О СЕКУЩЕЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ПРОСТРАНСТВА КОРРЕЛЯТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. А. РАЧЕНЕ

В статье [1] К. И. Гринцевичюса построено многообразие коррелятивных элементов трехмерного проективного пространства (это многообразие является пятимерным) и рассмотрен комплекс коррелятивных элементов (четырехмерное многообразие коррелятивных элементов). В настоящей статье рассматриваются аналогичные понятия в многомерном пространстве.

1. Исследование проводится в $(n-1)$-мерном проективном пространстве V_{n-1}. Точки $A_i (i, j, k=1, 2, \ldots, n)$ являются вершинами подвижного репера этого пространства. Инфинитезимальные преобразования пространства V_{n-1} определяются уравнениями [2]:

$$dA_i=\omega_i^j A_j.$$

Формы ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры:

$$D\omega_i^j=[\omega_i^k \omega_k^j].$$

Система линейных дифференциальных уравнений

$$\omega_p^\alpha=0 \tag{1}$$

$(p, q, r, s=1, 2, \ldots, m;\quad \alpha, \beta, \gamma, \delta=m+1, m+2, \ldots, n;\quad 2\leqslant m\leqslant n-2)$ вполне интегрируема. Она содержит $m(n-m)$ уравнений.

Первые интегралы системы (1) определяют плоскость $(A_1, A_2, \ldots A_m)$, которую обозначим P_{m-1}.

Система линейных дифференциальных уравнений

$$\omega_p^\alpha=0,$$
$$d\rho+\omega_\alpha^\alpha-\frac{n-m}{m}\,\omega_p^p=0 \tag{2}$$

тоже вполне интегрируема. Она содержит $m(n-m)+1$ уравнений.

2. Инвариантность точки $x^i A_i$ определяется уравнениями [2]:

$$dx^i=-x^j\omega_j^i+x^i\Theta;$$
$$D\Theta=0. \tag{3}$$

Уравнение

$$u_{ij}x^i y^j=0 \tag{4}$$

определяет корреляцию в пространстве V_{n-1}, т. е. точке $x^i A_i$ ставит в соответствие плоскость, координаты текущей точки которой обозначены через y^j.

Условия инвариантности корреляции (4)

$$du_{ij}=u_{ik}\omega_j^k+u_{kj}\omega_i^k+u_{ij}\omega;$$
$$D\omega=0 \tag{5}$$

получим, если продифференцируем уравнение (4), считая, что координаты (x^i) и (y^j) удовлетворяют условиям (3).

Уравнения (5) определяют дифференциалы компонент однородного геометрического объекта u_{ij}.

Корреляция (4) индуцирует в плоскости P_{m-1} корреляцию

$$u_{pq}x^p x^q = 0, \tag{6}$$

которая определяется коэффициентами u_{pq}.

Из уравнений

$$du_{pq} = u_{pr}\omega_q^r + u_{rq}\omega_p^r + u_{pq}\omega + u_{p\alpha}\omega_q^\alpha + u_{\alpha q}\omega_p^\alpha, \tag{7}$$

или

$$du_{pq} = u_{pr}\omega_q^r + u_{rq}\omega_p^r + u_{pq}\omega \pmod{\omega_p^\alpha}$$

следует, что коэффициенты u_{pq} в свою очередь образуют геометрический объект, который является подобъектом объекта u_{ij}.

Определитель

$$U = \det \| u_{ij} \|$$

является относительным инвариантом, так как его дифференциал имеет вид:

$$dU = U(2\omega_i^i + n\omega). \tag{8}$$

Определитель

$$u = \det \| u_{pq} \|$$

из коэффициентов корреляции (6), заданной в плоскости P_{m-1}, также является относительным инвариантом, так как, в силу (7),

$$du = u(2\omega_r^r + m\omega) + \tilde{u}^{pq}(u_{p\alpha}\omega_q^\alpha + u_{\alpha q}\omega_p^\alpha), \tag{9}$$

где $\tilde{u}^{pq}$ определяются соотношениями:

$$\tilde{u}^{pr}u_{qr} = u\delta_q^p, \quad \delta_q^p = \begin{cases} 1, & \text{когда } p = q, \\ 0, & \text{когда } p \neq q. \end{cases}$$

Из уравнений (8), (9) получаем:

$$d\left(\frac{u^{\frac{n}{m}}}{U}\right) = 2\,\frac{u^{\frac{n}{m}}}{U}\left(-\omega_\alpha^\alpha + \frac{n-m}{m}\,\omega_p^p\right) \pmod{\omega_p^\alpha},$$

или

$$d\rho + \omega_\alpha^\alpha - \frac{n-m}{m}\,\omega_p^p = 0 \pmod{\omega_p^\alpha}, \tag{10}$$

где

$$\rho = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u^{\frac{n}{m}}}{U}\right|,$$

или

$$e^{2\rho}\left|\det \| u_{ij} \|\right| = \left|\det \| u_{pq} \|^{\frac{n}{m}}\right|. \tag{11}$$

3. В корреляции (4) число однородных коэффициентов равно n^2. Считая, что коэффициенты u_{ij} корреляции (4) являются однородными координатами точки пространства U_{n^2-1}, получим, что точке пространства U_{n^2-1} соответствует корреляция в пространстве V_{n-1}.

В пространстве U_{n^2-1} имеем два скрещивающихся подпространства:

1) $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ - мерное подпространство полярных соответствий, определяемое уравнениями

$$u_{ij}=u_{ji}; \tag{12}$$

2) $\frac{(n+1)(n-2)}{2}$ - мерное подпространство нуль-систем, определяемое уравнениями

$$u_{ij}=-u_{ji}. \tag{13}$$

Когда плоскость P_{m-1} стоит на месте, уравнение (11) определяет в пространстве U_{n^2-1} однопараметрическое (параметр ρ) семейство гиперповерхностей, присоединенное к одной плоскости P_{m-1}.

Если плоскость P_{m-1} перемещается, т. е. изменяются координаты этой плоскости $\big($число независимых координат плоскости P_{m-1} равно $m(n-m)\big)$, уравнение (11) определяет семейство гиперповерхностей пространства U_{n^2-1}, зависящее от $m(n-m)+1$ параметров.

Так как уравнения (2) определяют инвариантность уравнения (11) и плоскости P_{m-1}, первые интегралы этих уравнений задают плоскость P_{m-1} и одну гиперповерхность семейства (11).

Коррелятивным элементом назовем пару, состоящую из плоскости и одной гиперповерхности семейства (11).

Если постоянные первых интегралов системы (2) являются переменными параметрами, то коррелятивный элемент описывает расслоенное пространство $W_{m(n-m)+1}$. Базисом этого пространства служит $m(n-m)$ - мерное многообразие плоскостей P_{m-1}, слоем – одномерное многообразие коррелятивных элементов.

4. Дифференциальными формами инфинитезимального перемещения точки пространства $W_{m(n-m)+1}$, т. е. коррелятивного элемента, являются формы ω_p^α, $\Delta\rho$. Секущая гиперповерхность в расслоенном пространстве $W_{m(n-m)+1}$ определяется внешними дифференциальными уравнениями:

$$\begin{gathered}\Delta\rho=\lambda_\alpha^p\omega_p^\alpha,\\ [\Delta\lambda_\alpha^p,\ \omega_p^\alpha]=0,\end{gathered} \tag{14}$$

где

$$\Delta\rho=d\rho+\omega_\alpha^\alpha-\frac{n-m}{m}\,\omega_p^p,$$

$$\Delta\lambda_\alpha^p=d\lambda_\alpha^p+\lambda_\alpha^q\omega_q^p-\lambda_\beta^p\omega_\alpha^\beta-\frac{n}{m}\,\omega_\alpha^p.$$

Так как коэффициент при $\Delta\rho$ в первом уравнении системы (14) не равен нулю, то секущая гиперповерхность с каждым слоем имеет только одну общую точку.

5. Дадим геометрическое истолкование объекта λ_α^p в пространстве V_{n-1}.

Общие точки гиперповерхности (11) и подпространства полярных соответствий (12) составляют поверхность S, размерность которой равна

$$(n^2-1)-1-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2+n-4}{2}.$$

Если плоскость P_{m-1} меняется, поверхность S описывает семейство поверхностей. Уравнения характеристики поверхности S получим, присоединяя к уравнениям (11) и (12) частные производные этих уравнений по параметрам семейства.

Дифференцирование уравнения (11) даёт:

$$2e^{2\rho}\,d\rho=\frac{n}{m}\,\frac{1}{u}\,\frac{u^{\frac{n}{m}-1}}{U}\,du-\frac{u^{\frac{n}{m}}}{U}\,\frac{dU}{U},$$

или, в силу (8), (9), (12), (14),

$$\lambda^p_\alpha\omega^\alpha_p=\frac{n}{2mu}\,\tilde{u}^{pq}(u_{p\alpha}\omega^\alpha_p+u_{\alpha q}\omega^\alpha_p). \qquad (15)$$

Дифференцирование уравнений (12) к новым условиям не приводит.

Потребовав, чтобы уравнение (15) удовлетворялось при произвольных значениях ω^α_p, получаем:

$$\lambda^p_\alpha=\frac{n}{2mu}\,\tilde{u}^{pq}(u_{q\alpha}+u_{\alpha q}),$$

или

$$u_{p\alpha}=\frac{m}{n}\,u_{pq}\lambda^q_\alpha. \qquad (16)$$

Следовательно, характеристика поверхности S определяется уравнениями (11), (12) и (16).

Подставляя в уравнение (4) выражения (16), получаем:

$$u_{pq}x^py^q+\frac{m}{n}\,u_{pq}\lambda^q_\alpha(x^py^\alpha+x^\alpha y^p)+u_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta=0. \qquad (17)$$

Отсюда следует, что характеристика поверхности S является многообразием полярных соответствий пространства V_{n-1}, определяемых уравнением (17), где коэффициенты u_{pq}, $u_{\alpha\beta}$ удовлетворяют уравнению (11). Это многообразие не является пустым.

Плоскостью, полярно сопряженной к плоскости P_{m-1} относительно каждого полярного соответствия (17), является плоскость

$$x^p+\frac{m}{n}\,\lambda^p_\alpha x^\alpha=0, \qquad (18)$$

размерность которой равна $(n-m-1)$.

Действительно, если в уравнение (17) вместо y^i подставит

$$y^p=t^p,\quad y^\alpha=0,$$

то получим:

$$u_{pq}t^q\left(x^p+\frac{m}{n}\,\lambda^p_\alpha x^\alpha\right)=0,$$

а это уравнение определяет семейство гиперплоскостей с однородными параметрами $t^1, t^2, \ldots, t^m$, осью которого служит плоскость (18).

Таким образом, компоненты геометрического объекта λ^p_α определяют в пространстве V_{n-1} инвариантную плоскость (18); выше проведенными рассуждениями указана геометрическая характеристика этой плоскости.

Если вершины $A_{m+1}, A_{m+2}, \ldots, A_n$ репера $\{A_i\}$ поместить в плоскости (18), то $\lambda^p_\alpha=0$, и уравнения (14) примут вид:

$$d\rho+\omega^\alpha_\alpha-\frac{n-m}{m}\,\omega^p_p=0,$$

$$[\omega^p_\alpha\omega^\alpha_p]=0. \qquad (14')$$

6. Продолжая эти уравнения по лемме Картана, получим:

$$
\begin{gathered}
d\rho+\omega_\alpha^\alpha-\frac{n-m}{m}\,\omega_p^p=0,\\
\omega_\alpha^p=\lambda_{\alpha\beta}^{pq}\,\omega_q^\beta,\\
[d\lambda_{\alpha\beta}^{pq}+\lambda_{\alpha\beta}^{pr}\,\omega_r^q+\lambda_{\alpha\beta}^{rq}\,\omega_r^p-\lambda_{\alpha\gamma}^{pq}\,\omega_\beta^\gamma-\lambda_{\gamma\beta}^{pq}\,\omega_\alpha^\gamma,\ \omega_q^\beta]=0,
\end{gathered}
\tag{19}
$$

где

$$
\lambda_{\alpha\beta}^{pq}=\lambda_{\beta\alpha}^{qp}.
$$

Из уравнений (19) следует:

$$
\delta\lambda_{\alpha\beta}^{pq}+\lambda_{\alpha\beta}^{pr}\,\pi_r^q+\lambda_{\alpha\beta}^{rq}\,\pi_r^p-\lambda_{\alpha\gamma}^{pq}\,\omega_\beta^\gamma-\lambda_{\gamma\beta}^{pq}\,\omega_\alpha^\gamma=0, \tag{20}
$$

где символ δ обозначает дифференцирование по вторичным параметрам и $\pi_i^j=\omega_i^j(\delta)$.

Геометрический объект $\lambda_{\alpha\beta}^{pq}$ определяет дифференциальную окрестность второго порядка секущей гиперповерхности в пространстве $W_{m(n-m)+1}$.

Так как системы величин

$$
\mu_{\alpha\beta}^{pq}=\lambda_{\alpha\beta}^{(pq)}=\lambda_{(\alpha\beta)}^{pq}=\frac{1}{2}\,(\lambda_{\alpha\beta}^{pq}+\lambda_{\alpha\beta}^{qp}), \tag{21}
$$

$$
\nu_{\alpha\beta}^{pq}=\lambda_{\alpha\beta}^{[pq]}=\lambda_{[\alpha\beta]}^{pq}=\frac{1}{2}\,(\lambda_{\alpha\beta}^{pq}-\lambda_{\alpha\beta}^{qp}) \tag{22}
$$

удовлетворяют дифференциальным уравнениям (20), то они являются однородными геометрическими объектами.

Геометрические объекты $\lambda_{\alpha\beta}^{pq}$, $\mu_{\alpha\beta}^{pq}$ и $\nu_{\alpha\beta}^{pq}$ имеют, соответственно,

$$
\frac{\{m(n-m)+1\}\,m(n-m)}{2},\quad \frac{m(n-m)\,\{2n+(m-1)(n-m+1)\}}{4},\quad \frac{m(m-1)(n-m)(n-m-1)}{4}
$$

компонент (не считая равных нулю).

Сумма числа компонент геометрических объектов $\mu_{\alpha\beta}^{pq}$ и $\nu_{\alpha\beta}^{pq}$ равна числу компонент геометрического объекта $\lambda_{\alpha\beta}^{pq}$.

7. Определим геометрический смысл объектов $\lambda_{\alpha\beta}^{pq}$, $\mu_{\alpha\beta}^{pq}$ и $\nu_{\alpha\beta}^{pq}$ в пространстве V_{n-1}.

С этой целью выбираем $(m-2)$-мерную плоскость, лежащую в плоскости P_{m-1},

$$
\begin{gathered}
a_p x^p=0,\\
x^\alpha=0
\end{gathered}
\tag{23}
$$

и m-мерную плоскость

$$
(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_m,\ N), \tag{24}
$$

проходящую через P_{m-1}, где $N=T^\alpha A_\alpha$.

Условия инвариантности плоскости (23) определяются вполне интегрируемой системой:

$$
\begin{gathered}
da_p-a_q\,\omega_p^q=\tilde{\omega}\,a_p,\\
\omega_p^\alpha=a_p\,\Theta^\alpha;\quad D\tilde{\omega}=D\Theta^\alpha=0.
\end{gathered}
\tag{25}
$$

Условия инвариантности плоскости (24) также определяются вполне интегрируемой системой:

$$
\begin{gathered}
dT^\alpha+T^\beta\,\omega_\beta^\alpha=T^\alpha\,\vartheta,\\
\omega_p^\alpha=T^\alpha\Theta_p;\ D\vartheta=D\Theta_p=0.
\end{gathered}
\tag{26}
$$

Из уравнений (25) и (26) следует:

$$
a_p\,\Theta^\alpha=T^\alpha\,\Theta_p,
$$

или

$$\frac{\Theta^\alpha}{T^\alpha}=\frac{\Theta_p}{a_p}$$

(не суммируется ни по α, ни по p) при любых α и p, т. е.

$$\frac{\Theta^{m+1}}{T^{m+1}}=\frac{\Theta^{m+2}}{T^{m+2}}=\ldots=\frac{\Theta^n}{T^n}=\frac{\Theta_1}{a_1}=\frac{\Theta_2}{a_2}=\ldots=\frac{\Theta_m}{a_m}=\Theta.$$

Из этих уравнений следует:

$$\Theta^\alpha=\Theta T^\alpha,$$
$$\Theta_p=a_p\Theta.$$

Тогда уравнения (25) и (26) записываются в виде:

$$\begin{gathered} da_p-a_q\omega_p^q=\tilde{\omega}a_p,\\ dT^\alpha+T^\beta\omega_\beta^\alpha=T^\alpha\vartheta,\\ \omega_p^\alpha=a_pT^\alpha\Theta;\quad D\Theta=D\vartheta=0. \end{gathered}\tag{27}$$

Из уравнений (27) видим, что формы ω_p^α выражаются через одну форму Θ. Отсюда ясно, что плоскость P_{m-1}, когда плоскости (23) и (24) неподвижны, перемещается, описывая однопараметрическое многообразие плоскостей P_{m-1} (m-мерную поверхность).

В этом случае плоскость $(A_{m+1}, \ldots, A_n)$, соответствующая плоскости P_{m-1}, также перемещается, описывая $(n-m)$-мерную поверхность $(n-m)$-мерной касательной плоскостью этой поверхности в точке $\tilde{N}=\tilde{T}^\alpha A_\alpha$ является плоскость вида:

$$(M,\ A_{m+1},\ A_{m+2},\ \ldots,\ A_n),$$

где M — точка плоскости P_{m-1}, т. е.

$$M=t^pA_p;$$

иначе говоря, точка M является точкой пересечения касательной плоскости вышеуказанной $(n-m)$-мерной поверхности и плоскости P_{m-1}.

Так как

$$d\tilde{N}=\tilde{T}^\alpha\omega_\alpha^pA_p+(d\tilde{T}^\alpha+\tilde{T}^\beta\omega_\beta^\alpha)A_\alpha,$$

координаты t^p точки M должны быть пропорциональны линейным дифференциальным формам $\tilde{T}^\alpha\omega_\alpha^p$.

Из уравнений (19) и (27) получаем:

$$\omega_\alpha^p=\lambda_{\alpha\beta}^{pq}T^\beta a_q\Theta.$$

Отсюда следует, что координаты t^p точки M выражаются через координаты $\tilde{T}^\alpha$ точки $\tilde{N}$ при помощи формул:

$$t^p=\lambda_{\alpha\beta}^{pq}\tilde{T}^\alpha T^\beta a_q.\tag{28}$$

Эти уравнения дают соответствие между $(m-2)$-мерной плоскостью (23) и точками $N=T^\alpha A_\alpha$, $\tilde{N}=\tilde{T}^\alpha A_\alpha$, $M=t^pA_p$.

Если точки N и $\tilde{N}$ в плоскости $(A_{m+1}, \ldots, A_n)$ фиксируем (т. е. фиксируем T^α и $\tilde{T}^\alpha$), то соотношение (28) определит в плоскости P_{m-1} корреляцию, т. е. плоскости (23) будет соответствовать точка $M=t^pA_p$, где t^p получены из уравнений (28).

Эта корреляция зависит от двух точек $N=T^\alpha A_\alpha$ и $\tilde{N}=\tilde{T}^\alpha A_\alpha$ плоскости $(A_{m+1}, \ldots, A_n)$ и определяется компонентами геометрического объекта $\lambda_{\alpha\beta}^{pq}$.

Итак, мы выяснили геометрический смысл объекта $\lambda^{pq}_{\alpha\beta}$.

8. Если точка $\tilde{N}$ совпадает с точкой N, т. е. $\tilde{T}^{\alpha}=T^{\alpha}$ (так как множитель пропорциональности не играет существенной роли, считаем, что он равен единице), соотношения (28) принимают вид:

$$t^p=\lambda^{pq}_{\alpha\beta}T^{\alpha}T^{\beta}a_q$$

или, учитывая еще (21),

$$t^p=\mu^{pq}_{\alpha\beta}T^{\alpha}T^{\beta}a_q. \tag{29}$$

Уравнения (29) определяют соотношение между плоскостью (23) и точками M и N.

Итак, получили геометрический смысл объекта $\mu^{pq}_{\alpha\beta}$.

9. Чтобы выяснить геометрический смысл объекта $\nu^{pq}_{\alpha\beta}$, произвольно выбрав точки N и $\tilde{N}$, временно их фиксируем и берем в плоскости P_{m-1} две $(m-2)$-мерные плоскости:

$$a_p x^p=0, \quad x^{\alpha}=0 \tag{30}$$

и

$$\bar{a}_p x^p=0, \quad x^{\alpha}=0. \tag{31}$$

Ввиду соотношения (28), этим плоскостям соответствуют точки

$$t^p A_p, \text{ где } t^p=\lambda^{pq}_{\alpha\beta}T^{\alpha}\tilde{T}^{\beta}a_q \tag{32}$$

и

$$\bar{t}^p A_p, \text{ где } \bar{t}^p=\lambda^{pq}_{\alpha\beta}T^{\alpha}\tilde{T}^{\beta}\bar{a}_q. \tag{33}$$

Потребуем, чтобы точка (32) лежала в плоскости (31), когда точка (33) лежит в плоскости (30). Точка (32) лежит в плоскости (31), если

$$\lambda^{pq}_{\alpha\beta}T^{\alpha}\tilde{T}^{\beta}\bar{a}_p a_q=0, \tag{34}$$

а точка (33) — в плоскости (30), если

$$\lambda^{pq}_{\alpha\beta}T^{\alpha}\tilde{T}^{\beta}a_p \bar{a}_q=0. \tag{35}$$

Эти два требования $\big((34)$ и $(35)\big)$ в общем независимы.

Будем требовать, чтобы соотношения (34) и (35) были удовлетворены при любых $\bar{a}_q$.

Соотношения (34) и (35) будут равносильными при произвольных $\bar{a}_q$ тогда и только тогда, когда

$$\lambda^{qp}_{\alpha\beta}T^{\alpha}\tilde{T}^{\beta}a_p=k\lambda^{pq}_{\alpha\beta}T^{\alpha}\tilde{T}^{\beta}a_p, \tag{36}$$

где множитель пропорциональности $k\neq 0$.

Свёртывая объекты, стоящие соответственно в левой и правой сторонах уравнений (36) с a_q, получаем

$$\lambda^{qp}_{\alpha\beta}T^{\alpha}\tilde{T}^{\beta}a_p a_q=k\lambda^{pq}_{\alpha\beta}T^{\alpha}\tilde{T}^{\beta}a_p a_q,$$

откуда следует, что $k=1$, и соотношение (36) принимает вид

$$\lambda^{pq}_{\alpha\beta}(T^{\alpha}\tilde{T}^{\beta}-T^{\beta}\tilde{T}^{\alpha})a_p=0. \tag{36'}$$

Таким образом, соотношения (34) и (35) будут равносильными при произвольных $\bar{a}_q$ тогда и только тогда, когда координаты T^{α}, $\tilde{T}^{\alpha}$ точек N, $\tilde{N}$ и коэффициенты a_p плоскости (30) удовлетворяют соотношениям (36′).

Так как

$$T^{\alpha}\tilde{T}^{\beta}-T^{\beta}\tilde{T}^{\alpha}=p^{\alpha\beta},$$

где p^{ij} — однородные координаты прямой, то соотношения (36′) можно записать в виде

$$\lambda^{pq}_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} a_p = 0,$$

а учитывая еще (22) — в виде

$$\nu^{pq}_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} a_p = 0. \tag{37}$$

Так как точки N и $\tilde{N}$ лежат на плоскости $(A_{m+1}, \ldots, A_n)$, то, кроме уравнений (37), имеем:

$$p^{pq} = p^{p\alpha} = 0.$$

Число уравнений (37) (в общем случае) равно m, а число входящих в эту систему независимых неоднородных координат $p^{\alpha\beta}$ - $2(n-m-2)$, и число неоднородных коэффициентов a_p - $(m-1)$.

Если в системе (37) все уравнения независимы, то $p^{\alpha\beta}$ и a_p (не все $p^{\alpha\beta} a_p$ равны нулю), удовлетворяющие системе (37), существуют тогда и только тогда, когда

$$2(n-m-2)+(m-1) \geqslant m,$$

или

$$n \geqslant m + \frac{5}{2}.$$

Таким образом, приведённая выше геометрическая интерпретация объекта $\nu^{pq}_{\alpha\beta}$ применима только в случае $2 \leqslant m \leqslant n-3$.

Применяя принцип двойственности, нетрудно получить и другую геометрическую интерпретацию объекта $\nu^{pq}_{\alpha\beta}$.

Соотношения (34) и (35) будут равносильными при любых $\tilde{T}^{\beta}$ тогда и только тогда, когда

$$\lambda^{pq}_{\alpha\beta} T^{\alpha} \bar{a}_p a_q = \tilde{k} \lambda^{pq}_{\alpha\beta} T^{\alpha} a_p \bar{a}_q.$$

Аналогично докажем, что множитель пропорциональности $\tilde{k} = 1$. Тогда последние уравнения принимают вид

$$\lambda^{pq}_{\alpha\beta} (\bar{a}_p a_q - a_p \bar{a}_q) T^{\alpha} = 0. \tag{38}$$

Таким образом, соотношения (34) и (35) будут равносильными при произвольных T^{β} тогда и только тогда, когда коэффициенты a_p, $\bar{a}_p$ плоскостей (30) и (31) и координаты T^{α} точки N удовлетворяют соотношениям (38).

Так как

$$\bar{a}_p a_q - a_p \bar{a}_q = p_{pq},$$

где p_{pq} — однородные координаты $(m-3)$-мерной плоскости в плоскости $(A_1, \ldots, A_m)$, то соотношения (38) можно записать в виде:

$$\lambda^{pq}_{\alpha\beta} p_{pq} T^{\alpha} = 0,$$

а учитывая ещё (22) — в виде

$$\nu^{pq}_{\alpha\beta} p_{pq} T^{\alpha} = 0. \tag{38′}$$

Число уравнений (38′) (в общем случае) равно $(n-m)$, а число входящих в эту систему независимых неоднородных координат p_{pq} — $2(m-2)$, и число неоднородных координат T^{α} — $(n-m-1)$.

Если в системе (38′) все уравнения независимы, то p_{pq} и T^{α} (не все $p_{pq} T^{\alpha}$ равны нулю), удовлетворяющие системе (38′), существуют тогда и только тогда, когда

$$2(m-2)+(n-m-1) \geqslant n-m,$$

или

$$m \geqslant \frac{5}{2}.$$

Итак, приведённая выше геометрическая интерпретация объекта $\nu^{pq}_{\alpha\beta}$ применима только в случае $3 \leqslant m \leqslant n-2$.

10. Продолжив систему (19), получим:

$$
\begin{gathered}
d\rho + \omega^{\alpha}_{\alpha} - \frac{n-m}{m}\,\omega^{p}_{p} = 0,\\
\omega^{p}_{\alpha} = \lambda^{pq}_{\alpha\beta}\,\omega^{\beta}_{q},\\
d\lambda^{pq}_{\alpha\beta} + \lambda^{pr}_{\alpha\beta}\,\omega^{q}_{r} + \lambda^{rq}_{\alpha\beta}\,\omega^{p}_{r} - \lambda^{pq}_{\alpha\gamma}\,\omega^{\gamma}_{\beta} - \lambda^{pq}_{\gamma\beta}\,\omega^{\gamma}_{\alpha} = \lambda^{pqr}_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^{\gamma}_{r},\\
[d\lambda^{pqr}_{\alpha\beta\gamma} + \lambda^{pqs}_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^{r}_{s} + \lambda^{psr}_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^{q}_{s} + \lambda^{sqr}_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^{p}_{s} - \lambda^{pqr}_{\alpha\beta\delta}\,\omega^{\delta}_{\gamma} - \lambda^{pqr}_{\alpha\delta\gamma}\,\omega^{\delta}_{\beta} - \lambda^{pqr}_{\delta\beta\gamma}\,\omega^{\delta}_{\alpha},\ \omega^{\gamma}_{r}] = 0,
\end{gathered}
\tag{39}
$$

где

$$\lambda^{pqr}_{\alpha\beta\gamma} = \lambda^{qpr}_{\beta\alpha\gamma} = \lambda^{prq}_{\alpha\gamma\beta}.$$

Из этих уравнений следует, что $\lambda^{pq}_{\alpha\beta}$, $\lambda^{pqr}_{\alpha\beta\gamma}$ образуют линейный однородный геометрический объект. Этот объект является фундаментальным объектом третьего порядка секущей поверхности (14) пространства $W_{m(n-m)+1}$. Докажем его полноту. Для этого дадим функциям $\lambda^{pq}_{\alpha\beta}$ и $\lambda^{pqr}_{\alpha\beta\gamma}$ следующие начальные значения:

$$
\lambda^{pq}_{\alpha\beta} = \begin{cases} \alpha + p, & \text{когда } p = q \text{ и } \alpha = \beta,\\ 0, & \text{когда } p \neq q \text{ или } \alpha \neq \beta; \end{cases}
$$

$$
\lambda^{ppq}_{\alpha\alpha\beta} = \begin{cases} a^{ppq}_{\alpha\alpha\beta}, & \text{когда } (p-q)(\alpha-\beta) \neq 0,\\ 0, & \text{когда } (p-q)(\alpha-\beta) = 0; \end{cases}
$$

все остальные $\lambda^{pqr}_{\alpha\beta\gamma}$ — любые.

Подставив эти значения в линейные уравнения системы (39), получим:

$$d\lambda^{pp}_{\alpha\alpha} + 2(\alpha+p)(\omega^{p}_{p} - \omega^{\alpha}_{\alpha}) = a^{ppr}_{\alpha\alpha\gamma}\,\omega^{\gamma}_{r}, \tag{40}$$

$$d\lambda^{pp}_{\alpha\beta} - (\alpha+p)\,\omega^{\alpha}_{\beta} - (\beta+p)\,\omega^{\beta}_{\alpha} = 0, \quad \alpha - \beta \neq 0, \tag{41}$$

$$d\lambda^{pq}_{\alpha\alpha} + (\alpha+p)\,\omega^{q}_{p} + (\alpha+q)\,\omega^{p}_{q} = 0, \quad p - q \neq 0, \tag{42}$$

$$d\lambda^{pq}_{\alpha\beta} = a^{pqp}_{\alpha\beta\alpha}\,\omega^{\alpha}_{p} + a^{pqq}_{\alpha\beta\beta}\,\omega^{\beta}_{q}, \quad (p-q)(\alpha-\beta) \neq 0. \tag{43}$$

В соотношениях (40)—(43) и в дальнейшем по индексам $\alpha, \beta, \ldots;$ $p, q, \ldots$ не суммируются.

11. Когда $2 \leqslant m \leqslant n-2$ существует $q \neq p$. Написав (41) уравнения для этих двух различных значений p, q, получим:

$$
\begin{gathered}
(\alpha+p)\,\omega^{\alpha}_{\beta} + (\beta+p)\,\omega^{\beta}_{\alpha} = d\lambda^{pp}_{\alpha\beta},\\
(\alpha+q)\,\omega^{\alpha}_{\beta} + (\beta+q)\,\omega^{\beta}_{\alpha} = d\lambda^{qq}_{\alpha\beta}.
\end{gathered}
$$

Так как

$$
\begin{vmatrix} \alpha+p & \beta+p\\ \alpha+q & \beta+q \end{vmatrix} = (q-p)(\alpha-\beta) \neq 0,
$$

то из последних двух уравнений получим ω^{β}_{α} при $\alpha \neq \beta$. Значит, уравнения (41) определяют ω^{β}_{α} с различными индексами. Аналогично, из уравнений (42) найдем ω^{q}_{p} при $p \neq q$.

Из уравнений (40) и

$$d\rho + \omega^{m+1}_{m+1} + \ldots + \omega^{n}_{n} - \frac{n-m}{m}(\omega^{1}_{1} + \ldots + \omega^{m}_{m}) = 0, \quad \omega^{1}_{1} + \omega^{2}_{2} + \ldots + \omega^{n}_{n} = 0$$

все дифференциальные формы $\omega^{1}_{1}, \omega^{2}_{2}, \ldots, \omega^{n}_{n}$ выражаются через формы ω^{α}_{p} и дифференциалы компонент фундаментального объекта второго порядка.

12. Когда $m=2$, $n=4$ (т. е. пространство V_{n-1} трехмерное), из уравнений (40), (43) и

$$d\rho+\omega_3^3+\omega_4^4-\omega_1^1-\omega_2^2=0,$$
$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0$$

получим ω_1^1, ω_2^2, ω_3^3, ω_4^4, ω_p^α, если

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{12}\, a_{443}^{221} & \frac{1}{8}\, a_{344}^{112} \\ a_{343}^{121} & a_{344}^{122} \end{vmatrix} \neq 0$$

и

$$\begin{vmatrix} a_{334}^{221} & a_{443}^{112} \\ a_{344}^{211} & a_{343}^{212} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Считаем, что эти два условия выполняются, следовательно, фундаментальный объект третьего порядка, в случае $m=2$, $n=4$, является полным.

Не трудно убедиться, что фундаментальный объект третьего порядка, в случаях $m=2$, $n=5$ и $m=3$, $n=5$, также является полным.

13. Проверим, что, если $n\geqslant 6$, то уравнения (43) можно разрешить относительно ω_p^α. Для доказательства рассмотрим три случая:

1) $2\leqslant m\leqslant n-4$,

2) $3\leqslant m\leqslant n-3$,

3) $4\leqslant m\leqslant n-2$.

Так как в первом и во втором случаях существуют по крайней мере три различных α, β, γ из интервала $[m+1,\ n]$, то из уравнений (43) следует:

$$a_{\alpha\gamma\alpha}^{pqp}\,\omega_p^\alpha+a_{\alpha\gamma\gamma}^{pqq}\,\omega_q^\gamma=d\lambda_{\alpha\gamma}^{pq},$$
$$a_{\beta\gamma\beta}^{pqp}\,\omega_p^\beta+a_{\beta\gamma\gamma}^{pqq}\,\omega_q^\gamma=d\lambda_{\beta\gamma}^{pq}.$$

Отсюда получаем:

$$a_{\alpha\alpha\gamma}^{ppq}\,a_{\beta\gamma\gamma}^{pqq}\,\omega_p^\alpha-a_{\beta\beta\gamma}^{ppq}\,a_{\alpha\gamma\gamma}^{pqq}\,\omega_p^\beta=\ldots \tag{44}$$

В первом случае $(2\leqslant m\leqslant n-4)$ существуют по крайней мере четыре различных α, β, γ, δ из интервала $[m+1,\ n]$. Если вместо γ в уравнении (44) написать δ, то получим:

$$a_{\alpha\alpha\delta}^{ppq}\,a_{\beta\delta\delta}^{pqq}\,\omega_p^\alpha-a_{\beta\beta\delta}^{ppq}\,a_{\alpha\delta\delta}^{pqq}\,\omega_p^\beta=\ldots \tag{45}$$

Можно считать, что

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha\gamma}^{ppq}\,a_{\beta\gamma\gamma}^{pqq} & a_{\beta\beta\gamma}^{ppq}\,a_{\alpha\gamma\gamma}^{pqq} \\ a_{\alpha\alpha\delta}^{ppq}\,a_{\beta\delta\delta}^{pqq} & a_{\beta\beta\delta}^{ppq}\,a_{\alpha\delta\delta}^{pqq} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда уравнения (44), (45) разрешимы относительно ω_p^α.

Во втором случае $(3\leqslant m\leqslant n-3)$, так как существуют по крайней мере три различных p, q, r из интервала $[1,\ m]$, в уравнении (44) вместо q написав r, получим:

$$a_{\alpha\alpha\gamma}^{ppr}\,a_{\beta\gamma\gamma}^{prr}\,\omega_p^\alpha-a_{\beta\beta\gamma}^{ppr}\,a_{\alpha\gamma\gamma}^{prr}\,\omega_p^\beta=\ldots \tag{46}$$

Считаем, что

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha\gamma}^{ppq}\,a_{\beta\gamma\gamma}^{pqq} & a_{\beta\beta\gamma}^{ppq}\,a_{\alpha\gamma\gamma}^{pqq} \\ a_{\alpha\alpha\gamma}^{ppr}\,a_{\beta\gamma\gamma}^{prr} & a_{\beta\beta\gamma}^{ppr}\,a_{\alpha\gamma\gamma}^{prr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда уравнения (44) и (46) разрешимы относительно ω_p^α.

Доказательство того, что и в третьем случае можно разрешить уравнения относительно ω_p^α, аналогично доказательству в первом случае.

Так как формы ω_p^α выражаются через дифференциалы компонент фундаментального объекта второго порядка, формы ω_1^1, ω_2^2, ..., ω_n^n тоже выражаются только через дифференциалы компонент фундаментального объекта второго порядка.

Итак, мы доказали, что фундаментальный объект третьего порядка, когда $2 \leqslant m \leqslant n-2$, является полным.

Вильнюсский Государственный педагогический институт

Поступило в редакцию 10.II.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. К. И. Гринцевичюс, О комплексе коррелятивных элементов, Лит. мат. сб., 1964, **IV**, № 3, 329–335.
2. Г. Ф. Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Московского мат. общества, 1953, **2**, 275–382.

APIE KORELIATYVINIŲ ELEMENTŲ ERDVĖS KERTAMĄJĮ HIPERPAVIRŠIŲ

A. RAČIENĖ

(Reziumė)

K. Grincevičiaus [1] straipsnyje įvesta trimatėje projektyvinėje erdvėje penkiaparametrinė koreliatyvinių elementų daugdara ir tirta toje penkiaparametrinėje daugdaroje patalpinta keturparametrinė koreliatyvinių elementų daugdara.

Šiame straipsnyje apibendrinta koreliatyvinio elemento sąvoka daugiamatėje projektyvinėje erdvėje V_{n-1} ir gauta išsluoksniuota koreliatyvinių elementų erdvė $W_{m(n-m)+1}$, kur $2 \leqslant m \leqslant n-2$. (14) diferencialinėmis lygtimis erdvėje $W_{m(n-m)+1}$ definuojamas kertamasis hiperpaviršius. Gautos kertamojo hiperpaviršiaus pirmos ir antros eilės fundamentalinių objektų bei kai kurių poobjekčių geometrinės prasmės erdvėje V_{n-1}. Įrodyta, jog trečios eilės fundamentalinis objektas yra pilnas.

ÜBER EINE SCHNITTHYPERFLÄCHE DES RAUMES VON KORRELATIVEN ELEMENTEN

A. RAČIENĖ

(Zusammenfassung)

In dem Artikel [1] von K. Grincevičius ist eine fünfparametrische Mannigfaltigkeit von korrelativen Elementen im dreidimensionalen projektiven Raum eingeführt und eine in genannter fünfparametrischer Mannigfaltigkeit eingeschlossene Mannigfaltigkeit von korrelativen Elementen untersucht.

In vorliegender Arbeit wird der Begriff des korrelativen Elementes im mehrdimensionalen projektiven Raum V_{n-1} verallgemeinert und ein Faserraum $W_{m(n-m)+1}$, $2 \leqslant m \leqslant n-2$, erhalten. Mit Hilfe von Differentialgleichungen (14) wird im Raume $W_{m(n-m)+1}$ eine Schnitthyperfläche definiert. Es sind ferner geometrische Deutungen der Fundamentalobjekte erster und zweiter Ordnung sowie einiger Unterobjekte im Raume V_{n-1} erhalten. Endlich wird in der Arbeit bewiesen, dass Fundamentalobjekt dritter Ordnung vollständig ist.