О МАКСИМУМЕ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ СУММЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ОДНОВЕРШИННЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Б. А. РОГОЗИН

В теории суммирования случайных величин естественным образом возникает вопрос о точной оценке максимума плотности суммы независимых случайных величин, которые имеют плотности, ограниченные одной и той же постоянной. Ответ на этот вопрос удается получить только при некоторых дополнительных предположениях на функции распределения слагаемых, таких, например, как одновершинность. Функция распределения $F(x)$ называется одновершинной, если существует точка a такая, что левее a $F(x)$ выпукла, а правее a $F(x)$ вогнута (см. [1]). Ю. В. Прохорову в этом направлении принадлежит следующий результат (см. [2]).

Теорема 1. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *независимые случайные величины. Их функции распределения предполагаются симметричными, одновершинными и имеющими плотности* $p_i(x)$ *такие, что* $\sup p_i(x) \leqslant A < \infty$, $i=1, \ldots, n$ *тогда*

$$p^{(n)}(x) \leqslant \frac{\sqrt{G}\, A}{\sqrt{\pi n}} \Big(1+f(n)\Big),$$

где $p^{(n)}(x)$ — *плотность разпределения случайной величины* $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, *и* $f(n)$ — *функция, зависящая только от* n *и при* $n \to \infty$ $f(n) \to 0$.

Первоначальное доказательство этого факта опиралось на углубленное исследование поведения характеристических функций, представляющее самостоятельный интерес, но в дальнейшем использование одного предложения Бирнбаума [3] позволило упростить Ю. В. Прохорову доказательство и уточнить результат (см. примечание при корректуре в [2])

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *при замене условия* $\sup_x p_i(x) \leqslant A < \infty$ *условием* $\sup_x p_i(x) \leqslant A_i < \infty$, $i=1, \ldots, n$, *имеет место*

$$p^{(n)}(x) \leqslant \max_x q^{(n)}(x) = q^{(n)}(0),$$

где $q^{(n)}(x)$ есть плотность распределения суммы независимых случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_n$, где $\eta_i, i=1, \ldots, n$, является равномерно распределенной на отрезке

$$\left[-\frac{1}{2A_i}, \frac{1}{2A_i}\right], \qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

Целью заметки является доказательство утверждения теоремы 2 без предположения симметрии распределения слагаемых. Для дальнейшего нам потребуется лемма, содержание которой не является новым, но к сожалению мы не можем указать источника, к которому мог бы быть отослан читатель.

Лемма. *Свертка двух симметричных одновершинных функций распределения $F(x)$ и $I(x)$ снова есть симметричное и одновершинное распределение.*

Доказательство. Для функции распределения $F(x)$ построим последовательность специальных функций распределения $F_m(x)$, $m=1, 2, \ldots$, слабо сходящихся к $F(x)$. Для этого разделим отрезок $[-m, m]$ на равные отрезки длины $\frac{1}{m}$ и положим $x_k^{(m)}=-m+\frac{k}{m}$, $k=0, 1, \ldots, 2m^2$. Построим ломаную с вершинами $\left(x_k^{(m)}, F(x_k^{(m)})\right)$, $k=0, 1, \ldots, 2m^2$. Это будет график функции $F_m(x)$ на отрезке $[-m, m]$. Если $F(-m)=0$, то положим на отрезке $(-\infty, -m)$ $F_m(x)=0$, если $F(-m)\neq 0$, то из точки $\left(-m, F(-m)\right)$ проведем прямую с угловым коэффициентом $F'_n(-m)$ — левая производная функции $F(x)$ в точке $-m$ — до пересечения с осью x в некоторой точке x_{-m}, и этот отрезок будет графиком функции $F_m(x)$ на отрезке $[x_{-m}, -m]$, и далее положим $F_m(x)=0$ при $x<x_{-m}$. Совершенно аналогично с заменой оси x на прямую $y=1$ поступаем в случае $x>m$, только в случае, если $F(m)\neq 0$, берем не левую производную $F(x)$ в m, а правую производную $F(x)-F'_{np}(m)$. Очевидно, функции $F_m(x)$, $m=1, 2, \ldots$ симметричны и одновершинны, их плотности можно представить в виде

$$F'_m(x)=\sum_{i=1}^{k_m} b_i^{(m)} E(x, a_i^{(m)}),$$

где $E(x, a)$ — характеристическая функция отрезка $(-a, a)$. Для функции распределения $I(x)$ строим таким же образом последовательность $I_m(x)$, $m=1, 2, \ldots$, и получаем, что

$$I'_m(x)=\sum_{j=1}^{n_m} d_j^{(m)} E(x, c_j^{(m)}), \qquad m=1, 2, \ldots$$

Производная свертки $F(x)$ и $I(x)$ равна

$$I'_m(x) * F'_m(x)=\int_{-\infty}^{\infty} I'_m(x-y) F'_m(y)\, dy=\sum_{i=1}^{k_m}\sum_{j=1}^{n_m} b_i^{(m)} d_j^{(m)} E(x, a_i^{(m)}) * E(x, b_j^{(m)}).$$

Очевидно, $E(x, a_i^{(m)}) * E(x, b_i^{(m)})$ есть монотонно неубывающая функция при $x<0$ и монотонно невозрастающая функция при $x>0$. Этим же свойством будет обладать и сумма выражений $b_i^{(m)} d_i^{(m)} E(x, a_i^{(m)}) * E(x, b_i^{(m)})$ и, следовательно, свертки $F_m(x)$ и $I_m(x)$ $m=1, 2, \ldots$ являются одновершинными, так как предел при $m\to\infty$ одновершинных функций распределения есть снова одновершинное распределение, то таким образом свертка $F(x)$ и $I(x)$ есть одновершинное распределение. Симметрия распределения свертки $F(x)$ и $I(x)$ очевидна.

Из этой леммы и теоремы 2, получаем следующую эквивалентную формулировку теоремы 2.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 2

$$\operatorname{var} p^{(n)}(x) \leqslant \operatorname{var} q^{(n)}(x) = 2q^{(n)}(0),$$

где $\operatorname{var} p(x)$ — есть вариация функции $p(x)$ на всей числовой прямой.

Заметим, что $p^{(n)}(x)$ при $n=2, 3, \ldots$ можно считать, не ограничивая общности, непрерывными функциями на всей числовой прямой.

С помощью некоторого приема частично использованного в доказательстве леммы и представляющего, как нам кажется, самостоятельный интерес удается освободиться от предположения симметрии в теореме 2 и следствии 1.

Теорема 3. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *независимые случайные величины, имеющие плотности* $p_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$, *ограниченной вариации*

$$\operatorname{var} p_i(x) = A_i < \infty, \qquad i=1, 2, \ldots, n,$$

тогда

$$\operatorname{var} p^{(n)}(x) \leqslant \operatorname{var} q^{(n)}(x) = 2 \max q^{(n)}(x).$$

Доказательство. Предположим, что $p_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$ являются непрерывными. Для каждой функции распределения $F_i(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_i(y)\, dy$ построим последовательность $F_{im}(x)$ с плотностями $p_{im}(x)$, $m=1, 2, \ldots$, слабо сходящихся к $F_i(x)$, по способу, указанному в доказательстве леммы. Нетрудно заметить, что как полученное семейство плотностей $P_{mi}(x)$, $i=1, \ldots, n$, $m=1, 2, \ldots$ обладает тем свойством, что

$$\operatorname{var} p_{mi}(x) \leqslant \operatorname{var} p_i(x). \tag{1}$$

Обозначим характеристические функции, соответствующие $p_{mi}(x)$, $p_i(x)$, $p_m^{(n)}(x)$ и $p^{(n)}(x)$, через $f_{mi}(t)$, $f_i(t)$, $f'_m(t) = \prod\limits_{i=1}^{n} f_{mi}(t)$ и $f'(t) = \prod\limits_{i=1}^{n} f_i(t)$ соответственно. По определению вариации для любого $\varepsilon > 0$ существуют $x_0 < x_1 < \ldots < x_k$ такие, что для $n \geqslant 2$

$$\operatorname{var} p^{(n)}(x) \leqslant \sum_{l=1}^{k} |p^{(n)}(x_l) - p^{(n)}(x_{l-1})| + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\,(e^{itx_l} - e^{itx_{l-1}})\, dt \right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу слабой сходимости $F_{mi}(x)$ при $m \to \infty$ к $F_i(x)$ и (1) для любого $\varepsilon > 0$ при $m > m(\varepsilon)$

$$\operatorname{var} p^{(n)}(x) \leqslant \sum_{l=1}^{k} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f'_m(t)\,(e^{itx_l} - e^{itx_{l-1}})\, dt \right| + \varepsilon \leqslant \operatorname{var} p_m^{(n)}(x) + \varepsilon$$

в виду произвольности ε

$$\operatorname{var} p^{(n)}(x) \leqslant \sup_m \operatorname{var} p_m^{(n)}(x). \tag{2}$$

В силу построения плотности $p_{mi}(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$; $m=1, 2, \ldots$ можно представить в виде

$$p_{mi}(x) = \sum_{j=1}^{l_i^{(m)}} c_{ij}^{(m)} E(x - b_{ij}^{(m)};\ a_{ij}^{(m)}),$$

где

$$c_{ij}^{(m)}>0,\ a_{ij}^{(m)}>0,\ b_{ij},\ i=1,\ \ldots,\ n;\ m=1,\ 2,\ \ldots,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ l_i^{(m)},$$

вещественные числа.

Далее,

$$\operatorname{var} p_{m1} * \ldots * p_{mn} = \operatorname{var} \prod_{i=1}^{n}{}^{*} p_{mi}(x) = \operatorname{var} \prod_{i=1}^{n}{}^{*} \sum_{j_i=1}^{l_i^{(m)}} c_{ij_i}^{(m)} E(x-b_{ij_i}^{(m)};\ a_{ij_i}^{(m)}) =$$

$$= \operatorname{var} \sum_{\substack{\{j_1,\ \ldots,\ j_n\} \\ 1\leqslant j_1\leqslant l_1^{(m)} \\ ------ \\ 1\leqslant j_n\leqslant l_n^{(m)}}} \prod_{i=1}^{n}{}^{*} c_{ij_i}^{(m)} E(x-b_{ij_i}^{(m)};\ a_{ij_i}^{(m)}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\{j_1,\ \ldots,\ j_n\} \\ 1\leqslant j_1\leqslant l_1^{(m)} \\ ------ \\ 1\leqslant j_n\leqslant l_n^{(m)}}} \operatorname{var} \prod_{i=1}^{n}{}^{*} c_{ij_i}^{(m)} E(x-b_{ij_i}^{(m)},\ a_{ij_i}^{(m)}) =$$

$$= \sum_{\substack{\{j_1,\ \ldots,\ j_n\} \\ 1\leqslant j_1\leqslant l_1^{(m)} \\ ------ \\ 1\leqslant j_n\leqslant l_n^{(m)}}} \operatorname{var} \prod_{i=1}^{n}{}^{*} c_{ij_i}^{(m)} E(x,\ a_{ij_i}^{(m)}) =$$

$$= \operatorname{var} \sum_{\substack{\{j_1,\ \ldots,\ j_n\} \\ 1\leqslant j_1\leqslant l_1^{(m)} \\ ------ \\ 1\leqslant j_n\leqslant l_n^{(m)}}} \prod_{i=1}^{n}{}^{*} c_{ij_i}^{(m)} E(x,\ a_{ij_i}^{(m)}) =$$

$$= \operatorname{var} \prod_{i=1}^{n}{}^{*} \sum_{j_i=1}^{n} c_{ij_i}^{(m)} E(x,\ a_{ij_i}^{(m)}) \leqslant \operatorname{var} q^{(n)}(x).$$

Последнее неравенство в силу следствия 1. С помощью (2) и последнего соотношения получаем

$$\operatorname{var} p^{(n)}(x) \leqslant \operatorname{var} q^{(n)}(x).$$

В случае, если $p_i(x)$ разрывна, то построим последовательность $f_{mi}(x)$, $m=1,\ 2,\ \ldots,\ i=1,\ \ldots,\ n$ непрерывных плотностей

$$f_{mi}(x) = p_i(x) * \frac{m}{2} E\left(x,\ \frac{1}{m}\right).$$

Заметим, что

$$\operatorname{var} f_{mi} \leqslant \operatorname{var} p_i(x),\ i=1,\ \ldots,\ n,\ m=1,\ 2,\ \ldots$$

и

$$I_{mi}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{mi}(y)\,dy$$

слабо сходится к $F_i(x)$ при $m\to\infty$ и $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Так как только эти предположения и использовались при доказательстве (2), то получим, что

$$\operatorname{var} p^{(n)}(x) \leqslant \sup_m \operatorname{var} f_m^{(n)}(x) \leqslant \sup_m \operatorname{var} q_m^{(n)}(x) \leqslant \operatorname{var} q^{(n)}(x),$$

где $f_m^{(n)}(x)$, $q_m^{(n)}(x)$ строятся по совокупности плотностей $f_{1m}(x)$, $f_{2m}(x)$, ..., $f_{nm}(x)$ так же, как $p^{(n)}(x)$, $q_{(x)}^{(n)}$ по совокупности $p_1(x)$, $p_2(x)$, ... $p_n(x)$.

Из теоремы 3 вытекает

Следствие 2. *Теорема 2 имеет место без предположения симметрии слагаемых.*

Доказательство получается из соотношений

$$2 \max_x p^{(n)}(x) \leqslant \operatorname{var} p^{(n)}(x) \leqslant \operatorname{var} q^{(n)}(x) = 2 \max_x q^{(n)}(x)$$

Москва

Поступило в редакцию
26.XI.64

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., ГИТТЛ, 1949.
2. Ю. В. Прохоров, Экстремальные задачи в предельных теоремах, Труды 6 Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике, Вильнюс, ГИП и НЛ Лит. ССР, 1962, 77–84.
3. Z. W. Birnbaum, On random variables with comparable peakedness, Ann. Math. Statisties, **19**, 1948, 78.

APIE ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ, TURINČIŲ VIENVIRŠŪNIUS PASISKIRSTYMUS, SUMOS TIKIMYBĖS TANKIO MAKSIMUMĄ

B. ROGOZINAS

(Reziumė)

Šiame straipsnyje įvertinama iš viršaus atsitiktinių nepriklausomų dydžių sumų tankio variacija per atskirų atsitiktinių dėmenų tankio variacijas. Nagrinėjamoje pasiskirstymų klasėje tas įvertinimas negali būti patikslintas.

ON THE MAXIMUM OF THE DENSITY OF THE SUM RANDOM VARIABLES WITH THE UNIMODAL DISTRIBUTION

B. ROGOZIN

(Summary)

It is give an inequality to the variation density of the sum independent random variables by the variations densities of the random variables.