1$ постулатов

*) Задание „направляющего перпендикуляра", т. е. системы прямых, одинаково с данной перпендикулярных к некоторой прямой, позволяет (см. [13], формула ψ) определить угол — скалярную функцию пары разнопорядковых векторов. А эта функция, как показано в [14], 5.2, есть не что иное как функция действия для электромагнитного поля. Задание же направляющих перпендикуляров равносильно заданию электромагнитного вектор-потенциала.

N_1^*, N_2^*, ..., N_{n-1}^*, где $N^*=\mathrm{I}^*$, II^*, III^*. Все рассуждения рубрики 4° переносятся, mutatis mutandi, на многомерный случай. В частности, определяются одинаковые перпендикуляры к прямой: это пары гиперплоскостей, которые при одном и том же движении, оставляющем неподвижными все точки взятой прямой, переходят каждая в себя. Система координат строится так: в постулированной $(k+1)$-плоскости произвольно берется постулированная k-плоскость ξ^k и на последней считается построенной система координат. Затем проводится $OX_{k+1}\perp\xi^k$. Из всякой точки M при $M|\xi^k$, $M|OX_{k+1}$ можно провести $MM'\perp\xi^k$ и η^k так, чтобы $(\eta^k,\ \xi^k\perp OX_{k+1})$. По определению $(k+1)$-координатой точки считаем отрезок OM_{k+1}, где M_{k+1} — точка пересечения η^k и OX_{k+1}.

Мы видели (4.9), что отрезок изотропной на псевдоплоскости можно сжать движением и поэтому на изотропной нельзя определить длину инвариантно. Аналогичное утверждение имеет место для трехмерной геометрии. Возьмем, например, геометрию с постулатом III_2^*. Тогда:

5.1. Рассмотрим изолированную плоскость, проходящую через постулированную прямую и разделяющую постулированные плоскости и плоскости второго семейства. Углу между постулированными прямыми, лежащими на этой плоскости, нельзя инвариантно приписать числа, т. е. можно движением сжать такой угол во внутрь себя. Доказательство. Берем постулированную прямую a и проводим плоскость α перпендикулярно к a. Очевидно, что α удовлетворяет постулату III_1^*, а изолированная плоскость, упомянутая в теореме (обозначим ее ω), проходит через изолированную прямую $w\in\alpha$. Берем $O\in a$, $O\notin\alpha$ и $A=a\cap\alpha$, $B\in w$. При вращении, найденном в 4.9, при котором все точки a неподвижны, точка B переходит в B', где $AB'B$. Следовательно, $\angle AOB$ сжимается в $\angle AOB'$, чтд. Мы не будем формулировать теоремы, устанавливающей, какие именно k-плоскости „не метризуемы“, т. е. не допускают инвариантного измерения длин или углов. Доказательство ее потребовало бы перебора растущего как 3^n числа случаев, каждый из которых тривиален. Нам достаточно знания, что такие плоскости существуют.

6°. *Постулаты эквидистантности.* Вернемся к плоскости. Для изучения „эвклидовости — неэвклидовости“ нельзя, без нарушения локальности подхода, вводить постулат параллельности (т. е. изучать прямые на бесконечности). Поэтому будем пользоваться трипрямоугольником. Берем постулированную плоскость и на ней две постулированные прямые, одинаково перпендикулярные к некоторой третьей прямой в точках A и B. На первой берем точку D и восставляем в ней перпендикуляр до пересечения в C со второй. Получаем трипрямоугольник $ABCD$. Выбираем упомянутые точки попарно близкими. Логически мыслимо одно из трех:

I_0^*. $AB>DC$;

II_0^*. $AB=DC$;

III_0^*. $AB<DC$.

Мы хотим доказать, что указанные свойства суть свойства плоскости, а не трипрямоугольника. Для этого назовем отрезок AD *направляющим основанием*, а угол C — *четвертым углом*. Если направляющее основание и противолежащий бок одинаково перпендикулярны второму боку (AD, $BC \perp DC$), то говорим, что четвертый угол трипрямоугольника прямой.

6.1. Если хоть в одном трипрямоугольнике четвертый угол прямой, то во всяком трипрямоугольнике с одноименной направляющей на той же плоскости четвертый угол прямой. Доказательство. Проводим через середину E направляющего основания перпендикуляр EF. Пусть F — точка пересечения EF и BC. (Она есть, ибо все рассматриваемые точки попарно близки.) Отразим плоскость относительно EF так, чтобы $AD \to DA$. Тогда DC перейдет в AB. Иначе из точки F можно было бы опустить два одинаковых перпендикуляра на AB. Итак, $AB = DC$ и $FB = FC$ и (BC, $AD \perp EF$). Следовательно, у трипрямоугольника $ABFE$ с вдвое меньшим направляющим основанием четвертый угол тоже прямой. Точно так же убеждаемся, что у любого трипрямоугольника $OMNQ$, у которого направляющее основание $OQ = 2^n \cdot AD$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), а вторые основания равны $OM = AB$, — четвертый угол прямой. По непрерывности у любого трипрямоугольника с одноименной направляющей при $OM = AB$ четвертый угол прямой. Аналогично, проводя (GH, $AD \perp AB$) через середину G основания AB, убедимся, что во всяком трипрямоугольнике $OMNQ$ при $OQ = AD$ четвертый угол прямой. Объединяя, получаем подлежащее доказательству утверждение. Попутно мы обнаружили, что равенство основания противолежащему боку равносильно условию, что четвертый угол прямой. Поэтому мы доказали также:

6.2. Если хоть в одном трипрямоугольнике основание равно противолежащему боку, то тоже имеет место во всяком одноименном трипрямоугольнике на этой плоскости.

6.3. Если $DC < AB$, то угол $\angle C$ тупой; если $DC > AB$, то острый. Для доказательства отложим на AB отрезок $AC' = DC$ и убедимся, что в первом случае $\angle DCC' = \angle AC'C$ тупой (ибо иначе из одной точки, близкой AB, на последнюю можно было бы опустить два одинаковых перпендикуляра с основаниями B и C'); следовательно, $\angle DCB$ тем более тупой, чтд*).

6.4. Если хоть в одном трипрямоугольнике основание больше второго бока $AB > DC$, то тоже имеет место во всяком трипрямоугольнике с одноименным основанием. Доказательство. Сначала убедимся, что теорема верна для любого трипрямоугольника $ABEF$, в котором направляющая вдвое меньше направляющей данного трипрямоугольника, т. е. $AF = \frac{1}{2} AD$. Пусть FE, $AB \perp AD$ и FE пересекает BC в точке E. Достаточно доказать, что $\angle FEB$ тупой. В силу 6.1 и 6.2 он не прямой. Допустим, он острый. Тогда $\angle FEC$ тупой. Следовательно, если прямая перпендикулярна EF в E одинаково с AD и пересекает AB и DC в B_1 и C_1, то $DC_1 < DC$ и $AB_1 > AB$.

*) Отсюда следует, между прочим, что на флаговой неэвклидовой плоскости (постулат II_1^* выполнен, а II_0^* — нет) угол между разнопорядковыми векторами не сохраняется при параллельном переносе по замкнутому контуру. В самом деле, из рис. 7 видно, что при сохранении угла между изолированной AB и постулированной BC в силу единственности изолированной (на флагплоскости $D'C$ совпадает с DC) угол $\angle DCB$ должен был бы равняться $\angle DCB'$, что противоречит 6.3. Ср. [14], 2.8 и [15], формула (9).

Но переворачиванием относительно EF находим, что $DC_1 = AB_1$, а это несовместимо с условием $AB > DC$. Деля пополам и удваивая основание AD, убедимся в справедливости теоремы для любого трипрямоугольника $OMNQ$, у которого $OM = AB$. Повторяя рассуждения для основания AB, получаем сформулированную теорему. Поэтому, резюмируя 6.1 – 4, получаем:

6.5. Для всех трипрямоугольников с одноименным направляющим основанием на одной и той же плоскости имеет место одно и то же из утверждений I_0^*, II_0^*, III_0^*. Поэтому мы можем назвать эти утверждения *постулатами* 0-*однородности* (или *эквидистантности*), характеризующими плоскость. Конкретную геометрию получаем, добавляя к „постоянной аксиоматике" абсолютной геометрии (I – V) систему n постулатов N_0^*, N_1^*, ..., N_{n-1}^*, где $N^* = I^*$, II^*, III^*. Всего таких геометрий, очевидно, 3^n, как и систем Кэли—Клейна*). Обозначаем каждую конкретную геометрию $S(N_0^*, N_1^*, \ldots, N_{n-1}^*)$. При выполнении постулата II_0^* называем геометрию эвклидовой и обозначаем также $R(N_1^*, \ldots, N_{n-1}^*)$.

6.6. Пусть $ABCD$ трипрямоугольник с постулированной направляющей AD. Тогда на однородной плоскости $AB \gtrless DC$ влечет, соответственно, $AD \gtrless BC$. На флагплоскости, независимо от $AB \gtrless DC$, всегда $AD = BC$. На псевдоплоскости $AB \gtrless DC$ влечет соответственно $AD \lesseqgtr BC$. Доказательство. На однородной плоскости основание одноименно направляющей, и по 6.5 для трипрямоугольника $ABCD$ с направляющей AD выполняется тот же постулат эквидистантности, что для $ADCB$ с направляющей AB. На вырожденной плоскости AB и DC суть изолированные прямые (как перпендикуляры к постулированной). Но расстояние между изолированными на флагплоскости по любой прямой одинаково (4.13), следовательно, $AD = BC$. Возьмем псевдоплоскость и пусть $AB > DC$. Из 6.3 вытекает, что тогда $\angle DCB$ тупой. Рассмотрим тот же трипрямоугольник как трипрямоугольник с направляющей AB – прямой второго семейства. Но по теореме 4.9, если перпендикуляр к DC между CD и CB, то перпендикуляр к BC проходит так, что CD между ним и CB; иначе: $\angle DCB$ тупой, а $\angle BCD$ острый (см. рис. 7). Следовательно, по 6.5 для бока BC и основания AD выполняется постулат III_0^*, т. е. $AD < BC$. Аналогично рассуждаем при $AB < DC$. Случай $AB = DC$ исчерпан теоремой 6.2. Короче можно сказать, что на псевдоплоскости для постулированных прямых и

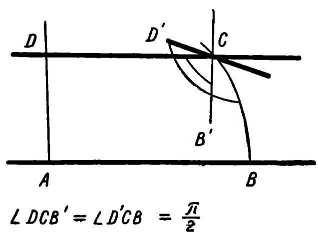

Рис. 7

*) Число *неизоморфных* геометрий, очевидно, меньше. Оно приводится ниже. В проективной трактовке постулату II_0^* соответствует случай, когда абсолют – прямая (двойная, бесконечно удаленная). Постулатам I_0^* и III_0^* соответствуют абсолюты в виде эллипса, параболы и гиперболы, причем в I_0^* направляющее основание пересекает абсолют по паре мнимых точек, а в III_0^* – по паре вещественных точек. См. рис. 8а.

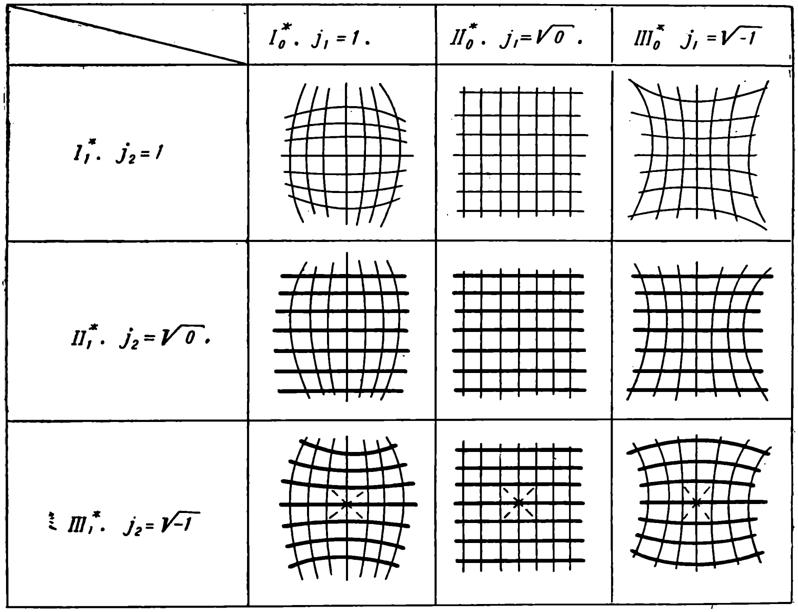
I_0^*. $j_1=1$.
II_0^*. $j_1=\sqrt{0}$.
III_0^* $j_1=\sqrt{-1}$
I_1^*. $j_2=1$
II_1^*. $j_2=\sqrt{0}$.
III_1^*. $j_2=\sqrt{-1}$

Рис. 8

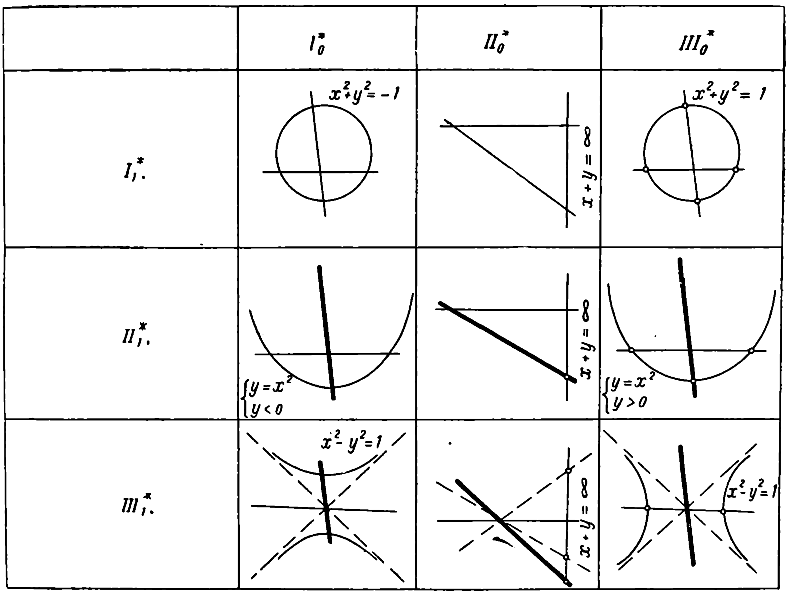
I_0^*
II_0^*
III_0^*
I_1^*.
II_1^*.
III_1^*.
$x^2+y^2=-1$
$x+y=\infty$
$x^2+y^2=1$
$\begin{cases} y=x^2 \\ y<0 \end{cases}$
$x+y=\infty$
$\begin{cases} y=x^2 \\ y>0 \end{cases}$
$x^2-y^2=1$
$x+y=\infty$
$x^2-y^2=1$

Рис. 8а

прямых второго семейства выполняются прямо противоположные постулаты эквидистантности. Теперь мы можем схематически изобразить координатные сети для всех девяти плоских геометрий (см. рис. 8). Тонкими линиями изображены постулированные, толстыми — прямые второго семейства, пунктиром — изолированные. Напомним, что координатные линии перпендикулярны осям.

В трехмерном случае рассмотрим трехгранную призму, боковые грани которой суть трипрямоугольники. Назовем ее прямоугольной призмой и докажем, что она существует.

6.7. Пусть две плоскости γ_1 и γ_2 пересекаются по прямой c, не являющейся изотропной. Берем на c две близкие точки A и B. Проводим через них плоскости α и β, одинаково перпендикулярные к c. Они пересекают двугранный угол $\angle\gamma_1, \gamma_2$ по линейным углам $\angle K_1AK_2$ и $\angle L_1BL_2$ (см. рис. 9). Через K_1 проводим плоскость $\delta \perp AK_1$ и берем точки K_2, L_1, L_2 в этой плоскости. (K_1 взята произвольно на пересечении γ_1 и α.) Все точки берутся близко друг другу и рассматриваемым плоскостям. Утверждаем, что

$$L_1K_1 \perp K_1K_2; \quad L_2K_2 \perp \alpha; \quad L_2L_1 \perp \gamma_1.$$

Для доказательства произведем отражение относительно плоскости α. Тогда $c \to c$ (ибо $c \perp \alpha$). При этом прямая AK_1, лежащая на α, неподвижна. Следовательно, перпендикулярная ей плоскость $\delta \to \delta$. Но $\gamma_i \to \gamma_i$ ($i = 1, 2$). Следовательно, $K_iL_i \to K_iL_i$ как пересечение δ и γ_i. Следовательно, $L_iK_i \perp \alpha$, т. е., в частности, $L_1K_1 \perp K_1K_2$ и $L_2K_2 \perp \alpha$. Произведем отражение относительно γ_1. Так как прямая c неподвижна, то $\alpha \to \alpha$ и $\beta \to \beta$ (ведь α, $\beta \perp c$). По условию $K_2K_1 \perp K_1A$, значит, из $K_2K_1 \perp K_1L_1$ вытекает $K_2K_1 \perp \gamma_1$; следовательно, при нашем отражении прямая K_2K_1 переходит в себя. А так как K_1L_1 неподвижна, то плоскость $\delta \to \delta$. Следовательно, $L_1L_2 \to L_1L_2$ как линия пересечения δ и β. А это значит, что $L_1L_2 \perp \gamma_1$. Построенная призма обобщает эвклидову трехгранную призму. Основания — прямоугольные треугольники $\triangle AK_1K_2$ и $\triangle BL_1L_2$ (прямые углы $\angle K_1$ и $\angle L_1$) с равными углами $\angle A$ и $\angle B$ (как линейные углы двугранного угла). Боковые грани — трипрямоугольники ABL_1K_1, $K_1L_1L_2K_2$, ABL_2K_2 (кроме углов $\angle BL_1K_1$, $\angle L_1L_2K_2$, $\angle BL_2K_2$, все остальные суть равные прямые углы). С ее помощью докажем:

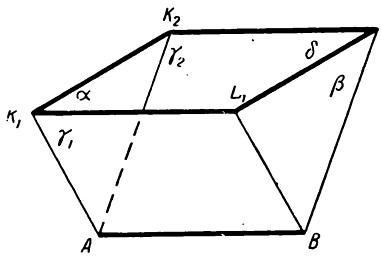

Рис. 9

6.8. Пусть на плоскостях γ_1 и γ_2 призмы выполняется один и тот же постулат эквидистантности для трипрямоугольников с направляющей, одноименной прямой c. Тогда для трипрямоугольников с направляющей, одноименной прямой K_iL_i, на плоскости δ выполняется тот же постулат эквидистантности. Доказательство: для определенности положим, что на γ_1 и γ_2 имеет место постулат I_0^*. Тогда $AK_1 > BL_1$ и $AK_2 > BL_2$. В прямоугольных треугольниках $\triangle AK_1K_2$ и $\triangle BL_1L_2$ углы $\angle A = \angle B$, гипотенуза и катет одного меньше, соответственно, гипотезы и катета другого. Следовательно, второй катет $L_1L_2 < K_1K_2$, а это значит, что трипрямоугольник $K_1K_2L_2L_1$ удовлетворяет постулату I_0^* для прямых K_1L_1. Доказанная теорема позволяет ограничиться постулатами эквидистантности на постулированной плоскости, а в многомерных случаях на всех прочих плоскостях свойства эквидистантности определяются автоматически. В частности*), из теоремы 6.8 вытекает, что на всякой изолированной плоскости, перпендикулярной постулированной прямой, выполняется постулат II_0^*, т. е. эта плоскость эвклидова. В самом деле, проводим через указанную постулированную плоскость, пересекающую нашу плоскость. По 4.2 эта плоскость оказывается вырожденной, а по 6.6 для изолированных на вырожденной плоскости выполняется постулат II_0^*, а следовательно, по 6.8 на взятой первоначально плоскости выполняется II_0^*.

7°. *Метрические соотношения.* В этой рубрике мы устанавливаем формулы для треугольника и трипрямоугольника. Метод вывода не представляет ничего оригинального, а является простым перенесением на псевдоплоскость и флагплоскость метода Гаусса, которым он на 1-однородной плоскости получил эвклидову, эллиптическую и гиперболическую геометрии. Этот метод очень подробно изложен в [5], т. I, поэтому мы излагаем его сжато. Сначала изучим эвклидовы плоскости, т. е. при II_0^*. В 3.2, 4.7 и 4.11 мы видели, что на всех прямых (кроме изотропных на псевдоплоскости) можно, фиксируя масштабы (на постулированной, на прямой второго семейства, на изолированной на флагплоскости), однозначно и инвариантно приписать отрезкам длину. Для единообразия формул удобнее ввести соглашение о согласовании масштабов на псевдоплоскости. Рассмотрим прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является изотропная, а одним из катетов – масштабный отрезок постулированной. Тогда по определению принимаем за масштаб прямых второго семейства второй катет этого треугольника. За масштаб угла между прямыми второго семейства принимаем угол между перпендикулярами к сторонам масштабного угла между постулированными. На эвклидовых плоскостях трипрямоугольник является прямоугольником.

7.1. В прямоугольнике накрест лежащие углы при диагонали равны. Действительно, его противоположные стороны равны (6.1 – 2). Следовательно, диагональ делит прямоугольник на два равных треугольника, а отсюда вытекает равенство указанных углов.

7.2. Если два одинаковых перпендикуляра к третьей прямой пересечены некоторой прямой, то образующиеся соответственные углы равны. Действительно, опустим из каждой точки пересечения перпендикуляр на другую прямую. Получим прямоугольник и воспользуемся 7.1.

*) Из теорем 6.6 и 6.8 следует, что 1-неоднородное неэвклидово пространство не является пространством постоянной кривизны. Например, в псевдонеэвклидовом пространстве есть две взаимно перпендикулярные плоскости, одна из которых имеет положительную кривизну, а другая – отрицательную. В полунеэвклидовом пространстве одна из плоскостей и имеет ненулевую кривизну, а другая – нулевую.

7.3. Возьмем прямоугольный треугольник $\triangle ACB$. Через середину D катета AC проводим DE, $CB \perp AC$ до пересечения в E с гипотенузой AB. Утверждаем, что $AE = EB$ и $DE = \frac{1}{2}CB$. Для доказательства опустим из E EF, $AC \perp CB$. $CFED$ — прямоугольник. По теореме 7.2 $\angle CBE = \angle DEA$. Так как $FE = CD = DA$, то $\triangle ADE = \triangle EFB$, т. е. $AE = EB$ и $DE = FB$. Но $DE = FC$, следовательно, $DE = \frac{1}{2}CB$.

7.4. Если $\triangle ACB$ и $\triangle ADE$ прямоугольные и $\angle BAC = \angle EAD$, то $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{ED}$. Доказательство. В 7.3 это доказано для случая $\frac{AB}{AE} = 2$. Так как всякий отрезок можно записать в двоичном разложении, то теорема верна всегда.

7.5. Пусть на псевдоплоскости $\angle AOB$ прямой и AB изотропная. Проведём через середину C отрезка OA изотропную CD до пересечения в D с OB. Утверждаем, что $OD = DB$. Для доказательства достаточно применить 7.3 и вспомнить про единственность изотропной (в данном направлении).

7.6. Пусть на псевдоплоскости a_1 и a_2 суть прямые, перпендикулярные третьей, а b и c суть одинаково направленные изотропные, отсекающие на первых отрезки B_1C_1 и B_2C_2. Утверждаем, что $B_1C_1 = B_2C_2$. Для доказательства опустим из точек B_1 и C_1 перпендикуляры на a_2. Пусть их основания B' и C'. Тогда $B_2C_2 = B'C' + C'C_2 - B'B_2$. Но $B'C' = B_1C_1$ как противоположные стороны прямоугольника. А $C'C_2 = B'B_2$ (ибо $B_1B' = C_1C'$ и изотропная единственна). Следовательно, $B_2C_2 = B_1C_1$ чтд.

7.7 Пусть OX', OA' соответственно перпендикулярны одноименным прямым OX, OA; прямые AA' и XX' изотропные. Тогда

$$\frac{OX}{OA} = \frac{OX'}{OA'}.$$

В самом деле, при $\frac{OX}{OA} = 2$ это 7.5, а так как всякий отрезок можно представить в двоичном разложении, то теорема верна всегда.

7.8. Пусть OA', OB' соответственно перпендикулярны одноимённым прямым OA и OB. Пусть (AB, $OA' \perp OA$) и ($A'B'$, $OA \perp OA'$) и пусть BB' — изотропная. Тогда AA' также изотропная. Доказательство. Проведём OC симметрично OB относительно OA и OC' симметрично OB' относительно OA'. Получим равнобедренные $\triangle OBC$ и $\triangle OB'C'$, где $AC = AB$, $OC = OB$, $OC \perp OC'$ и т. п. В силу 7.3 и единственности изотропной прямая CC' — изотропная. Продолжим $B'B$ и OA до пересечения в точке D (см. рис. 10) и пусть E — пересечение OA и CC'. Очевидно, $AD = AE$.

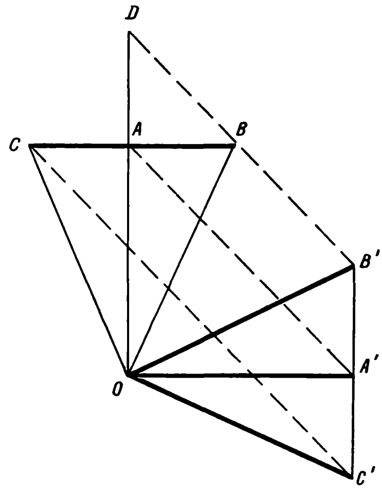

Рис. 10

Тогда по 7.6 изотропная, проходящая через A, встретит $B'C'$ в середине отрезка $B'C'$ $\left(\text{ведь } (B'C',\ DE \perp OA')\right)$, т. е. в A'. Следовательно, AA' — изотропная.

7.9. Если гипотенуза и катет одного треугольника перпендикулярны гипотенузе и катету другого, то соответственные стороны этих треугольников пропорциональны. Для доказательства сначала применяем 7.4 и приводим к треугольникам, катетами которых служат единицы масштаба. Затем пользуемся 7.7—8.

7.10. Пусть $BA \perp AO, AC \perp OB, c \in OB$. Тогда $\frac{OB}{OA} = \frac{AB}{AC} = \frac{OA}{OC}$. Доказательство. Если стороны OA и OB одноименные, то простым переворачиванием приходим к 7.4. Если же OA и OB разноименны, то проводим $OA' \perp OA$ (AA' — изотропная) и $OB' \perp OB$ (BB' — изотропная). По 7.9 $\frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OB}$. Но по 7.2 $\angle CAO = \angle OB'A'$; при этом стороны $B'O$ и $B'A'$ одноименны. Переворачивая угол и применяя 7.4, получим: $\frac{OA'}{OC} = \frac{OB'}{OA} = \frac{A'B'}{AC}$, а отсюда требуемая пропорция.

Теперь докажем теорему Пифагора. Опустим из вершины прямого угла $\angle ACB$ перпендикуляр CD на гипотенузу AB; окажемся в условиях теоремы 7.10; следовательно, $\frac{AB}{CA} = \frac{CA}{AD}$. При этом на однородной плоскости D лежит внутри гипотенузы AB; на вырожденной D совпадает с A; на псевдоплоскости D лежит на продолжении BA за A. (В двух последних случаях считаем, что катет BC одноименен гипотенузе BA, в противном случае следует поменять местами A и B.) Это вытекает из 4.12. Обозначаем $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Имеем

$$c = BA = \begin{cases} BD + DA & \text{на 1-однородной;} \\ BD & \text{на вырожденной;} \\ BD - DA & \text{на псевдоплоскости.} \end{cases}$$

С другой стороны, мы нашли $a^2 = c \cdot BD$ и $b^2 = c \cdot DA$. Следовательно:

7.11. Гипотенуза c и катеты (считая a одноименным c) связаны соотношением:

на 1-однородной плоскости	$c^2 = a^2 + b^2$;
на флагплоскости	$c^2 = a^2$;
на псевдоплоскости	$c^2 = a^2 - b^2$.

Введём числа $\xi = x\iota$, где x — вещественное, а $\iota^2 = 0$. Это подмножество дуальных чисел (см., например, [8], гл. V, § 1, или [12]), мы будем называть их *чисто дуальными числами*. Отрезки изолированных на флагплоскости будем измерять чисто дуальными числами. Отрезки прямых второго семейства на псевдоплоскости будем измерять чисто мнимыми числами. Постулированные же прямые мы всегда измеряем вещественными числами. Тогда, считая a постулированным, мы можем теорему Пифагора записать так:

$$c^2 = a^2 + (bj)^2, \qquad 7.12$$

где a и b вещественные, а $j = 1,\ \iota,\ i$. Считая же b именованным, т. е. вида $b = b'j$, где b' вещественное, пишем еще проще: $c^2 = a^2 + b^2$.

Правда, при выводе формулы 7.12 мы исключали из рассмотрения случай, когда гипотенуза — изотропная. Но в этом случае $c=AB=0$ по 4.9, а по соглашению о единицах масштабов в начале этого параграфа $a=b$. Следовательно, формула $c^2=a^2-b^2$ сохраняет силу в этом случае.

Теперь найдём остальные уравнения треугольника. Рассмотрим окружность радиуса R (радиус — постулированная прямая). Фиксируем один радиус как неподвижный, проведем через центр прямую, перпендикулярную неподвижному радиусу. Рассмотрим угол α между неподвижным и подвижным радиусами. Фиксируем направление отсчёта угла. Образуем две функции: $\varphi(\alpha)$ — отношение проекции подвижного радиуса на неподвижный к длине радиуса. Очевидно, это чётная функция. Вторая функция $\psi(\alpha)$ — отношение проекции подвижного радиуса на прямую, перпендикулярную неподвижному радиусу, к длине радиуса. Очевидно, это нечётная функция. Хорошо известными рассуждениями получим

$$\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)\varphi(\beta)-j^2\psi(\alpha)\psi(\beta), \tag{7.13}$$

где $j=1$ на 1-однородной плоскости (окружность выпуклая замкнутая), $j=\iota=\sqrt{0}$ на флагплоскости (окружность прямолинейна), $j=i=\sqrt{-1}$ на псевдоплоскости (окружность вогнутая, из двух дуг). Отсюда

$$\varphi(\alpha+\beta)+\varphi(\alpha-\beta)=2\varphi(\alpha)\varphi(\beta). \tag{7.14}$$

Тогда по [6], стр. 245—254 (учтя, что решение $\varphi\equiv 0$ противоречит геометрическому смыслу), единственные решения функционального уравнения 7.14 суть

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi(\alpha)\equiv\cos\frac{\alpha}{\alpha_0} & \text{при } j=1 \\ \varphi(\alpha)\equiv 1 & \text{при } j=\iota \\ \varphi(\alpha)\equiv\operatorname{ch}\frac{\alpha}{\alpha_0} & \text{при } j=i \end{array}\right\} \tag{7.15}$$

и при этом

$$\left.\begin{array}{ll} \psi(\alpha)\equiv\sin\frac{\alpha}{\alpha_0} & \text{при } j=1 \\ \psi(\alpha)\equiv k\cdot\alpha & \text{при } j=\iota \\ \psi(\alpha)\equiv\operatorname{sh}\frac{\alpha}{\alpha_0} & \text{при } j=i \end{array}\right\}. \tag{7.16}$$

Здесь α_0 означает некоторую константу, возникающую при решении функционального уравнения. В дальнейшем мы полагаем её равной единице. И в формулах 7.15—16 можно добиться единообразия. Если $f(x)$ вещественная функция вещественного аргумента, то определяем $f(xj)$ результатом подстановки в разложение $f(x)$ в ряд на место x члена xj (см. [8], гл. V). Тогда, в частности, $\cos x\iota\equiv 1$, $\sin x\iota\equiv x\iota$.
Итак,

$$\varphi(\alpha)\equiv\cos\alpha j, \quad \psi(\alpha)\equiv\frac{1}{j}\sin\alpha j. \tag{7.17}$$

Вспоминая определение функций $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$, можем написать:

$$\frac{a}{c}=\cos\beta, \quad \frac{b}{c}=\sin\beta, \tag{7.18}$$

где $\beta=\beta' j$, если a и c одноимённы, и $\beta=\frac{\pi}{2}-\beta' j$, если a и c разноимённы.

На этом закончим рассмотрение эвклидовых плоскостей и перейдём к неэвклидовым. Сначала изучим вырожденные плоскости. В теоремах 7.19—24 мы подразумеваем, не оговаривая, выполнение постулата II_I^*.

7.19. В трипрямоугольниках с одной и той же постулированной направляющей, изолированная боковая сторона пропорциональна основанию (изолированному). Доказательство. Пусть $ABCD$ — трипрямоугольник и AB — изолированное основание. По определению (DA, $CB \perp AB$). Отложим на продолжении AB отрезок $BE = AB$ и проведем FE, $DA \perp AE$. Такой перпендикуляр единственен. С другой стороны, $BC = AD$, следовательно, трипрямоугольник $ABCD$ равен трипрямоугольнику $BEFC$. В частности, $CF = DC$. Следовательно, при удвоении основания ($AE = 2 \cdot AB$) удваивается бок ($DF = 2 \cdot DC$). Отсюда следует требуемая пропорциональность.

Определим поэтому функцию $g(x)$ следующим образом. Пусть $ABCD$ — трипрямоугольник. Тогда $g(AB) = \frac{CD}{AB}$. Имеет место:

$$g(x) \equiv \begin{cases} = \cos \dfrac{x}{x_0} & \text{при постулате Римана } (I_0^*); \\ = 1 & \text{при постулате Эвклида } (II_0^*); \\ = \operatorname{ch} \dfrac{x}{x_0} & \text{при постулате Лобачевского } (III_0^*). \end{cases} \qquad 7.20$$

Доказательство. Берём постулированный отрезок $AD = x$ и откладываем на той же прямой $DE = DG = y$ так, что $AE = x + y$, $AG = x - y$. Находим связь между $g(x+y)$, $g(x-y)$, $g(x)$, $g(y)$. Для этого на перпендикуляре к AD откладываем произвольный отрезок AB и строим трипрямоугольник $ABCD$. Затем на DC как на основании строим трипрямоугольники $DCIE$ и $DCKG$. Отметим точки F и H пересечения прямой BC с изолированными, проходящими через E и G. На рисунке 11 изображён случай, когда выполняется

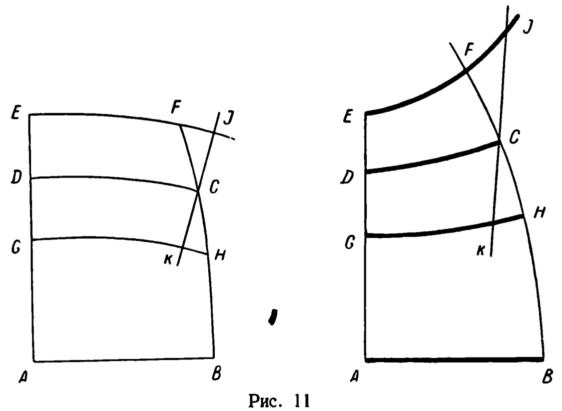

Рис. 11

постулат I_0^*. Тогда $\angle DCH = \angle DCB$ тупой (6.3), т. е. точка K лежит внутри трипрямоугольника $ABCD$, а I — вне. При постулате III_0^* наоборот, а при постулате Эвклида II_0^* $K = H$, $I = F$. Следовательно,

$$EF = EI - j^2 IF,$$
$$GH = GK + j^2 KH,$$

где $j=1$, ι, i при постулате I_0^*, II_0^*, III_0^*, соответственно. По условию $DE=DG$; следовательно, $CI=CK$, $CF=CH$ (ибо все расстояния между изолированными равны). При этом $\angle FCI=\angle HCK$ как вертикальные. Следовательно, $IF=KH$. Итак, независимо от постулата эквидистантности:

$$EF+GH=EI+GK.$$

Но трипрямоугольники $DCIE$ и $DCKG$ равны. Значит $EI=GK$, откуда

$$EF+GH=2\cdot EI.$$

С другой стороны,

$$EF=AB\cdot g(x+y);\quad GH=AB\cdot g(x-y);\quad EI=DC\cdot g(y)=AB\cdot g(x)\cdot g(y).$$

Сопоставляя, получаем функциональное уравнение

$$g(x+y)+g(x-y)=2g(x)\,g(y).$$

Решения его мы указали выше. Если измерять отрезки постулированных вещественными числами при I_0^*, чисто дуальными при II_0^* и чисто мнимыми при III_0^*, то можно всегда писать

$$g(x)\equiv\cos\frac{x}{x_0}, \qquad 7.21$$

где $x=x'j$ и x' и x_0 — вещественные. Число x_0 — натуральная единица масштаба — мы будем для краткости приравнивать единице.

7.22. В прямоугольных треугольниках с общим постулированным катетом изолированный катет пропорционален противолежащему углу. В самом деле, изолированный катет совпадает с дугой окружности на флагплоскости. Теорема поэтому сводится к тривиальному утверждению, что дуга окружности пропорциональна углу, опирающемуся на неё. На этом основании определим функцию $f(x)$ следующим образом. Пусть $\triangle ACB$ прямоугольный ($\angle C$ прямой) и BC — изолированная. Тогда

$$f(AC)=\frac{BC}{\angle CAB}.$$

Найдём вид $f(x)$. Утверждаем, что

$$f(x)\equiv\begin{cases}=\sin\dfrac{x}{x_0} & \text{при постулате } \mathrm{I}_0^*;\\ =k\cdot x & \text{при постулате } \mathrm{II}_0^*;\\ =\mathrm{sh}\,\dfrac{x}{x_0} & \text{при постулате } \mathrm{III}_0^*.\end{cases} \qquad 7.23$$

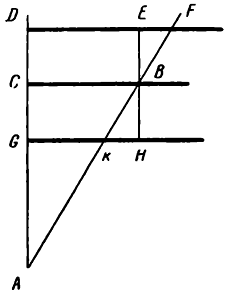

Рис. 12

Доказательство. См. рис. 12. Пусть $AC=x$. От C в обе стороны отложим $CD=CG=y$ так, что $AG=x-y$, $AD=x+y$. Проводим (DF, $GH\perp AC$). Точки F, K суть точки пересечения этих изолированных с AB. В точке B восстановим к CB перпендикуляр, одинаковый с AC. Точку пересечения этого перпендикуляра с DF назовём E, а с GH — назовём H. Так как из точки, близкой прямой (а ведь мы предполагаем все точки и прямые близкими), можно на последнюю опустить единственный перпендикуляр, одинаковый с данным, то E лежит внутри отрезка DF, а H — вне отрезка GK. Следовательно,

$$DF=DE+EF,$$
$$GK=GH-KH.$$

Но $EF=HK$ и $DE=GH$. Значит
$$DF+GK=2\cdot DE.$$
С другой стороны,
$$DF=\angle CAB\cdot f(x+y),\quad GH=\angle CAB\cdot f(x-y),$$
$$DE=CB\cdot g(y)=\angle CAB\cdot f(x)\cdot g(y).$$
Поэтому
$$f(x+y)+f(x-y)=2\cdot f(x)\cdot g(y),$$
где $g(y)$ – вышенайденная функция. Решения этого функционального уравнения, как известно, суть
$$f(x)\equiv\frac{1}{j}\sin\frac{xj}{x_0}. \qquad 7.24$$

Теперь перейдём к случаю произвольной плоскости. Обобщим определение функции $g(x)$. Рассмотрим двупрямоугольник $ABCD$, где $(AD, BC\perp AB)$ и $AD=BC$. Полагаем
$$g(AD)=\lim_{B\to A}\frac{DC}{AB}.$$
Имеют место формулы:
$$g(x)\equiv\begin{cases}\cos\frac{x}{x_0} & \text{при } \mathrm{I}_0^*;\\ 1 & \text{при } \mathrm{II}_0^*;\\ \operatorname{ch}\frac{x}{x_0} & \text{при } \mathrm{III}_0^*.\end{cases} \qquad 7.25$$

В самом деле, при бесконечно малом основании AB можно противолежащую сторону двупрямоугольника DC считать приближенно равной дуге эквидистанты. Дуга же эквидистанты пропорциональна основанию, и тогда повторяются рассуждения, доказывавшие теорему 7.20. Теперь рассмотрим на невырожденной плоскости прямоугольный треугольник со сторонами a, b, c и углами A, B. Утверждаем
$$\cos A=\sin B\cdot\cos a. \qquad 7.26$$
Здесь a – именованное число $a'\cdot j_1$, где $j_1=1$, ι, i в зависимости от постулата эквидистантности. A и B суть числа вида $A'j_2$, $\frac{\pi}{2}-A'j_2$, где $j_2=1$, i в зависимости от постулата 1-однородности ($j_2=\iota$ – вырожденная плоскость – исключено). Катет a считается постулированным. Доказательство. Пусть $\triangle ACB$ – прямоугольный и гипотенуза AB не изотропная. $CB=a$, $CA=b$. Придадим последнему приращение $db=AA'$. Отложим на CA отрезок $CC'=db$. Строим $\triangle A'C'D=\triangle ACB$. Придадим катету a приращение $da=BB'$. Проводим $A'B'$. Приращения da и db выбираются так, чтобы $A'B'$ и AB были одноименны. Опустим из D перпендикуляр $DE\perp AB$. На 1-однородной плоскости DE лежит внутри $\angle BDC'$; на псевдоплоскости – вне (а за DB или за DC' зависит от того, является ли AB постулированной или прямой второго семейства; см. рис. 13 и теорему 4.9). Продолжим ED до пересечения в F с прямой $A'B'$. Проводим $BG\perp AB$ до пересечения в G с прямой $A'B'$.

Так как da и db бесконечно малы, то $\angle CBA\approx\angle CB'A'$ и перпендикуляры к AB являются перпендикулярами к $A'B'$. Отсюда $A'D\approx A'F$ и $EB\approx FG$. Так как $A'D=AB=c$, то $dc=A'B'-A'F=FB'$. Так как CC' бесконечно мало и $BC=DC'$, то $\angle DBC\approx\angle BDC'\approx\frac{\pi}{2}$. На 1-однородной плоскости G между B' и F, следовательно, $dc=FG+GB'$. На псевдоплоскости же F между B' и G либо B' между F и G, в зависимости от того, одноименна гипотенуза катету a или b. Для определенности положим, что гипотенуза — постулированная. Следовательно, $dc=GB'-FG$. Окончательно:

$$dc=B'G+j^2 GF=B'G+j^2 BE,$$

где $j=1$, i, соответственно, при постулатах $\mathrm{I}_{\mathrm{I}}^*$ и $\mathrm{III}_{\mathrm{I}}^*$. Поскольку в бесконечно малом треугольнике выполняется эвклидова геометрия, постольку для бесконечно малого прямоугольного $\triangle BGB'$ имеем

$$B'G=B'B\cdot\cos\angle BB'G=da\cdot\cos\angle CBA,$$

а для бесконечно малого прямоугольного $\triangle BED$ имеем (учтя также равенство углов со взаимно-перпендикулярными сторонами):

$$BE=BD\cdot\sin\angle EDB=BD\cdot\sin\angle CBA.$$

Но

$$BD=CC'\cdot\cos BC=db\cdot\cos a.$$

Следовательно,

$$dc=\cos\angle CBA\cdot da+j^2\cdot\cos a\cdot\sin\angle CBA\cdot db.$$

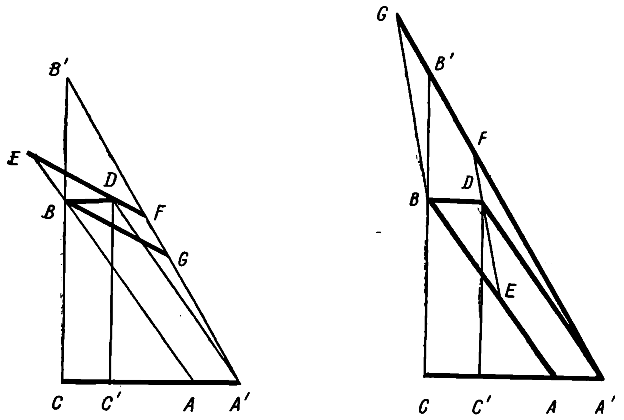

Рис. 13

Аналогично, начиная рассуждение с катета a, получаем (знак j^2, определяется тем, что b и c разноименны):

$$dc=\cos b\cdot\sin\angle CAB\cdot da+j^2\cdot\cos\angle CAB\cdot db.$$

Так как da и db произвольны, то необходимо

$$\cos\beta=\sin\alpha\cdot\cos b, \qquad 7.27$$

$$\cos\alpha=\sin\beta\cdot\cos a. \qquad 7.28$$

Здесь α или β — именованное число, т. е. $\alpha=\alpha' j_2$ или $\beta=\beta' j_2$. Второе из них имеет вид $\alpha=\frac{\pi}{2}-\alpha' j_2$ или $\beta=\frac{\pi}{2}-\beta'\cdot j_2$. Параметр $j_2=1$, i характеризует 1-однородность плоскости. Числа a и b также именованные, т. е. $a=a' j_1$, $b=b'\cdot j_1\cdot j_2$; в зависимости от постулата эквидистантности. При доказательстве мы исключили случай, когда AB — изотропная. Но тогда $\alpha=\infty$ и $\beta=\infty$ и $\operatorname{ch}\alpha=p\cdot\operatorname{sh}\alpha$, где p — любое число. Следовательно 7.27—28, т. е. 7.26 верны и в этом случае. Если бы мы не исключали случая вырожденной плоскости, то точки F и G совпали бы и рассуждение рухнуло бы. Но в этом случае формула 7.26 также сохраняет силу. В самом деле, рассмотрим прямоугольный $\triangle ACB$. Построим трипрямоугольник $CADB$. По определению функций $g(x)$ и $f(x)$ имеем:

$$AC=\beta\cdot f(BC)=\beta\cdot\sin BC;\quad BD=\cos\alpha\cdot f(AD)=\cos\alpha\cdot\sin BC;$$

$$BD=AC\cdot g(BC)=AC\cdot\cos BC;$$

откуда

$$\cos\alpha=\beta\cdot\cos BC=\sin\beta\cdot\cos a,$$

что совпадает с 7.26 при $j_2=\iota$. $\left(\text{Угол } \alpha=\frac{\pi}{2}-\alpha'\iota, \text{ конечно.}\right)$

Выведем теперь другую формулу. В прямоугольном треугольнике, если a и c — постулированные:

$$\cos aj_1\cos\beta=\cos cj_1\sin\alpha. \tag{7.29}$$

Для доказательства рассмотрим сначала невырожденные плоскости. Передвинем $\triangle ACB$ вдоль CA на $db=AA'=CC'$. Вершина B перейдёт в D. Спроектируем новую гипотенузу $A'D$ на старую; пусть $DE\perp AB$ и $A'F\perp AB$. Подсчитаем двояко DE (см. рис. 14). Поскольку в бесконечно малом выполняется одна из эвклидовых геометрий, постольку приближённо $BD\perp C'D$, следовательно, $\angle BDE\approx\angle ABC=\beta$, как углы с перпендикулярными сторонами. Из бесконечно малого прямоугольного $\triangle BED$:

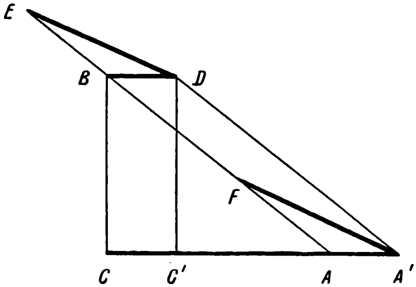

Рис. 14

$$DE=BD\cdot\cos\angle BDE=BD\cdot\cos\beta=db\cdot\cos a\cdot\cos\beta. \tag{7.30}$$

С другой стороны, $\angle C'A'D=\angle CAB=\angle A'AF$. Но $\angle A'AF+\angle FA'A\approx\frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\angle FA'D=\frac{\pi}{2}$. Значит, четырёхугольник $FA'DE$ — трипрямоугольник. Поэтому $ED=FA'\cdot\cos FE$. Но из $\triangle AFA'$

$$FA'=AA'\cdot\sin\angle A'AF$$

и

$$FE\approx A'D=AB=c;$$

окончательно:

$$DE=db\cdot\sin\alpha\cdot\cos c.$$

Сопоставляя с 7.30, получаем доказываемую формулу 7.29, или в развёрнутом виде $\left(\alpha=\frac{\pi}{2}-\alpha'\cdot j_2\right)$:

$$\cos aj_1\cdot\cos\beta j_2=\cos cj_1\cdot\sin\alpha.$$

Аналогично, если гипотенуза — прямая второго семейства,

$$\cos aj_1\cdot\cos\beta=\cos cj_1j_2\cdot\sin\alpha j_2,$$

где $\beta=\frac{\pi}{2}-\beta' j_2$. Прежде чем доказывать эту формулу для вырожденной плоскости, заметим, что в силу 7.27—28 она эквивалентна формуле

$$\cos aj_1 \cdot \cos bj_1 j_2 = \cos c. \tag{7.31}$$

Но на вырожденной плоскости $\cos b\cdot j_1\cdot\iota\equiv 1$, $a=c$, и поэтому 7.31 очевидна, а этим доказана полностью 7.29.

Мы видим, что тригонометрия треугольника выражается формулами сферической тригонометрии, но отрезки и углы следует считать не только вещественными, но дважды именованными (в зависимости от постулата эквидистантности и постулата 1-однородности). Заметим, что для практического единообразного охвата всех плоских тригонометрий удобнее выразить все функции через тангенс. Подробно формулы этих геометрий см. [7]. Нам понадобятся только формулы

$$\cos\varphi=\frac{\operatorname{tg} OX}{\operatorname{tg} OM}, \tag{7.32}$$

$$\sin\varphi=\frac{\operatorname{tg} OY}{\operatorname{tg} OM}, \tag{7.33}$$

$$\operatorname{tg}^2 OM=\operatorname{tg}^2 OX+\operatorname{tg}^2 OY, \tag{7.34}$$

где OX и OY суть определённые в 4° квазибельтрамиевы координаты точки M. Сами числа $\operatorname{tg} OX=x$, $\operatorname{tg} OY=y$ назовём *бельтрамиевыми координатами* точки. Теперь перейдём к трипрямоугольнику. Вычисляя двояко диагональ AC (сначала по 7.34, а потом по 7.31), получим

$$\frac{\operatorname{tg} DC}{\operatorname{tg} AB}=\cos AD, \tag{7.35}$$

где AB — основание, DC — противолежащий бок, AD — направляющее основание.

8°. *Полнота аксиоматики.* Мы уже убедились, что по выборе системы координат, всякой точке из некоторой области вблизи начала координат можно однозначно приписать n чисел (см. рубрику 5°); если, как было указано в конце предыдущей рубрики, ввести бельтрамиевы координаты $x_k=\operatorname{tg}\frac{OX_k}{R_k} j_1\cdot j_2\cdot\ldots\cdot j_k$, где $j_s=1$, ι, i, в зависимости от постулата s-однородности, то можно сказать, что точка моделируется системой n именованных чисел. Найдём, как моделируются движения, затем — как моделируются прямые и вообще k-плоскости. Так мы придём к однозначно определяемой модели наших геометрий, чем докажем полноту аксиоматики. Важно отметить, что мы моделируем не всю плоскость (пространство), но лишь область на плоскости (в пространстве). Заданная стандартная область нашего пространства однозначно моделируется в виде области некоторого сферического пространства с именованными координатами. Движением можно покрыть всё пространство такими стандартными областями. Но при этом не исключено, что на аналитической модели произойдёт многократное (многолистное) покрытие. Поэтому мы доказываем лишь *локальную* полноту аксиоматики.

Уравнения вращения в постулированной плоскости вокруг начала координат находятся из требования сохранения длины радиус-вектора

$$\operatorname{tg}^2 OM=x^2+y^2=x'^2+y'^2$$

(см. 7.34) и соотношений 7.32–33:

$$\frac{x}{\operatorname{tg} OM}=\cos\varphi, \quad \frac{x'}{\operatorname{tg} OM}=\cos(\varphi-\alpha).$$

Получаем:

$$\left.\begin{aligned} x'&=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\\ y'&=-x\sin\alpha+y\cos\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

Здесь $x=\overset{*}{x}j_1$, $x'=\overset{*}{x}'j_1$, $\alpha=\overset{*}{\alpha}j_2$, $y=\overset{*}{y}j_1j_2$, $y'=\overset{*}{y}'j_1j_2$, где $\overset{*}{x}$, $\overset{*}{x}'$, $\overset{*}{\alpha}$, $\overset{*}{y}$, $\overset{*}{y}'$ – вещественные, а j_1, $j_2=1$, ι, i.

Уравнения переноса вдоль оси абсцисс. Перенесём O в положение O'. Обозначим $OO'=a$. Проведём $MX\perp OX$ и подсчитаем MX двояко в старой и новой системе из трипрямоугольников по формуле 7.35. Получим

$$\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{y'}{\sqrt{1+x'^2}}.$$

Применяя теорему сложения тангенса, имеем окончательно:

$$\left.\begin{aligned} x'&=\frac{x-a}{1+ax},\\ y'&=\frac{y\sqrt{1+a^2}}{1+ax}.\end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

Здесь $a=\overset{*}{a}j_1$, где $\overset{*}{a}$ – вещественное, а j_1, x, y таковы же, как в 8.1. Важно отметить, что знаменатели в 8.2 одинаковы. Поэтому любое линейное уравнение $Ax+By+C=0$ при преобразованиях 8.1–2 переходит в линейное же. Так как уравнение прямой, проходящей через начало координат, имеет вид

$$y=kx \tag{8.3}$$

в силу 7.32–33, то мы можем заключить отсюда, что уравнение всякой прямой линейно, т. е. имеет вид:

$$Ax+By+C=0. \tag{8.4}$$

Обратное очевидно. Также очевидно, что в n-мерном случае движение моделируется дробно-линейными преобразованиями, а k-плоскости моделируются системами линейных уравнений. Наряду с именованными координатами x_1, x_2, ..., x_n вводим избыточную координату ξ_0, всегда вещественную и определяемую формулой

$$\xi_0=\cos OM, \tag{8.5}$$

где OM – радиус-вектор точки. Затем вводим координаты:

$$\xi_k=x_k\cdot\xi_0 \qquad (1\leqslant k\leqslant n). \tag{8.6}$$

Используя тождества

$$\operatorname{tg}^2 OM=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2,$$

$$1+\operatorname{tg}^2 OM=\frac{1}{\cos^2 OM},$$

получаем, что выполняется

$$\xi_0^2+\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2=1, \tag{8.7}$$

т. е. точка нашего пространства действительно моделируется точкой на сфере 8.7 с именованными координатами. Уравнение гиперплоскости принимает вид

$$A_0\xi_0+A_1\xi_1+\ldots+A_n\xi_n=0, \tag{8.8}$$

т. е. гиперплоскость моделируется дугой большого круга на сфере. Движения оказываются линейными преобразованиями, ибо 8.1 остаются линейными, а 8.2 заменяются линейными. В самом деле, обозначим

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}=\cos\gamma,$$

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\sin\gamma,$$

и получим

$$\zeta'=\frac{1}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}=\frac{(1+ax)\zeta}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{\zeta+a\xi}{\sqrt{1+a^2}},$$

а поэтому

$$\left.\begin{aligned}\xi'&=\xi\cos\gamma-\zeta\sin\gamma,\\ \eta'&=\eta,\\ \zeta'&=\xi\sin\gamma+\zeta\cos\gamma.\end{aligned}\right\}\qquad 8.9$$

Итак, движениям сопоставляются вращения сферы 8.7. Этим мы окончательно доказали, что наша аксиоматика полна в том смысле, что всякая область нашего пространства, содержащая только попарно близкие точки, однозначно моделируется в виде области на указанной сфере. Такая область есть (см. 4.16). Для однозначного локального определения геометрии необходимо и достаточно к аксиомам абсолютной геометрии I—V групп добавить набор n постулатов N_0^*, N_1^*, ..., N_{n-1}, где $N^*=\mathrm{I}^*$, II^*, III^*. Поэтому получаемую геометрию естественно обозначать $S(N_0^*, N_1^*, \ldots, N_{n-1}^*)$. Если учесть, что задание постулата k-однородности равносильно выбору наименования $\mathrm{j}_{k+1}=j_1\cdot j_2\cdot\ldots\cdot j_{k+1}$ $(k+1)$ -координатной оси, то ту же геометрию можно обозначить так:

$$S(\mathrm{j}_1, \mathrm{j}_2, \ldots, \mathrm{j}_n).$$

При $j_1=\iota$ естественно обозначать

$$R(\mathrm{j}_2, \ldots, \mathrm{j}_n).$$

Указанное сопоставление аналитической модели совершается однозначно по выборе осей координат и единицы масштаба. Но при этом мы не ставили вопроса о моделировании отношения близости. Чтобы добиться однозначного моделирования отношения близости, нам придется ввести ещё одну аксиому. Прежде всего, отметим, что отношение близости не лишнее. В самом деле, нашей аксиоматикой охватывается, в частности, случай обычной сферической геометрии, т. е. случай замкнутой прямой. Но на замкнутой прямой нельзя, как известно, ввести отношения между для всех пар точек. Иначе:

8.10. Если прямая замкнута, то не всякие две точки прямой близки друг другу. Доказательство. Пусть прямая a замкнута и её длина L. Допустим, что всякие две точки этой прямой близки. Берём произвольно точку $A\in a$. По обе стороны от неё откладываем отрезки $\frac{L}{3}$; получаем точки B и C. При этом $AB=BC=CA=\frac{L}{3}$. Согласно I_8 из этих трёх точек одна находится между двумя другими. Если надо, изменим обозначения так, чтобы ABC. Теперь устроим движение, совместив B с A, а C с B. При этом, очевидно, $A\to C$. Так как между-отношение сохраняется при движении, то BCA. Но ABC и BCA одновременно – противоречит I_2, чем доказывается теорема.

Итак, если эвклидовы геометрии можно построить, не вводя отношения близости, то для построения всех рассмотренных геометрий отношение близости необходимо. Но наша аксиоматика не определяет отношение близости однозначно. Например, можно взять любое число d, подчинённое в случае замкнутости прямой условию $d \leqslant \frac{L}{3}$ (мы не станем останавливаться на доказательстве того, что важна именно треть длины прямой), и взять модель соответствующей геометрии, считая расстояние до первой далёкой точки равным d, т. е. считать точки A и B близкими тогда и только тогда, когда $AB<d$. В частности, построенной аксиоматике удовлетворяет модель эвклидовой геометрии, в которой ,,точки A и B близки" означает, что длина AB меньше единицы или двух или т. п. Дабы устранить эту неоднозначность, введём аксиому полноты в виде:

VI. Расстояние AB между двумя пересекающимися прямыми является монотонной функцией удаления OA от их общей точки O, если $O|A$ и только если $O|A$.

Расстояние AB между двумя пересекающимися прямыми выражается через угол α их пересечения и удаление OA от общей точки известной формулой сферической геометрии

$$\sin ABj_1j_2 = \sin OAj_1 \cdot \sin \alpha j_2. \qquad 8.11$$

Поэтому, пока $OA < \frac{\pi}{2}$, расстояние AB заведомо растёт монотонно. Но при $OA \geqslant \frac{\pi}{2}$, монотонность нарушается, если $j_1 = 1$. Если же $j_1 = \iota$, i, то формула 8.11 принимает вид

$$ABj_2 = OA \cdot \sin \alpha j_2,$$
$$\operatorname{sh} ABj_2 = \operatorname{sh} OA \cdot \sin \alpha j_2$$

и, значит, расстояние всегда растёт монотонно. В силу аксиомы VI отсюда следует, что

8.12. Если две точки A и O можно соединить прямой, то они близки тогда и только тогда, когда их расстояние $OA < \frac{\pi}{2}$ при постулате Римана I_0^*; при остальных постулатах эквидистантности они близки всегда.

Если условиться считать числа xi, $x\iota$, $xi\iota$ и т.п. при любом положительном x меньшими любого положительного числа, то теорему 8.12 можно сформулировать так:

8.13. Если существует прямая OA, то $O|A$ равносильно $OAj < \frac{\pi}{2}$, где j определяется постулатом эквидистантности для прямой OA. Этим достигается однозначная определенность моделирования отношения близости.

Близкими считаем те и только те пары точек, расстояние между которыми не превышает $\frac{\pi}{2}$. Все особенности, возникающие в формулах при $\frac{\pi}{2}$, трактуются теперь как следствие того, что точки стали далёкими друг от друга.

В заключение коснемся вопроса о многолистном покрытии сферы. На 1-однородной плоскости оказывается возможным только однократное покрытие. Но при нарушении постулата I_1^*, когда сфера приобретает топологию эвклидового цилиндра, многократное покрытие оказывается возможным. Например, аналитическая модель:

точка	пара вещественных чисел (x, y), $-p\,\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant p\,\frac{\pi}{2}\ (\mathrm{mod}\,p\pi)$; $-\infty < y < +\infty$;
прямая	уравнение $Ax+By+C=0$;
A близка B	$\lvert x_A - x_B \rvert < \frac{\pi}{2}$;
B между A и C	$\lvert x_A - x_C \rvert < \frac{\pi}{2}$, $x_B = \frac{x_A+\lambda x_C}{1+\lambda}$, $y_B = \frac{y_A+\lambda y_C}{1+\lambda}$, $0<\lambda<\infty$;
движение	преобразование $\begin{cases} x' = \pm x + a \\ y' = bx \pm y + c \end{cases}$;

удовлетворяет аксиомам I – VI и постулатам I_0^*, II_1^* независимо от того, каково p (любое натуральное число или бесконечность). При $p=2$ получаем обычное однолистное покрытие, а при $p=1$ – проективную модель.

Итак, полнота предложенной аксиоматики доказана.

Общее число локально неизоморфных геометрий может быть подсчитано так. Пусть $r-1$ – число дуальных единиц, входяших в наименования координат причем $m_k - m_{k-1}$ – размерности подпространств с одним и тем же множителем дуальности: $m_{k-1} < \mu_k \leqslant m_k$ влечет, что $\mathrm{j}_{\mu_k} = \alpha_{\mu_k} \cdot \iota_1 \cdot \ldots \cdot \iota_{k-1}$, где α_{μ_k} – вещественное или мнимое. При каждом таком разбиении числа n на r слагаемых $\sum\limits_{k=1}^{r} m_k - m_{k-1}$ коэффициент α_{μ_1} может независимо до m_1 раз принимать значение единица, включая пустое множество случаев. Прочие же коэффициенты α_{μ_k} принимают значение единица точно $m_k - m_{k-1}$ раз. Поэтому общее число различных геометрий при фиксированном разбиении равно $(m_1+1)\cdot(m_2-m_1)\cdot\ldots\cdot(m_r-m_{r-1})$. Суммируя по всем возможным разбиениям, получим

$$N_n = \sum_{r=1}^{n} \sum_{0 \leqslant m_{i-1} \leqslant m_i \leqslant n} (1+m_1)\cdot(m_2-m_1)\cdot\ldots\cdot(n-m_{r-1}).$$

Эта сумма вычисляется двояким подсчетом разложений в ряд выражения

$$\frac{x}{1-3x+x^2}$$

и оказывается равной

$$N_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{(3+\sqrt{5})^{n+1}-(3-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

Отметим еще связанное с этим обозначение описанных геометрий через ${}^{l_0\ldots l_r}S_n^{m_0\ldots m_{r-1}}$ вместо $S(\mathrm{j}_1, \ldots, \mathrm{j}_n)$ или ${}^{l_1\ldots l_r}R_n^{m_1\ldots m_{r-1}}$ вместо $R(\mathrm{j}_2, \mathrm{j}_3, \ldots, \mathrm{j}_n)$. В таком обозначении сразу выделяется неизоморфные геометрии.

В заключение хочу отметить, что для написания этой статьи большое значение имели ценные советы В. А. Залгаллера, И. Д. Заславского, Ю. Г. Решетняка и Б. А. Розенфельда, высказанные в разное время.

Ленинград (ЛОМИ)

Поступила в редакцию
9.IX.1964

Примечание ко всем рисункам

В рисунках приняты следующие обозначения. Тонкие сплошные линии обозначают постулированные прямые (всюду, кроме рис. 8а, где они обозначают также вещественный или мнимый абсолют). Жирные сплошные линии обозначают метризуемые прямые, не являющиеся постулированными. Тонкие пунктирные линии обозначают изотропные на псевдоплоскости (всюду, кроме рис. 9, где пунктиром указана невидимая часть постулированной прямой). Такое обозначение принято для типографского удобства, но нагляднее изображение разноименных прямых разноцветными линиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. И. Пименов, К основаниям геометрии, ДАН СССР, 1964, **155**, № 1, 44–46.
2. Р. И. Пименов, Аксиоматическое исследование пространственно-временных структур, Тр. III-его Всесоюзного математического съезда, 1956, т. 4, 78–79, Москва, 1959.
3. И. В. Парнасский, Аксиоматическое построение трехмерной параболической геометрии, Уч. зап. Орловского пед. института, 2, № 2, 3–40 1956.
4. Д. Гильберт, Основания геометрии, М., 1948.
5. В. Ф. Каган, Основания геометрии, т. 1, М., 1949, т. 2, М., 1956.
6. М. Я. Цыркин, К вопросу об определении тригонометрических функций с помощью функциональных уравнений, Математическое просвещение, 1961, № 6, 245.
7. Н. М. Макарова, Геометрия Галлилея–Ньютона, Уч. зап. Орехово-Зуевского пед. института, 1955, 1, № 1, 83; там же 1957, 7, № 2, 5.
8. Б. А. Розенфельд, Неевклидовы геометрии, М., 1955.
9. И. М. Яглом, Б. А. Розенфельд, Е. У. Ясинская, Проективные метрики, Успехи математических наук, 1964, **19**, вып. 5, 51–113.
10. A. Tarski, A decision method for elementary algebra and geometry, Los Angelos, 1951.
11. H. Guggenheimer, Topology and elementary geometry, Proc. Amer. Math. Soc., 15, 164–173, 1964.
12. И. М. Яглом, Комплексные числа, М., 1963.
13. Р. И. Пименов, Алгебра флагтензоров, Вестник ЛГУ, № 13, 150, 1964.
14. Р. И. Пименов, Применение полуримановой геометрии к пятимерной единой теории поля, ДАН СССР, 1964, **157**, № 4, 795.
15. Р. И. Пименов, К определению полуримановых пространств, Венстник ЛГУ, № 1, 137—140, 1965.

ERDVIŲ SU JUDĖJIMŲ MAKSIMALINE GRUPE VIENINGA AKSIOMATIKA

R. PIMENOVAS

(*Reziumė*)

Duota vieninga aksiomatika, apimanti visas Keli–Kleino sistemas, t. y. erdves ${}^{l_1\ldots l_r}R_n^{m_1\ldots m_{r-1}}$ ir ${}^{l_0\ldots l_r}S_n^{m_0\ldots m_{r-1}}$. Ištirta aksiomatika yra Hilbento aksiomatikos modifikacija. Pagrindiniai skirtumai: pakeista „tarp“ prasmė (kad ji tiktų uždarai kreivei) ir išskirta tokių k-mačių plokštumų klasė $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$, kurios judėjimu gali būti viena su kita sutapatintos. Išaiškinta autoriaus pasiūlyto vieningos lauko teorijos modelio kai kurių invariantų geometrinė prasmė.

UNIFIED AXIOMATICS OF SPACES WITH MAXIMAL MOVEMENT GROUP

R. PIMENOVAS

(*Summary*)

We expose an axiomatical system, which gives all the systems of Cailey–Klein, i. e. all the spaces ${}^{l_1\ldots l_r}R_n^{m_1\ldots m_{r-1}}$ and ${}^{l_0\ldots l_r}S_n^{m_0\ldots m_{r-1}}$. The axiomatics is the modified Hilberst's axiomatics. The principal differences are: between-relation is modified to fit the case of the closed line and a class of k-planes $(1 \leqslant k \leqslant n)$ is fixed; each k-plane of the class may be transformed onto any other k-plane of the class by a movement. The axiomatics is consistent and complete (in a sense a standard domain of our spaces is isomorphed to a standard model). Some invariants of the author's unified field theory are explained.