V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1965

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

И. УРБЯЛИС

Настоящая статья является продолжением работы автора [8] и [9] по распределению простых алгебраических чисел.

Пусть $K$ – алгебраическое числовое поле $n$-ой степени и пусть среди сопряженных с $K$ полей $K^{(1)}, \ldots, K^{(n)}$ имеется $r_1$ вещественных и $r_2$ пар комплексно-сопряженных. Нумерация сопряженных полей фиксирована так, что $K^{(j)} (j=1, \ldots, r_1)$ вещественны, а $K^{(j)}$ и $K^{(j+r_2)} (j=r_1+1, \ldots, r_1+ +r_2)$ комплексно-сопряженны.

Пусть далее $\mathfrak{m}\,(\mathfrak{m} \neq 0)$ целый идеал поля $K$. Вполне положительные единицы $\eta\,(\eta \succ 0)$ поля $K$, $\eta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$ будем называть единицами $\operatorname{mod} \mathfrak{m}$. Каждую такую единицу (см. [11], [14]) можно выразить через $\zeta$ – корень из 1 и $r=r_1+r_2-1$ основных единиц $\operatorname{mod} \mathfrak{m}$ $\eta_1, \ldots, \eta_r$ следующим образом:

$$\eta = \zeta^b \eta_1^{b_1} \ldots \eta_r^{b_r},$$

где число $b$ пробегает числа $0, 1, \ldots, g-1$, $g$ – число корней из 1, являющихся единицами $\operatorname{mod} \mathfrak{m}\,(\zeta^g = 1)$, а $b_1, \ldots, b_r$ – пробегают все целые рациональные числа.

Единицы $\operatorname{mod} \mathfrak{m}$ образуют подгруппу группы единиц поля $K$ с конечным индексом $e(\mathfrak{m})$. Два числа, отличающиеся лишь множителем, являющимся единицей $\operatorname{mod} \mathfrak{m}$, будем называть ассоциированными $\operatorname{mod} \mathfrak{m}$.

Поле $K$ расширяем до системы целых идеальных чисел $\mathfrak{Z}$ (Гекке [11], [12]), которую будем считать фиксированной. Допустим, что среди сопряженных с $\mathfrak{Z}$ систем чисел $\mathfrak{Z}^{(j)} (j=1, \ldots, n)$ имеется $r_1$ вещественных и $r_2$ пар комплексно-сопряженных, что возможно получить хотя бы ввиду одной теоремы Ландау (см. [13], теорема 21). Нумерация этих систем фиксирована так, как выше сказано о нумерации сопряженных полей.

Целые идеальные числа будем просто называть числами и обозначать через $\alpha$, $\nu$, а простые через $\mathfrak{p}$. Сопряженные числа будем отмечать верхними индексами.

На область $\mathfrak{Z}$ переносится разбиение чисел по классам, если считать, что к одному классу относятся все те числа, которые отличаются лишь множителем, являющимся элементом поля $K$. Число таких классов будем обозначать через $h$. Числа одного такого класса воспроизводятся сложением и вычитанием. Поэтому есть смысл говорить о сравнимости чисел $\operatorname{mod} \mathfrak{m}$ в пределах одного класса.

Все взаимно простые с $\mathfrak{m}$ числа системы $\mathfrak{Z}$ разложим по классам вычетов $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$ в узком смысле, считая, что два числа $\alpha$ и $\beta$ принадлежат одному такому классу, если удовлетворяют условиям $(\alpha, \mathfrak{m})=(\beta, \mathfrak{m})=1$, $\alpha\equiv\beta\,(\operatorname{mod}\mathfrak{m})$, $\frac{\alpha}{\beta}\succ 0$, $\beta\neq 0$. Эти классы вычетов образуют конечную абелеву группу $\mathfrak{Z}(\mathfrak{m})$ порядка $h(\mathfrak{m})=h2^{r_1}\varphi(\mathfrak{m})$, где $\varphi(\mathfrak{m})$ — функция Эйлера.

Если приведенную систему вычетов $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$ в узком смысле обозначим через $\nu_1, \ldots, \nu_{h(\mathfrak{m})}$, а базисные элементы того класса вычетов, которые содержат число $\nu_j$, обозначим через $\omega_{1j}, \ldots, \omega_{nj}$, то каждое такое число этого класса можно представить в виде

$$\alpha=l_1\omega_{1j}+\ldots+l_n\omega_{nj}+\nu_j \qquad \Big(j=1, \ldots, h(\mathfrak{m})\Big), \tag{1}$$

с целыми рациональными $l_1, \ldots, l_n$. Отсюда следует, что числа одного такого класса составляют, вообще говоря, $n$-мерную решетку (см. [4]). Таким образом, все числа системы $\mathfrak{Z}$ составляют $h(\mathfrak{m})$ решеток.

Формулу (1) переписываем в $n$-мерном вещественном сигнатурном пространстве $R_{r_1, r_2}$ (см. [4]),

$$\beta=l_1u_{1j}+\ldots+l_nu_{nj}+\mu_j \qquad \Big(j=1, \ldots, h(\mathfrak{m})\Big), \tag{2}$$

где

$$\alpha^{(\lambda)}=\beta^{(\lambda)}, \quad \omega_{kj}^{(\lambda)}=u_{kj}^{(\lambda)}, \quad \nu_j^{(\lambda)}=\mu_j^{(\lambda)}$$
$$\Big(\lambda=1, \ldots, r_1, \quad k=1, \ldots, n, \quad j=1, \ldots, h(\mathfrak{m})\Big)$$

и

$$\beta^{(r_1+\lambda)}=R\left(\alpha^{(r_1+\lambda)}\right), \quad \beta^{(r_1+r_2+\lambda)}=I\left(\alpha^{(r_1+\lambda)}\right);$$
$$u_{kj}^{(r_1+\lambda)}=R\left(\omega_{kj}^{(r_1+\lambda)}\right), \quad u_{kj}^{(r_1+r_2+\lambda)}=I\left(\omega_{kj}^{(r_1+\lambda)}\right);$$
$$\mu_j^{(r_1+\lambda)}=R\left(\nu_j^{(r_1+\lambda)}\right), \quad \mu_j^{(r_1+r_2+\lambda)}=I\left(\nu_j^{(r_1+\lambda)}\right)$$
$$(\lambda=1, \ldots, r_2, \quad j=1, \ldots, h(\mathfrak{m}), \quad k=1, \ldots, n).$$

Для всякого числа $\alpha$ из системы $\mathfrak{Z}$ определяем характеры Гекке первого рода $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$ ([6], [11]):

$$\xi(\alpha)=\prod_{j=1}^{n-1}\exp\Big(2\pi i\, m_j\, w_j(\alpha)\Big),$$

где показатели $m_1, \ldots, m_{n-1}$ характера Гекке первого рода $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$ пробегают любые целые рациональные числа:

$$w_j(\alpha)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{r+1} e_k^{(j)}\ln|\alpha^{(k)}| & (j=1, \ldots, r),\\[2ex] \displaystyle\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{r_2} A_k^{(j-r)}\Big(\operatorname{Arg}\alpha^{(r_1+k)}-\sum_{l=1}^{r} w_l(\alpha)\arg\eta_l^{(r_1+k)}\Big) & \\ \qquad\qquad (j=r+1, \ldots, n-1). & \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $e_k^{(j)}$ определяются из уравнений

$$\sum_{k=1}^{r+1} e_k^{(j)}=0 \qquad (j=1, \ldots, r),$$

$$\sum_{k=1}^{r+1} e_k^{(j)}\ln|\eta_l^{(k)}|=\begin{cases}1, & \text{если } l=j,\\ 0, & \text{если } l\neq j\end{cases} \qquad (j, l=1, \ldots, r),$$

а $(A_1^{(l)}, \ldots, A_{r_1}^{(l)})$ $(l=1, \ldots, r_2)$ — базис аддитивной группы целочисленных векторов $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{r_1}$, компоненты которых $B_k^{(l)}$ удовлетворяют сравнению

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=r_1+1}^{r+1} B_k^{(l)}\arg\zeta^{(k)}\equiv 0 \pmod 1 \qquad (l=1, \ldots, r_2)$$

и

$$\left|\det\|A_k^{(l)}\|\right|=g.$$

В дальнейшем будем считать, что числа $A_k^{(l)}$ подобраны любым, но фиксированным образом.

Далее вводим характер Гекке второго рода $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$ (см. [6], [7], [9], [11]):

$$\Xi(\alpha)=\chi(\alpha)\,\xi(\alpha),$$

где $\chi(\alpha)$ — абелевый групповой характер $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$ группы $\mathfrak{Z}(\mathfrak{m})$ ([1], [10], [11], [12]).

Пусть $s=\sigma+ti$ — комплексное переменное. При помощи характера $\Xi(\alpha)$ образует $Z$-функцию Гекке

$$Z(s, \Xi)=\sum_{\alpha}{}^{*}\ \Xi(\alpha)\,|N(\alpha)|^{-s}$$

в области сходимости этого ряда. Здесь и в дальнейшем знаком * будем указывать, что при суммировании из каждой системы ассоциированных чисел в обычном смысле берется только по одному представителю; $N(\alpha)$ — норма идеального числа $\alpha$.

Распространяем определение соотношений, данных формулой (3), на любые точки $Y$ сигнатурного $n$-мерного вещественного пространства $R_{r_1, r_2}$ (см. [4], [6]). То же относится и к норме упомянутых точек.

Если координаты точек $Y$, которые не все являются образами системы $\mathfrak{Z}$, в $n$-мерном комплексном пространстве $\mathfrak{Z}_n$ обозначим через $(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ и в соответствующем $n$-мерном вещественном сигнатурном пространстве $R_{r_1, r_2}$ через $(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})$, где

$$\left.\begin{aligned} &y^{(j)}=x^{(j)}, \quad \text{для } j=1, \ldots, r_1,\\ &y^{(j)}=R(x^{(j)}),\quad y^{(j+r_2)}=I(x^{(j)}),\quad \text{для } j=r_1+1, \ldots, r_1+r_2, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

тогда

$$w_j(Y)=\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{r+1} e_k^{(j)}\ln|x^{(k)}| \quad (j=1, \ldots, r),\\ \displaystyle\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{r_2} A_k^{(j-r)}\Big(\operatorname{Arg}x^{(r_1+k)}-\sum_{l=1}^{r} w_l(Y)\arg\eta_l^{(r_1+k)}\Big) \quad (j=r+1, \ldots, n-1), \end{cases}$$

с условием, что $N(Y)\neq 0$, где

$$N(Y)=x^{(1)}\ldots x^{(n)}=y^{(1)}\ldots y^{(r_1)}\big(y^{(r_1+1)^2}+y^{(r_1+r_2+1)^2}\big)\ldots\big(y^{(r_1+r_2)^2}+y^{(n)^2}\big).$$

Область

$$0\leqslant w_j(Y)<1 \qquad (j=1, \ldots, r)$$

можно считать в некотором смысле фундаментальной областью $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$ (см. [6]). (Две точки, принадлежащие такой области, могут иметь в качестве ассоциирующего $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$ множителя лишь единицу $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$, являющуюся корнем из 1.) Нетрудно убедиться, что в этой области

$$|x^{(k)}| \asymp \sqrt{|N(Y)|} \qquad (k=1, \ldots, r+1). \tag{5}$$

В дальнейшем будем употреблять еще следующие выражения:

$$x^{(p)} = \sum_{f=1}^{n} x_f \omega_{fj}^{(p)} + \nu_j^{(p)};$$

$$y^{(p)} = \sum_{f=1}^{n} x_f u_{fj}^{(p)} + \mu_j^{(p)},$$

где $y^{(p)}$, $u_{fj}^{(p)}$, $\mu_j^{(p)}$ определены, соответственно, формулами (4) и (2), $x_f$ — некоторые переменные ($p=1, \ldots, n$, $j=1, \ldots, h(\mathfrak{m})$, $f=1, \ldots, n$). Далее:

$$N_j(x_1, \ldots, x_n) = x^{(1)} \ldots x^{(n)};$$

$$\xi_j(x_1, \ldots, x_n) = \exp\left\{ i \left( \sum_{p=1}^{r_1} a_p \ln|x^{(p)}| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2} \sum_{p=r_1+1}^{r+1} \left( (a_p - in_p)\ln x^{(p)} + (a_p + in_p)\ln x^{(p+r_2)} \right) \right) \right\};$$

$$F_j(x_1, \ldots, x_n) = \exp\left\{ -\left( \sum_{p=1}^{r_1} (t-a_p)\ln|x^{(p)}| + \frac{1}{2} \sum_{p=r_1+1}^{r+1} \left( (2t - a_p + in_p)\ln x^{(p)} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + (2t - a_p - in_p)\ln x^{(p+r_2)} \right) \right) \right\}, \tag{6}$$

где

$$a_p = \sum_{l=1}^{r} e_p^{(l)} \left( 2\pi m_l - \sum_{q=r_1+1}^{r+1} n_q \arg \eta^{(q)} \right) \qquad (p=1, \ldots, r+1),$$

$$n_q = \sum_{k=r+1}^{n-1}{}' m_k A_{q-r_1}^{(k-r)} \qquad (q=r_1+1, \ldots, r+1), \qquad j=1, \ldots, h(\mathfrak{m}).$$

Кроме того,

$$V = \max(|V_1|, \ldots, |V_{r_1}|, V_{r_1+1}, \ldots, V_{r_1+r_2}),$$

где

$$V_p = \begin{cases} t - a_p, & \text{если } p = 1, \ldots, r_1, \\ \sqrt{(2t-a_p)^2 + n_p^2}, & \text{если } p = r_1+1, \ldots, r_1+r_2. \end{cases}$$

В наших рассуждениях буквы $c_1, \ldots, c_{23}$ будут означать абсолютные положительные постоянные или положительные постоянные, зависящие от системы $\mathfrak{Z}$, идеала $\mathfrak{m}$, остовник единиц $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$ и от базисных элементов

$$\omega_{1j}, \ldots, \omega_{nj}, \nu_j \qquad \left(j=1, \ldots, h(\mathfrak{m})\right).$$

То же относится к символам $O$, $\ll$, $\asymp$.

Методами работ [6], [7], [8], [9] получаем следующую лемму:

**Лемма 1.**

$$Z(s, \Xi) = \sum_{j=1}^{h(\mathfrak{m})} \chi(\nu_j) \sum_{N_j(l_1, \ldots, l_n) < c_1 V^{3n+4}}^{*} \xi_j(l_1, \ldots, l_n) |N_j(l_1, \ldots, l_n)|^{-s} + O(1). \tag{7}$$

**Лемма 2.** (*Обобщенная лемма Кубилюса,* [6] *лемма* 9.) *Пусть* $m>1$ *целое рациональное число*; $k_1$ *– целое число из интервала* $0\leqslant k_1\leqslant c_2$; $X>c_3$, *где* $c_3$ *достаточно велико*; $j$ *– одно из чисел* $1, \ldots, h(\mathfrak{m})$; $q$ *– одно из чисел* $1, 2, \ldots$; $\tau=1$ *или* 2; $A_{qj\tau}$, $B_{qj\tau}$ *– некоторые постоянные, зависящие от базисных элементов*:

$$D':\begin{cases} y^{(1)}\asymp X \\ 0\leqslant w_p(Y)<1 \qquad (p=1, \ldots, r_1-1), \\ y^{(l)}>0 \qquad (l=1, \ldots, r_1), \\ |y^{(l)}|\leqslant c_{4l}X, \ |y^{(l+r_2)}|\leqslant c_{4l}X \qquad (l=r_1+1, \ldots, r_1+r_2); \end{cases}$$

$$D'':\begin{cases} y^{(1)}\asymp X, \\ 0\leqslant w_p(Y)<1 \qquad (p=1, \ldots, r_1-1), \\ y^{(l)}>0 \qquad (l=1, \ldots, r_1), \\ |y^{(l)}|\leqslant c_{5l}X, \ |y^{(l+r_2)}|\leqslant c_{5l}X \qquad (l=r_1+1, \ldots, r_1+r_2), \end{cases}$$

где $c_{4l}<c_{5l}$.

*Тогда в области n-мерного сигнатурного пространства* $D''\backslash D'$, *которую будем обозначать через* $D$, *где* $D''\backslash D'$ *означает теоретико-множественную разность областей* $D''$ *и* $D'$, *всегда будет иметь место неравенство*

$$\left|\frac{\partial^m F}{\partial x_1^m}\right|\leqslant c_6 c_7^m (m-1)!\, VX^{-m}. \tag{8}$$

*Кроме того, при всякик фиксированных* $x_2, \ldots, x_n$ *из области* $D$, *существуют такие постоянные* $c_8$, $c_9$, $c_{10}$, *что интервал изменения* $x_1$ *можно разбить на* $\leqslant c_8^{m+k_1}$ *интервалов, в каждом из которых справедливо по крайней мере одно из неравенств*

$$\left|\frac{\partial^k F}{\partial x^k}\right|\geqslant c_9 c_{10}^k (k-1)!\, VX^{-k} \qquad (k=m+k_1,\ m+k_1+2). \tag{9}$$

Доказательство. В области $D$ условие $y^{(1)}\asymp X$ можно заменить условием

$$A_{q\tau j}X\leqslant x_{1q\tau j}\leqslant B_{q\tau j}X.$$

Тогда тождество (6) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} F_{q\tau j}(x_{1q\tau j}, \ldots, x_{nq\tau j}) = \exp\Bigg(-\Bigg(\sum_{p=1}^{r_1} V_p \ln \sum_{l=1}^{n} (\omega_{lq\tau j}^{(p)} x_{lq\tau j}+\nu_{q\tau j}^{(p)}) + \\ +\frac{1}{2}\sum_{p=r_1+1}^{r+1}\Big((2t-a_p+in_p)\ln\sum_{l=1}^{n}(\omega_{lq\tau j}^{(p)}x_{lq\tau j}+\nu_{q\tau j}^{(p)}) + \\ +(2t-a_p-in_p)\ln\sum_{l=1}^{n}(\omega_{lq\tau j}^{(p+r_2)}x_{lq\tau j}+\nu_{q\tau j}^{(p+r_2)})\Big)\Bigg)\Bigg) \end{aligned} \tag{10}$$

при условии, что

1. $\operatorname{sgn}\omega_{1q\tau j}^{(l)}=\operatorname{sgn}u_{1q\tau j}^{(l)}=\operatorname{sgn}V_l \qquad (l=1, \ldots, r_1)$

во всей области $D$.

2. $u_{1q1j}^{(l+r_2)}>\frac{c_{5l}}{c_{4l}}u_{1q1j}^{(l)} \quad (u_{1q1j}^{(l)}>0,\ u_{1q1j}^{(l+r_2)}>0) \qquad (l=r_1+1, \ldots, r_1+r_2)$

в той части области $D$, для которой

$$c_{4l}X \leqslant y^{(l)} \leqslant c_{5l}X$$
$$0 \leqslant y^{(l+r_2)} \leqslant y^{(l)},$$
$$-c_{5l}X \leqslant y^{(l)} \leqslant -c_{4l}X$$
$$y^{(l)} \leqslant y^{(l+r_2)} \leqslant 0,$$
$$-c_{5l}X \leqslant y^{(l+r_2)} \leqslant -c_{4l}X$$
$$0 \leqslant y^{(l)} \leqslant -y^{(l+r_2)},$$
$$c_{4l}X \leqslant y^{(l+r_2)} \leqslant c_{5l}X$$
$$-y^{(l+r_2)} \leqslant y^{(l)} \leqslant 0 \qquad (l=r_1+1,\ \ldots,\ r_1+r_2).$$

В остальной части области $D$ надо взять

$$u_{1q2j}^{(l+r_2)} < \frac{c_{4l}}{c_{5l}}\, u_{1q2j}^{(l)} \qquad (u_{1q2j}^{(l)} > 0,\ u_{1q2j}^{(l+r_2)} > 0, \qquad l=r_1+1,\ \ldots,\ r_1+r_2).$$

Условия 1 и 2 возможны благодаря принципу строений основных векторов $n$-мерного векторника (см. [3] и [4]).

В дальнейшем индексы $q$, $\tau$ и $j$ мы будем пропускать.

Простым подсчетом из формулы (10) получаем:

$$\frac{\partial^m F}{\partial x_1^m} = (-1)^m (m-1)!\left(\sum_{l=1}^{r_1} V_l\left(\frac{\omega_1^{(l)}}{x^{(l)}}\right)^m + \sum_{l=r_1+1}^{r+1} V_l\left|\frac{\omega_1^{(l)}}{x^{(l)}}\right|^m \cos(\vartheta_l + m\varphi_l)\right), \quad (11)$$

де $\vartheta_l$ — аргумент комплексного числа $2t - a_l + in_l$ $(l=r_1+1,\ \ldots,\ r_1+r_2)$; $\varphi_l$ — аргумент комплексного числа $\frac{\omega_1^{(l)}}{x^{(l)}}$ $(l=r_1+1,\ \ldots,\ r_1+r_2)$.

Из формул (5) и (11) следует неравенство (8).

Далее, имеем:

$$\sin\varphi_l = \frac{1}{|\omega_1^{(l)}|\,|x^{(l)}|}\, I(\omega_1^{(l)} x^{(l+r_2)}) = \frac{u_1^{(l+r_2)} y^{(l)} - u_1^{(l)} y^{(l+r_2)}}{\sqrt{u_1^{(l)2} + u_1^{(l+r_2)2}}\ \sqrt{y^{(l)2} + y^{(l+r_2)2}}},$$

$$\sin 2\varphi_l = \frac{2\,(u_1^{(l+r_2)} y^{(l)} - u_1^{(l)} y^{(l+r_2)})\ (u_1^{(l)} y^{(l)} + u_1^{(l+r_2)} y^{(l+r_2)})}{(u_1^{(l)2} + u_1^{(l+r_2)2})\ (y^{(l)2} + y^{(l+r_2)2})} \qquad (l=r_1+1,\ \ldots,\ r_1+r_2).$$

В силу условий 2 имеем, что

$$|\sin\varphi_l| > c_{11},\ |\sin 2\varphi_l| > c_{12} \qquad (l=r_1+1,\ \ldots,\ r_1+r_2).$$

Ввиду последних неравенств и условий 1, 2, всегда можно подобрать такое целое рациональное число $k_1$ $(k_1 > 0,\ k_1 = k_1(m,\ \varphi_l,\ \mathrm{sgn}\, V_l)$, чтобы

$$\left|\frac{\partial^k F}{\partial x_1^k}\right| = (k-1)!\left(\sum_{l=1}^{r_1} |V_l|\left|\frac{\omega_1^{(l)}}{x^{(l)}}\right|^k + \sum_{l=r_1+1}^{r_1+r_2} V_l\left|\frac{\omega_1^{(l)}}{x^{(l)}}\right|\,|\cos(\vartheta_l + k\varphi_l)|\right) \quad (12)$$
$$(k=m+k_1,\ m+k_1+2).$$

Исследуем несколько случаев:

а) $V=|V_l|$ $(l=1,\ \ldots,\ r_1)$. Из соотношений (5) и (12) получаем оценку (9) в области $D$. $(k=m+k_1,\ m+k_1+2)$;

б) $V=V_l$ $(l=r_1+1,\ \ldots,\ r_1+r_2)$.

Если во всех точках области $D$, при условии 2, имеет место неравенство.

$$|\cos(k\varphi_l + \vartheta_l)| > c_{13}$$

по крайней мере для одного значения $k\,(k=m+k_1,\ k=m+k_1+2)$, то при помощи оценки (5) неравенство (9) будет иметь место, соответственно, при $k=m+k_1$ или $k=m+k_1+2$, или при одном и другом значении вместе.

Если в какой-нибудь точке области $D$

$$\left|\cos\left((m+k_1)\varphi_l+\vartheta_l\right)\right|\leqslant\frac{c_{12}}{\sqrt{4+c_{12}^2}}=c_{13}, \tag{13}$$

то в этой же самой точке

$$\left|\cos\left((m+k_1+2)\varphi_l+\vartheta_l\right)\right|>|\sin 2\varphi_l|\sqrt{1-\cos^2\left((m+k_1)\varphi_l+\vartheta_l\right)}-$$

$$-\left|\cos\left((m+k_1)\varphi_l+\vartheta_l\right)\right|\geqslant c_{12}\sqrt{1-c_{13}^2}-c_{13}=c_{13}.$$

Если для всех $x_1$ из рассматриваемой области $D$, при фиксированных $x_2, \ldots, x_n$, имеет место неравенство (13), то тогда неравенство (9) будет иметь место при $k=m+k_1+2$.

Допустим теперь, что для некоторого $x_1=x_1^{(0)}$

$$\left|\cos\left((m+k_1)\varphi_l+\vartheta_l\right)\right|>c_{13},$$

т. е.

$$\left|\frac{\partial^{m+k_1}}{\partial x_1^{m+k_1}}F(x_1^{(0)}, x_2, \ldots, x_n)\right|>c_{13}c_{10}^{m+k_1}(m+k_1-1)!\,VX^{-(m+k_1)}.$$

Тогда для всех $x_1$ из интервала

$$|x_1-x_1^{(0)}|\leqslant\frac{1}{2}c_{13}c_{10}^{m+k_1}c_6^{-1}c_7^{-(m+k_1-1)}(m+k_1)^{-1}X$$

имеем:

$$\left|\frac{\partial^{m+k_1}}{\partial x_1^{m+k_1}}F(x_1, \ldots, x_n)\right|\geqslant\left|\frac{\partial^{m+k_1}}{\partial x_1^{m+k_1}}F(x_1^{(0)}, x_2, \ldots, x_n)\right|-$$

$$-|x-x_1^{(0)}|\left|\frac{\partial^{m+k_1+1}}{\partial x_1^{m+k_1+1}}F(x_1^{(0)}, x_2, \ldots, x_n)\right|>c_{13}c_{10}^{m+k_1}(m+k_1-1)!\,VX^{-(m+k_1)}-$$

$$-|x_1-x_1^{(0)}|\,c_6c_7^{m+k_1-1}(m+k_1)!\,VX^{-(m+k_1+1)}\geqslant\frac{1}{2}c_{13}c_{10}^{m+k_1}(m+k_1-1)!\,VX^{-(m+k_1)}.$$

Итак, из всего изложенного следует второе утверждение леммы.

В случае чисто вещественного поля формулировка леммы проще; она дана в работе [9], лемма 10. Упрощается доказательство леммы и в других отдельных случаях, например: при $r_1\leqslant 1$, $r_2\geqslant 1$.

При помощи оценок тригонометрических сумм И. М. Виноградова [2], Н. М. Коробова [5] и настоящей леммы, методами работы [9] получаем следующие леммы.

**Лемма 3.** *Пусть* $V>c_{14}$, $\ln V_0=\ln^{\frac{5}{7}}V(\ln\ln V)^{-\frac{2}{7}}$, $\ln V_{00}=\ln^{\frac{3}{4}}V(\ln\ln V)^2$, $V_0\leqslant X\leqslant V_{00}$; $X'$, $X''$ *— целые рациональные числа*; $AX\leqslant X'\leqslant x_1\leqslant X''\leqslant BX$ *($A$ и $B$ взятые из леммы 2), тогда в области $D$ ($D$ — область леммы 2)*

$$\sum_{X'<l_1\leqslant X''}\exp\left(iF(l_1, x_2, \ldots, x_n)\right)\ll X\exp\left(-c_{15}\ln^{-\frac{5}{7}}V(\ln\ln V)^{\frac{2}{7}}\ln X\right).$$

**Лемма 4.** *Пусть* $V > c_{14}$, $V_{00} \leqslant X \leqslant c_{16} V^{2+\frac{4}{n}}$, *тогда в области* $D$

$$\sum_{X' \leqslant l_1 \leqslant X''} \exp\left(iF(l_1, x_2, \ldots, x_n)\right) \ll X \exp\left(c_{17} \ln^{\frac{1}{4}} V - c_{18} \ln^{-\frac{1}{2}} V (\ln\ln V)^3 \ln X\right),$$

*где все обозначения из леммы* 3.

**Лемма 5.** *В области*

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{n} c_{15} \ln^{-\frac{5}{7}} V (\ln\ln V)^{\frac{2}{7}}, \quad V > c_{14}$$

*справедлива оценка*

$$Z(s, \Xi) \ll \exp(c_{19} \ln\ln V).$$

Доказательство. В тождестве (7) оцениваем внутреннюю сумму при $V > c_{20} > c_{14}$, где $c_{20}$ достаточно велико.

Для этого рассматриваем в $n$-мерном вещественном сигнатурном пространстве $(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})$ последовательность $n$-мерных областей $D_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots$

$$D_\mu : \begin{cases} c_{21}^{\mu-1} V_0 < y^{(1)} \leqslant c_{21}^{\mu} V_0, \\ 0 \leqslant w_j(Y) < 1 \qquad (j = 1 \ldots, r_1 - 1), \\ y^{(l)} > 0 \qquad (l = 1, \ldots, r_1), \\ |y^{(l)}| \leqslant c_{22l}^{\mu} V_0, \quad |y^{(l+r_2)}| \leqslant c_{22l}^{\mu} V_0 \\ (l = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2). \end{cases}$$

В случае $\mu = 0$, областью $D_0$ будем считать:

$$D_0 : \begin{cases} 0 < y^{(1)} \leqslant V_0, \\ 0 \leqslant w_j(Y) < 1 \qquad (j = 1, \ldots, r_1 - 1), \\ y^{(l)} > 0 \qquad (l = 1, \ldots, r_1), \\ |y^{(l)}| V_0, \ |y^{(l+r_2)}| \leqslant V_0 \\ (l = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2), \end{cases}$$

где $V_0$ и $w_j(Y)$ определены выше.

Имеем:

$$\sum_{\substack{N(l_1, \ldots, l_n) \leqslant c_1 V^{2n+4} \\ \alpha > 0}}^{*} \xi(l_1, \ldots, l_n) N(l_1, \ldots, l_n)^{-s} =$$

$$= \frac{1}{g} \sum_{\substack{N(l_1, \ldots, l_n) \neq 0 \\ (l_1, \ldots, l_n) \in D_0}} \xi(l_1, \ldots, l_n) N(l_1, \ldots, l_n)^{-s} +$$

$$+ \frac{1}{g} \sum_{\mu \geqslant 1} \sum_{\substack{(l_1, \ldots, l_n) \in D_\mu \setminus D_{\mu-1} \\ N(l_1, \ldots, l_n) \leqslant c_1 V^{2n+4}}} \xi(l_1, \ldots, l_n) N(l_1, \ldots, l_n)^{-s}. \tag{14}$$

Первую сумму в формуле (14) оцениваем тривиально:

$$\sum_{\substack{(l_1, \ldots, l_n) \in D_0 \\ N(l_1, \ldots, l_n) \neq 0}} \xi(l_1, \ldots, l_n) N(l_1, \ldots, l_n)^{-s} \ll$$

$$\ll \sum_{0 < \beta^{(1)} \leqslant V_0} \beta^{(1)^{-n\sigma}} \beta^{(1)^{n-1}} \ll V_0^{n(1-\sigma)} \ll 1,$$

где $\beta$ определена формулой (2).

Для оценки остальных слагаемых в формуле (14) каждую сумму разбиваем следующим образом:

$$\sum_{\substack{(l_1, \ldots, l_n) \in D_\mu \setminus D_{\mu-1} \\ N(l_1, \ldots, l_n) \leqslant c_1 V^{2n+4}}} \xi(l_1, \ldots, l_n)\, N(l_1, \ldots, l_n)^{-s} = \Bigg( \sum_{(l_1, \ldots, l_n) \in \mathfrak{D}_1}' + $$

$$+ \sum_{(l_1, \ldots, l_n) \in \mathfrak{D}_2}' + \sum_{(l_1, \ldots, l_n) \in \mathfrak{D}_3}' + \sum_{(l_1, \ldots, l_n) \in \mathfrak{D}_4}' + \sum_{(l_1, \ldots, l_n) \in \mathfrak{D}_5}' + \sum_{(l_1, \ldots, l_n) \in \mathfrak{D}_6}' +$$

$$+ \sum_{(l_1, \ldots, l_n) \in \mathfrak{D}_7}' + \sum_{(l_1, \ldots, l_n) \in \mathfrak{D}_8}' \Bigg) \cdot \xi(l_1, \ldots, l_n)\, N(l_1, \ldots, l_n)^{-s} = \sum_{p=1}^{8} S_{\mu p}, \tag{15}$$

где $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_8$ означают области $n$-мерного вещественного сигнатурного пространства:

$$\mathfrak{D}_1: \begin{cases} A_1 X < l_1 \leqslant B_1 X, \\ 0 \leqslant w_j(\beta) < 1 \qquad (j = 1, \ldots, r_1 - 1), \\ \beta^{(l)} > 0 \qquad (l = 1, \ldots, r_1), \\ c_{4l} X < \beta^{(l)} \leqslant c_5 X, \ 0 \leqslant \beta^{(l+r_2)} < \beta^{(l)} \\ (l = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2); \end{cases}$$

$$\mathfrak{D}_2: \begin{cases} A_1 X < l_1 \leqslant B_1 X, \\ 0 \leqslant w_j(\beta) < 1 \qquad (j = 1, \ldots, r_1 - 1), \\ \beta^{(l)} > 0 \qquad (l = 1, \ldots, r_1), \\ -c_{5l} X \leqslant \beta^{(l)} < -c_{4l} X, \ \beta^{(l)} < \beta^{(l+r_2)} \leqslant 0 \\ (l = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2); \end{cases}$$

$$\mathfrak{D}_3: \begin{cases} A_1 X < l_1 \leqslant B_1 X, \\ 0 \leqslant w_j(\beta) < 1 \qquad (j = 1, \ldots, r_1 - 1), \\ \beta^{(l)} > 0 \qquad (l = 1, \ldots, r_1), \\ c_{4l} X < \beta^{(l+r_2)} \leqslant c_{5l} X, \ -\beta^{(l+r_2)} < \beta^{(l)} \leqslant 0 \\ (l = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2); \end{cases}$$

$$\mathfrak{D}_4: \begin{cases} A_1 X < l_1 \leqslant B_1 X, \\ 0 \leqslant w_j(\beta) < 1 \qquad (j = 1, \ldots, r_1 - 1), \\ \beta^{(l)} > 0 \qquad (l = 1, \ldots, r_1), \\ -c_{5l} X \leqslant \beta^{(l+r_2)} < -c_{4l} X, \ 0 \leqslant \beta^{(l)} < -\beta^{(l+r_2)} \\ (l = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2); \end{cases}$$

$$\mathfrak{D}_5: \begin{cases} A_2 X < l_1 \leqslant B_2 X, \\ 0 \leqslant w_j(\beta) < 1 \qquad (j = 1, \ldots, r_1 - 1), \\ \beta^{(l)} > 0 \qquad (l = 1, \ldots, r_1), \\ c_{4l} X < \beta^{(l)} \leqslant c_{5l} X, \ -\beta^{(l)} \leqslant \beta^{(l+r_2)} < 0 \\ (l = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2); \end{cases}$$

$$\mathfrak{D}_6: \begin{cases} A_2 X < l_1 \leqslant B_2 X, \\ 0 \leqslant w_j(\beta) < 1 \qquad (j = 1, \ldots, r_1 - 1), \\ \beta^{(l)} > 0 \qquad (l = 1, \ldots, r_1), \\ -c_{5l} X \leqslant \beta^{(l)} < -c_{4l} X, \ 0 < \beta^{(l+r_2)} \leqslant -\beta^{(l)} \\ (l = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2); \end{cases}$$

$$\mathfrak{D}_7: \begin{cases} A_2 X < l_1 \leqslant B_2 X, \\ 0 \leqslant w_j(\beta) < 1 \qquad (j=1, \ldots, r_1-1), \\ \beta^{(l)} > 0 \qquad (l=1, \ldots, r_1), \\ c_{4l} X < \beta^{(l+r_1)} \leqslant c_{5l} X, \ 0 < \beta^{(l)} \leqslant \beta^{(l+r_1)} \\ (l=r_1+1, \ldots, r_1+r_2); \end{cases}$$

$$\mathfrak{D}_8: \begin{cases} A_2 X < l_1 \leqslant B_2 X, \\ 0 \leqslant w_j(\beta) < 1 \qquad (j=1, \ldots, r_1-1), \\ \beta^{(l)} > 0 \qquad (l=1, \ldots, r_1), \\ -c_{5l} X \leqslant \beta^{(l+r_1)} < -c_{4l} X, \ \beta^{(l+r_1)} \leqslant \beta^{(l)} < 0 \\ (l=r_1+1, \ldots, r_1+r_2); \end{cases}$$

$A_\tau$, $B_\tau$ $(\tau=1, 2)$ константы леммы 2;

$$c_{4l} X = c_{22l}^{\mu-1} V_0, \quad c_{5l} X = c_{22l}^{\mu} V_0;$$

знак $'$ при знаке суммы означает, что суммирование ведется только по точкам $(l_1, \ldots, l_n)$, для которых $N(l_1, \ldots, l_n) \leqslant c_1 V^{2n+4}$.

Каждую сумму из формулы (15) оцениваем отдельно при помощи преобразования по Абелю:

$$S_{\mu 1} \leqslant X^{-n\sigma} \sum_{\mathfrak{D}_1'} \max_{A_1 X < X' \leqslant l_1 \leqslant X'' \leqslant B_1 X} \left| \sum_{X' \leqslant l_1 \leqslant X''} \exp\left(iF(l_1, \ldots, l_n)\right) \right|,$$

где

$$\mathfrak{D}_1': \begin{cases} 0 \leqslant w_j' \leqslant w_j(\beta) \leqslant w_j'' < 1 \qquad (j=1, \ldots, r_1-1), \\ \beta^{(l)} > 0 \qquad (l=1, \ldots, r_1), \\ c_{4l} X < X_l' \leqslant \beta^{(l)} \leqslant X_l'' \leqslant c_{5l} X, \\ 0 \leqslant X_{l+r_1}' \leqslant \beta^{(l+r_1)} \leqslant X_{l+r_1}'' < \beta^{(l)} \\ (l=r_1+1, \ldots, r_1+r_2). \end{cases}$$

Если $V_{00} \leqslant X \leqslant c_{16} V^{2+\frac{4}{n}}$, где $V_{00}$ число лемм 3 и 4, то по лемме 4 имеем:

$$S_{\mu 1} \leqslant X^{n(1-\sigma)} \exp\left(c_{17} \ln^{\frac{1}{4}} V - c_{18} \ln^{-\frac{1}{2}} V (\ln \ln V)^3 \ln X\right) \leqslant 1$$

при $V > c_{20}$, где $c_{20}$ достаточно велико.

Если $V_0 \leqslant X \leqslant V_{00}$, то по лемме 3 имеем:

$$S_{\mu 1} \leqslant X^{n(1-\sigma)} \exp\left(-c_{15} \ln^{-\frac{5}{7}} V (\ln \ln V)^{\frac{2}{7}} \ln X\right) \leqslant 1.$$

Таким образом, оцениваются и другие суммы из формулы (15). Для них верны те же оценки. Так как число вышерассматриваемых в $n$-мерном вещественном сигнатурном пространстве $n$-мерных областей $D_\mu$, имеющих хотя бы одну точку $(l_1, \ldots, l_n)$, для которой $N(l_1, \ldots, l_n) \leqslant c_1 V^{2n+4}$ есть $\leqslant \ln V$, то из полученных оценок выводим лемму.

Методом И. Кубилюса [6] получаем следующую теорему:

**Теорема 1.** *Пусть* $x > 3$, $(\mathfrak{m}, \nu) = 1$;

$$\{w_j(x)\} = w_j(x) - [w_j(x)] \qquad (j=1, \ldots, n-1).$$

*Число простых неассоциированных* $\operatorname{mod} \mathfrak{m}$ *идеальных чисел* $\mathfrak{p}$ *системы* $\mathfrak{Z}$, *удовлетворяющих условиям:*

$$|N(\mathfrak{p})| \leqslant x, \quad \mathfrak{p} \equiv \nu \pmod{\mathfrak{m}}, \quad \mathfrak{p}\nu^{-1} > 0,$$

$$0 \leqslant w_j' \leqslant \{w_j(\mathfrak{p})\} < w_j'' \leqslant 1 \qquad (j=1, \ldots, n-1),$$

*выражается формулой*

$$Q(x,\ \mathfrak{m},\ \nu)=\frac{e(\mathfrak{m})}{h(\mathfrak{m})}\prod_{j=1}^{n-1}(w_j''-w_j')\int_2^x\frac{du}{\ln u}+O\left(x\exp\left(-c_{23}\ln^{\frac{7}{12}}x(\ln\ln x)^{-\frac{5}{12}}\right)\right).$$

Полученные результаты можно перенести еще к следующим теоремам, доказанным И. Кубилюсом (см. [6], теоремы 2 и 3).

**Теорема 2.** *Пусть остаются обозначения теоремы* 1. *Условие теоремы* 1 *дополним тем, что множество* $\mathfrak{A}$, *где*

$$\{w_j(\mathfrak{p})\}\in\mathfrak{A}\subset 0<w_j'\leqslant\{w_j\}\leqslant w_j''<1 \qquad (j=1,\ \ldots,\ n-1),$$

*обладает свойством* $\Delta$*-гладкости (если для любого* $\Delta>0$ *при всяком регулярном разбиении* $(n-1)$*-мерного пространства, в котором лежит* $\mathfrak{A}$, *на* $(n-1)$*-мерные кубы с ребрами* $\Delta$, *сумма объемов всех кубов разбиения, имеющих хотя бы одну общую точку с границей множества* $\mathfrak{A}$, $\ll\Delta$),

$$\Delta=\exp\left(-\frac{c_{23}}{n}\ln^{\frac{7}{12}}x(\ln\ln x)^{-\frac{11}{7}}\right).$$

*Тогда*

$$Q(x,\ \mathfrak{m},\ \nu)=\frac{e(\mathfrak{m})}{h(\mathfrak{m})}V(\mathfrak{A})\int_2^x\frac{du}{\ln u}+O\left(x\exp\left(-\frac{c_{23}}{n}\ln^{\frac{7}{12}}x(\ln\ln x)^{\frac{5}{12}}\right)\right),$$

*где* $V(\mathfrak{A})$ = *объем множества* $\mathfrak{A}$.

**Теорема 3.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *фиксированная конечная* $(n-1)$*-мерная область, лежащая в* $n$*-мерном сигнатурном пространстве* $R_{r_1,r_2}$ *на той части поверхности* $|N(Y)|=3$, *для которой*

$$y^{(1)}\operatorname{sgn}\nu^{(1)}>0,\ \ldots,\ y^{(r_1)}\operatorname{sgn}\nu^{(r_1)}>0$$

($\nu$ — *целое идеальное число*, $(\nu,\ \mathfrak{m})=1$.

*$n$-мерную область, полученную путем усечения конуса в* $R_{r_1,r_2}$ *с вершиной в начале координат поверхностью* $|N(Y)|=3$ *и* $(n-1)$*-мерной поверхностью* $\mathfrak{G}$ *будем просто называть* $\mathfrak{K}$. *Предположим, что область* $\mathfrak{K}$ *удовлетворяет условиям:*

1. *Для всякой точки* $Y\in\mathfrak{K}$

$$3\leqslant|N(Y)|\leqslant u,\ \text{где}\ u\geqslant 3.$$

2. *Всякий луч, исходящий из начала координат и имеющий хотя бы одну общую точку с* $\mathfrak{K}$, *пересекает* $\mathfrak{G}$ *в одной и только в одной точке.*

3. *Пусть* $\mathfrak{K}'$ — *проекция* $\mathfrak{K}$ *лучами, исходящими из начала координат в поверхность* $|N(Y)|=3$. *Тогда*: а) $\mathfrak{K}'$ *лежит в* $\mathfrak{F}$, б) *граница* $\mathfrak{K}$ *удовлетворяет следующему условию „гладкости“: если вокруг каждой граничной точки опишем* $n$*-мерную сферу радиуса* $\Delta$, *то мера множества, полученного объединением всех этих сфер,* $\ll\Delta^2$ *для любого* $\Delta>0$

$$\left(\Delta=\exp\left(-\frac{c_{23}}{n}\ln^{\frac{7}{12}}u(\ln\ln u)^{\frac{5}{12}}\right)\right).$$

4. *Для любой пары точек*

$$Y'\in\mathfrak{G},\ Y''\in\mathfrak{G},$$

$$N(Y')-N(Y'')\ll u\psi^{\delta},$$

*где* $\psi$ — *угол между лучами* $OY'$ *и* $OY''$, $\delta$ — *фиксированное число*, $0<\delta\leqslant 1$.

*Тогда число простых идеальных точек* $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \equiv \nu \pmod{\mathfrak{m}}$, *лежащих в* $\mathfrak{K}$, *выражается формулой*

$$Q(\mathfrak{K}, \mathfrak{m}, \nu) = \frac{g'}{\pi^{r_2} h(\mathfrak{m}) R} \int \cdots \int_{\mathfrak{K}} \frac{dY}{\ln |N(Y)|} +$$

$$+ O\left(u \exp\left(-\frac{c_{23}}{n} \delta \ln^{\frac{7}{12}} u (\ln \ln u)^{-\frac{5}{12}}\right)\right);$$

*где* $g'$ *— число всех корней из* 1, *принадлежащих полю* $K$, $R$ *— регулятор поля* $K$ (*см.* [12]). *Символ* $O$ *зависит от* $K$, $\mathfrak{m}$ *и* $\mathfrak{G}$.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность проф. И. Кубилюсу за предложенную тему и руководство настоящей работой.

Кафедра общей математики
Каунасского политехнического
института

Поступило в редакцию
25.XII.1964

## ЛИТЕРАТУРА


1. В. М. Архангельская, $L$-функции Дирихле, Изд. Саратовского у-тета (1962).
2. И. М. Виноградов, Избранные труды, Москва (1952).
3. Б. Н. Делоне, Геометрия бинарных квадратичных форм, Приложение к книге П. Г. Лежен Дирихле, лекции по теории чисел, М.,—Л. (1936).
4. Б. Н. Делоне и Д. К. Фадеев, Теория иррациональности третьей степени, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XI (1940).
5. Н. М. Коробов, Оценки сумм Вейля и распределение простых чисел, Доклады АН СССР, 123, № 1 (1958), 28—31.
6. И. П. Кубилюс, О некоторых задачах геометрии простых чисел, Мат. сб., 31 (73) : 3 (1952), 507—542.
7. И. П. Кубилюс, Об одной задаче многомерной аналитической теории чисел, Ученые труды Вильнюсского ГУ, Серия мат.-физ. и хим. наук, 4 (1955), 5—43, на литовском языке, резюме на русском языке.
8. И. И. Урбялис, Распределение простых чисел вещественного квадратичного поля $K(\sqrt{2})$, Лит. мат. сб., IV, 3 (1964), 409—427.
9. И. И. Урбялис, Распределение простых чисел чисто вещественного поля алгебраических чисел, Лит. мат. сб., V, 2 (1965) 119—136.
10. Н. Г. Чудаков, Введение в теорию $L$-функций Дирихле, Гостехиздат (1947).
11. E. Hecke, Über eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen I, Math. Z., 1 (1918), 357—376; II, Math. Z., 6 (1920), 11—51.
12. E. Hecke, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig (1923).
13. E. Landau, Über Ideale und Primideale in Idealklassen, Math. Z., 2 (1918), 52—154.
14. H. Rademacher, Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper. III, Über die Darstellung totalpositiver Zahlen als Summen von totalpositiven Primzahlen in einem beliebigen Zahlkörper, Math. Z., 27 (1928), 321—426.


## PIRMINIŲ ALGEBRINIŲ SKAIČIŲ PASISKIRSTYMAS

J. URBELIS

(*Reziumė*)

Sakysime, kad $K$ — $n$-jo laipsnio algebrinių skaičių kūnas ir $\mathfrak{Z}$ kūną atitinkanti tam tikra, fiksuota idealinių skaičių sistema. Pasinaudojant J. Kubiliaus metodu, taikomi I. M. Vinogradovo ir N. M. Korobovo trigonometrinių sumų įvertinimai Hekės $Z$-funkcijai

$$Z(s, \Xi) = \sum_{\alpha}^{*} \Xi(\alpha) \, | N(\alpha) |^{-s},$$

kur suma yra išplėsta į visus sistemos $\mathfrak{Z}$ neasocijuotus sveikus idealinius skaičius $\alpha$. $\Xi(\alpha)$ – antros rūšies Hekės charakteris mod $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ – kūno $K$ sveikas idealas, $N(\alpha)$ – idealinio skaičiaus $\alpha$ norma, $s$ – kompleksinis kintamasis. Gaunamos kai kurios pirminių skaičių pasiskirstymo teoremos, analogiškos J. Kubiliaus gautoms teoremoms, tik su geresniais liekamojo nario įvertinimais.

## DIE VERTEILUNG DER ALGEBRAISCHEN PRIMZAHLEN

J. URBELIS

(*Zusammenfassung*)

Es sei $K$ ein algebraischer Zahlkörper $n$-ten Grades und $\mathfrak{Z}$ ein bestimmter diesem Körper entsprechender fester Bereich idealer Zahlen. Nach der Methode von J. Kubilius lässt sich die Abschätzungen von Exponentialsummen von I. M. Winogradow und N. M. Korobow für Heckesche Zetafunktion

$$Z(s, \Xi)=\sum_{\alpha}^{*} \Xi(\alpha)\,|\,N(\alpha)\,|^{-s}$$

anwenden, wo $\alpha$ alle nicht assoziierten idealen ganzen Zahlen von $\mathfrak{Z}$ durchläuft. $\Xi(\alpha)$ – Heckescher Grössencharakter für Ideale mod $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ – ein ganzes Ideal des Körpers $K$, $N(\alpha)$ – Norma der idealen Zahl $\alpha$ und $s$ – komplexische Variable. Man bekommt einige Sätze über die Verteilung der Primzahlen, die den von J. Kubilius erhaltenen Sätzen analog sind, doch mit besseren Abschätzungen des Restgliedes.