V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 3
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1965

О НЕКОТОРЫХ МЕРАХ

Е. Ш. ЧАЦКАЯ

Введение

Пусть E – компактное множество комплексной плоскости Z, $\mu(e)$ – конечная положительная мера, заданная на борелевских подмножествах e компакта E, а $L_p(\mu)$, $p \geqslant 1$ – пространство функций $\omega(z)$, удовлетворяющих условию:

$$\|\omega\| = \left\{ \int_E |\omega(z)|^p \, d\mu \right\}^{1/p} < \infty .$$

Назовем меру μ приведенной относительно множества E, если мера каждой непустой порции E положительна.

Напомним, что компактное множество E имеет нулевую аналитическую емкость: $\Omega(E)=0$, если в дополнении $Z \setminus E$ к E нет ограниченных аналитических функций, отличных от констант.

В работах С. Я. Хавинсона (1), (2) и В. П. Хавина (3), (4) было показано следующее:

Всякую непрерывную функцию $\Phi(z)$ на множестве E нулевой аналитической емкости можно приблизить такой последовательностью рациональных функций $\sum^{(k)} \frac{\lambda_j^{(k)}}{z-a_j^{(k)}}$ с полюсами вне E, что

$$\max_{z \in E} \left| \Phi(z) - \sum^{(k)} \frac{\lambda_j^{(k)}}{z-a_j^{(k)}} \right| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \tag{1}$$

и при этом

$$\sum^{(k)} |\lambda_j^{(k)}| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0. \tag{2}$$

Обратно, если на компакте E, о котором дополнительно предположено, что длина его (по Пенлеве) конечна (см. (2)), *функция $\omega(z) \equiv 1$ может быть приближена рациональными дробями так, что выполняются условия* (1) *и* (2), *то* $\Omega(E)=0$.

В силу сказанного очевидно, что на множестве E, $\Omega(E)=0$, для всякой меры μ и любой $\omega(z) \in L_p(\mu)$, $p \geqslant 1$ найдется последовательность дробей $\sum^{(k)} \frac{\lambda_j^{(k)}}{z-a_j^{(k)}}$ с полюсами вне E, удовлетворяющая условиям:

$$\int_E \left| \omega(z) - \sum^{(k)} \frac{\lambda_j^{(k)}}{z-a_j^{(k)}} \right|^p d\mu \xrightarrow[k \to \infty]{} 0, \tag{3}$$

$$\sum^{(k)} |\lambda_j^{(k)}| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0. \tag{4}$$

Поставим обратную задачу. Пусть для некоторой меры μ (ее, естественно надо считать приведенной) условия (3) и (4) выполняются для всех $\omega(z)\in L_p(\mu)$, $p\geqslant 1$. Можно ли отсюда заключить, что $\Omega(E)=0$? Отрицательный ответ на этот вопрос дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Для любого нигде не плотного компакта E существует приведенная мера μ такая, что при всех $p\geqslant 1$ для любой функции $\omega(z)\in L_p(\mu)$ можно построить последовательность агрегатов $\sum^{(k)}\frac{\lambda_j^{(k)}}{z-a_j^{(k)}}$, для которых*

$$\int_E\left|\omega(z)-\sum^{(k)}\frac{\lambda_j^{(k)}}{z-a_j^{(k)}}\right|^p d\mu \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

$$\sum^{(k)}|\lambda_j^{(k)}| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Если же потребовать, чтобы на E все меры μ подчинялись условиям (3) и (4), то (см. теорему 3) при дополнительном предположении о конечности длины E, аналитическая емкость E равна нулю.

Построенная в теореме 1 мера μ имеет своим существенным носителем счетное множество точек $\{z_n\}_1^\infty$ (т. е. $\mu(E\setminus\{z_n\}_1^\infty)=0$).

Оказывается, что и любая мера, для которой выполняются условия (3) и (4), должна быть сосредоточена на достаточно редких подмножествах E. Обозначим через $A(E)=\{\mu\}$ класс всех мер нигде не плотного компакта E, для которых выполняются (3) и (4). Мы докажем (теорема 4), что если $\mu\in A(E)$, то μ сингулярна относительной любой хаусдорфовой h-меры, определяемой функцией $h(r)$ при условии: $\int_0 \frac{h(r)}{r^2}dr<\infty$ (относительно хаусдорфовых мер см. (5)).

Пользуюсь случаем поблагодарить профессора С. Я. Хавинсона за руководство и помощь в работе.

Доказательство теоремы 1. Пусть $K=\{z_n\}_1^\infty$ — счетное всюду плотное подмножество E, $\omega_n(z)$ — характеристическая функция множества, состоящего из одной точки z_n.

Для каждой $\omega_n(z)$, $n=1, 2, \ldots$ легко построить такую дробь

$$\sum^{(1)}\frac{\lambda_j^{(n,1)}}{z-a_j^{(n,1)}}$$

(даже состоящую из одного члена), что

$$\left|\omega_n(z_1)-\sum^{(1)}\frac{\lambda_j^{(n,1)}}{z-a_j^{(n,1)}}\right|\leqslant 1, \quad \sum|\lambda_j^{(n,1)}|\leqslant 1, \qquad n=1, 2, \ldots$$

E — нигде не плотное множество, поэтому точки $a_j^{(n,1)}$ можно выбрать вне E.

Пусть

$$\max_{z\in E}\left|\omega_n(z)-\sum^{(1)}\frac{\lambda_j^{(n,1)}}{z-a_j^{(n,1)}}\right|=M_1^{(n)}, \qquad n=1, 2, \ldots$$

Так как $\omega_n(z_1)=0$, $n=2, 3, 4, \ldots$, то дроби $\sum^{(1)} \frac{\lambda_j^{(n, 1)}}{z-a_j^{(n, 1)}}$ можно взять одинаковыми для $n=2, 3, 4, \ldots$ Обозначим

$$M_1 = \max_{n=1, 2, \ldots} \{M_1^{(n)}\} = \max \left\{ M_1^{(1)}, \max_{z\in E} \left| 1 - \sum^{(1)} \frac{\lambda_j^{(2, 1)}}{z-a_j^{(2, 1)}} \right|, \right.$$

$$\left. \max_{z\in E} \left| \sum^{(1)} \frac{\lambda_j^{(2, 1)}}{z-a_j^{(2, 1)}} \right| \right\}. \tag{5}$$

Положим $\mu(z_1)=1$, а

$$\mu(z_2) = \min\left[\frac{\mu(z_1)}{2}, \frac{1}{2M_1}\right] \leqslant \frac{1}{2}.$$

Покажем, как построить $\mu(z_3)$, $\mu(z_4)$, ... Возьмем множество $E_k = \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$. Из обычного способа доказательства теоремы Рунге (см., например, (6), стр. 35, теорема 13) легко следует, что для каждой $\omega_n(z)$, $n=1, 2, \ldots$ найдется дробь $\sum^{(k)} \frac{\lambda_j^{(n, k)}}{z-a_j^{(n, k)}}$, удовлетворяющая условиям:

$$\left| \omega_n(z) - \sum^{(k)} \frac{\lambda_j^{(n, k)}}{z-a_j^{(n, k)}} \right| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}, \qquad z\in E_k, \tag{6}$$

$$\sum^{(k)} |\lambda_j^{(n, k)}| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}. \tag{7}$$

(Мы могли бы, конечно, воспользоваться для нахождения этих дробей и теоремой Хавина-Хавинсона, цитированной во введении, ибо очевидно, что $\Omega(E_k)=0$.)

В силу того, что множество E нигде не плотно, точки $a_j^{(n, k)}$ всегда можно выбрать вне E.

Пусть

$$\max_{z\in E} \left| \omega_n(z) - \sum^{(k)} \frac{\lambda_j^{(n, k)}}{z-a_j^{(n, k)}} \right| = M_k^{(n)}, \qquad n=1, 2, \ldots \tag{8}$$

Так как $\omega_n(z_1)=\omega_n(z_2)=\ldots=\omega_n(z_k)$, $n=k+1, k+2, \ldots$, то функцию

$$\sum^{(k)} \frac{\lambda_j^{(n, k)}}{z-a_j^{(n, k)}}$$

можно взять одинаковой для всех $\omega_n(z)$, начиная с $n=k+1$. Поэтому существует конечный

$$\max_{n=1, 2, \ldots} \{M_k^{(n)}\} = \max \left\{ M_k^{(1)}, M_k^{(2)}, \ldots, M_k^{(k)}, \max_{z\in E} \left| 1 - \sum^{(k)} \frac{\lambda_j^{(k+1, k)}}{z-a_j^{(k+1, k)}} \right|, \right.$$

$$\left. \max_{z\in E} \left| \sum^{(k)} \frac{\lambda_j^{(k+1, k)}}{z-a_j^{(k+1, k)}} \right| \right\} = M_k. \tag{9}$$

Положим

$$\mu(z_{k+1}) = \min\left[\frac{\mu(z_k)}{2}, \frac{1}{2^k (M_k)^k}\right] \leqslant \min\left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k (M_k)^k}\right]. \tag{10}$$

Итак, построена последовательность чисел $\{\mu(z_k)\}$. Из (10) следует, что

$$\sum_{k+1}^{\infty} \mu(z_j) \leqslant \mu(z_{k+1}) \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right] = 2\mu(z_{k+1}) \leqslant$$

$$\leqslant \min\left[\frac{1}{2^{k-1}}, \frac{1}{2^{k-1} (M_k)^k}\right], \qquad k=1, 2, \ldots \tag{11}$$

Распространим меру μ, заданную на $K=\{z_n\}_1^\infty$, последовательностью чисел $\{\mu(z_k)\}$, на все множество E обычным приемом, положив для борелевских множеств $e\subset E$ $\mu(e)=\mu(e\cap K)$. Мера μ является приведенной мерой относительно E, ибо каждая непустая порция E содержит точки множества K и поэтому имеет положительную меру. В силу оценки (11), мера μ конечна.

Проверим, что мера μ удовлетворяет требованиям, о которых говорится в теореме. Для этого покажем, прежде всего, что утверждение теоремы имеет место для функций $\omega_n(z)$. Пусть взято некоторое число $p\geqslant 1$. Для $k\geqslant p$ обозначим

$$I_n^k=\int\limits_E \left|\omega_n(z)-\sum{}^{(k)}\frac{\lambda_j^{(n,k)}}{z-a_j^{(n,k)}}\right|^p d\mu$$

и разобьем множество E на два множества:

$$E_k \quad \text{и} \quad E\setminus E_k.$$

Тогда, в силу (5), (6) и (10) получаем

$$I_n^{(k,1)}=\int\limits_{E_k}\left|\omega_n(z)-\sum{}^{(k)}\frac{\lambda_j^{(n,k)}}{z-a_j^{(n,k)}}\right|^p d\mu\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\max_{z\in E_k}\left|\omega_n(z)-\sum{}^{(k)}\frac{\lambda_j^{(n,k)}}{z-a_j^{(n,k)}}\right|\right\}^p\sum_1^k\mu(z_j)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^p\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}\right)<2\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^p, \tag{12}$$

а из (8), (9) и (11) имеем:

$$I_n^{(k,2)}=\int\limits_{E\setminus E_k}\left|\omega_n(z)-\sum{}^{(k)}\frac{\lambda_j^{(n,k)}}{z-a_j^{(n,k)}}\right|^p d\mu\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\max_{z\in E}\left|\omega_n(z)-\sum{}^{(k)}\frac{\lambda_j^{(n,k)}}{z-a_j^{(n,k)}}\right|\right\}^p\sum_{k+1}^\infty\mu(z_j)\leqslant$$

$$\cdots\leqslant\{M_k^{(n)}\}^p\frac{1}{2^{k-1}(M_k)^k}\leqslant\frac{1}{2^{k-1}}. \tag{13}$$

Неравенства (12) и (13) дают нам для $I_n^k=I_n^{(k,1)}+I_n^{(k,2)}$ оценку

$$I_n^k\leqslant 2\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^p+\frac{1}{2^{k-1}}=\varepsilon_k\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\qquad n=1,\ 2,\ \ldots$$

Из неравенства (7) вытекает, что $\sum{}^{(k)}|\lambda_j^{(n,k)}|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Таким образом для $\omega_n(z)$, $n=1$, $n=1,\ 2,\ \ldots$ теорема справедлива.

Из того, что линейная оболочка системы $\{\omega_n(z)\}$ плотна в любом $L_p(\mu)$, $p\geqslant 1$, легко следует теперь заключение теоремы и для любой функции класса $L_p(\mu)$.

Из теоремы 1 с помощью результатов работы (7) сейчас же получим и такое утверждение:

Теорема 2. *Для любого нигде не плотного E найдется приведенная мера μ такая, что при всяком q, $1<q\leqslant\infty$ из условия*

$$|f(z)|=\left|\int\limits_E\frac{\alpha(\xi)\,d\mu}{\xi-z}\right|\leqslant 1,\quad z\,\bar{\in}\,E,\quad \alpha(\xi)\in L_q(\mu) \tag{14}$$

следует

$$\alpha(\xi)\equiv 0,\quad \xi\in E. \tag{15}$$

Замечание. Те же самые соображения (основывающиеся на теореме 2 работы (7)) позволяют заключить, что из (14) следует (15) для любой $\mu \in A(E)$, то-есть для любой меры, для которой имеют место соотношения (3) и (4) при всякой $\omega(z) \in L_p(\mu)$.

Теорема 3. *Пусть E имеет конечную длину. Если какова бы ни была мера μ, найдется такая последовательность* $\sum^{(k)} \frac{\lambda_j^{(k)}}{z-a_j^{(k)}}$ *(для каждой меры — своя), что*

$$\int_E \left| 1 - \sum^{(k)} \frac{\lambda_j^{(k)}}{z-a_j^{(k)}} \right| d\mu \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \tag{16}$$

$$\sum^{(k)} |\lambda_j^{(k)}| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \tag{17}$$

тогда $\Omega(E)=0$.

Доказательство. Условия (16) и (17) влекут за собой для любой положительной меры μ вследствие соотношения двойственности (см. теорему 1 работы (7)), равенство:

$$\sup_\alpha \left| \int_E \alpha d\mu \right| = 0, \tag{18}$$

где sup берется по всем комплексным (борелевским) функциям $\alpha(\xi)$, подчиняющимся неравенствам:

$$|\alpha(\xi)| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \left| \int_E \frac{\alpha(\xi)\, d\mu}{\xi - z} \right| \leqslant 1, \qquad z \bar{\in} E. \tag{19}$$

По следствию к теореме 17 работы (8) аналитическая емкость $\Omega(E)$ множества E конечной длины может быть получена следующим образом:

$$\Omega(E) = \sup \left| \int_E d\Phi \right|,$$

где верхняя грань берется по всем комплексным мерам Φ, для которых

$$\left| \int_E \frac{d\varphi}{\xi - z} \right| \leqslant 1, \qquad z \bar{\in} E.$$

Так как $d\Phi = \alpha(\xi)\,|d\Phi|$; $|\alpha(\xi)| \leqslant 1$, то

$$\Omega(E) = \sup_{\alpha,\Phi} \left| \int_E \alpha(\xi)\,|d\Phi| \right| = \sup_{\alpha,\mu} \left| \int_E \alpha(\xi)\, d\mu \right|,$$

где последняя верхняя грань берется по всем функциям α и положительным мерам μ, удовлетворяющим условиям (19). Из (18) заключаем теперь, что $\Omega(E)=0$, что и требовалось.

Пусть теперь $\mu \in A(E)$. Тогда в силу замечания к теореме 2, из неравенства (14) мы получим:

$$|f(z)| = \int_E \frac{\alpha(\xi)\, d\mu}{\xi - z} \equiv 0, \qquad z \in Z.$$

Однако, вообще говоря, на множестве E существуют и такие меры μ^*, для которых из неравенства

$$|f(z)| = \left| \int_E \frac{\alpha(\xi)\, d\mu^*}{\xi - z} \right| \leqslant M, \quad z \bar{\in} E, \quad |\alpha(\xi)| \leqslant 1$$

не следует, что $f(z)\equiv 0$, то-есть $\mu^*\,\overline{\in}\, A(E)$. Например, если множество E имеет положительную площадь и $d\sigma$ — элемент площади, то функция $f(z)=\int\limits_E \frac{d\sigma}{\xi-z}$ ограничена в расширенной плоскости и $\not\equiv 0$.

Вообще, если множество E имеет конечную положительную h-меру Хаусдорфа, определяемую функцией $h(r)$, для которой $\int\limits_0 \frac{h(r)}{r^2}dr<\infty$, то всегда найдется такое подмножество $E_1\subset E$, что функция

$$f(z)=\int\limits_{E_1}\frac{dh}{\xi-z}\not\equiv 0,$$

ограничена (даже непрерывна) на Z (см. (10)–(12)).

Теорема 4. *Всякая мера* $\mu\in A(E)$ *сингулярна относительно* h*-меры Хаусдорфа, если* $\int\limits_0 \frac{h(z)}{r^2}dr<\infty$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}\subset E$ — произвольное замкнутое подмножество E, имеющее конечную и положительную h-меру, порожденную функцией $h(r)$. Рассмотрим последовательность функции

$$h_n(r)=nh(r), \qquad n=1,\ 2.\ \ldots$$

По лемме Картана (5), всякому $n=1,\ 2,\ \ldots$ можно поставить в соответствие такое замкнутое множество $F_n\subset\mathcal{E}$, что для любого круга $K(r,\ a)$ с центром в точке a и радиуса r

$$\mu\{F_n\cap K(r,\ a)\}\leqslant Bh_n(r)\leqslant Bnh(r). \tag{20}$$

(B — абсолютная константа), причем множество $\mathcal{E}\setminus F_n$ можно покрыть счетной последовательностью кругов $c_\nu^{(n)}$ радиуса $r_\nu^{(n)}$, для которых

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} h_n(r_\nu^{(n)})<6, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

т. е.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} h(r_\nu^{(n)})<\frac{6}{n}, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{21}$$

Функции

$$f_n(z)=\int\limits_{F_n}\frac{d\mu}{\xi-z}, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots$$

аналитичны вне множества $\mathcal{E}$ и $f_n(\infty)=0$. Покажем (обычными для таких вопросов рассуждениями — смотри, например, (10)–(12)), что эти функции ограничены в расширенной комплексной плоскости. Для этого достаточно доказать, что $f_n(z)$ ограничены в ρ — окрестности множества $\mathcal{E}$ (где ρ — диаметр множества $\mathcal{E}$).

Возьмем в интеграле $\int\limits_{F_n}\frac{d\mu}{|\xi-z|}$ в качестве переменной интегрирования $r=|\xi-z|$ и будем рассматривать этот интеграл как интеграл Стильтьеса по неубывающей функции

$$\mu(r)=\mu[F_n\cap K(r,\ z)].$$

Имеем, в силу соотношения (20)

$$|f_n(z)| \leqslant \int\limits_{F_n} \frac{d\mu}{|\xi - z|} = \int\limits_0^\rho \frac{1}{r}\, d\{\mu[F_n \cap K(r, z)]\} =$$

$$= \lim_{\eta \to 0} \left\{ \frac{1}{\rho}\, \mu[F_n \cap K(\rho, z)] - \frac{1}{\eta}\, \mu[F_n \cap K(\eta, z)] + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^\rho \mu[F_n \cap K(r, z)] \frac{dr}{r^2} \right\} \leqslant \frac{1}{\rho}\, \mu(F_n) + Bn \int\limits_0^\rho \frac{h(z)}{r^2}\, dr.$$

По условию, $\int\limits_0 \frac{h(r)}{r^2}\, dr$ сходится, и ограниченность $f_n(z)$ доказана.

Нетрудно понять, что на любом множестве F_n, $n = 1, 2, \ldots$ мера μ входит в класс $A(F_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ (ведь $F_n \subset E$ а $\mu \in A(E)$). Поэтому из ограниченности $f_n(z)$ вытекает равенство

$$\mu(F_n) = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Обозначим

$$Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset \mathcal{E}.$$

Тогда

$$\mu(Q) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) = 0. \tag{22}$$

Множество $E \setminus Q \subset E \setminus F_n$, и поэтому может быть покрыто системами кругов $c_\nu^{(n)}$, для которых имеет место (21). Отсюда вытекает, что h-мера $E \setminus Q$ равна нулю. Сопоставляя этот факт с равенством (22), убеждаемся в справедливости теоремы.

Москва

Поступило в редакцию
4.I.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Я. Хавинсон, Об аппроксимации на множествах аналитической емкости нуль. ДАН СССР, 1960 № 31, № 1, 44—46.
2. С. Я. Хавинсон, Об аппроксимации с учетом величин коэффициентов аппроксимирующих агрегатов, Труды МИАН, LX, 1961.
3. В. П. Хавин, О пространстве ограниченных регулярных функций, ДАН СССР, 1960, 131, № 1, 40—43.
4. В. П. Хавин, О пространстве ограниченных регулярных функций, Сиб. матем. журнал, т. 2, № 4, 1961, 622—638.
5. Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, Гостехиздат Москва, 1941.
6. Уолш, Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, ИЛ, М., 1961.
7. С. Я. Хавинсон, Некоторые вопросы полноты систем, ДАН, 137, № 4, 793—796 (1961).
8. С. Я. Хавинсон, Об аналитической емкости множеств, совместной нетривиальности различных классов аналитических функций и лемме Шварца в произвольных областях, Матем. сб., 54 (96) : 1, (1961). 3—50.
9. И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., Гостехиздат, 1950.

10. L. Carleson, On null-sets of continuous analytic functions, Arkiv för Math., I, N 2, h. 4 (1949–1951), 311–318.
11. Л. Д. Иванов, До теорії аналітичних функцій з досканолого множиного особливих точок, Доповіді та повид. Львівського унів., 9 ч. 2 (1961), 13–14.
12. Е. П. Долженко, О стирании особенностей аналитических функций, УМН, т. XVIII, вып. 4(112), 1963.
13. П. Хамош, Теория меры, ИЛ, М., 1953.

KAI KURIŲ MATŲ KLAUSIMU

E. ČACKAJA

(Reziumė)

Erdvėje $L_p(\mu)$ nagrinėjami aproksimacijos klausimai ryšyje su mato μ nusakymu.

ÜBER GEWISSE MASSE

J. TSCHAZKAJA

(Zusammenfassung)

Im Raum $L_p(\mu)$ werden Approximationsfragen in ihrem Zusammenhang mit der Massbestimmung μ behandelt.