V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1965

О ВЕРХНИХ И НИЖНИХ ФУНКЦИЯХ ДЛЯ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. I

Н. КАЛИНАУСКАЙТЕ

Рассматривается однородный сепарабельный случайный процесс $\{\xi_{\alpha,\beta}(t),\ t\geqslant 0\}$ с независимыми приращениями, для которого

$$Me^{i\lambda\xi_{\alpha,\beta}(t)}=\exp\left\{-t\,|\lambda|^{\alpha}\left(1-i\beta\frac{|\lambda|}{\lambda}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right\}, \tag{1}$$

где

$$0<\alpha<2,\qquad \alpha\neq 1,\qquad |\beta|\leqslant 1.$$

Известно [1], что для любой непрерывной положительной монотонно возрастающей функции $u(t)$ с вероятностью 1

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{|\xi_{\alpha,\beta}(t)|}{u(t)}=\begin{cases}0,\\ \infty.\end{cases} \tag{2}$$

Однако в статье [1] при исследовании модуля процесса $\xi_{\alpha,\beta}(t)$ не обращено внимание на интересный подкласс устойчивых процессов с параметром $\beta=\mp 1$, которые, не имея положительных (отрицательных) скачков, ведут себя в направлении положительных (отрицательных) значений подобно Гауссовскому процессу. Заполнению этого пробела посвящена наша статья.

Так как $\xi_{\alpha,\beta}(t)=-\xi_{\alpha,-\beta}(t)$, то достаточно рассмотреть случай $\beta=-1$. В данном случае для каждого фиксированного α и $x\to\infty$, если $1<\alpha<2$, и $x<0$, $x\to 0$, если $0<\alpha<1$, имеет место соотношение

$$P\left\{\frac{\xi_{\alpha,-1}(t)}{t^{\frac{1}{\alpha}}}>x\right\}\sim A(\alpha)\,x^{-\frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{\alpha-1}}\exp\left\{-B(\alpha)\,x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right\}, \tag{3}$$

где

$$A(\alpha)=\frac{\alpha^{-\frac{1}{2(\alpha-1)}}\left|\cos\frac{\pi}{2}\alpha\right|^{\frac{1}{2(\alpha-1)}}}{\sqrt{2\pi\,|\alpha-1|}},$$

$$B(\alpha)=\alpha^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}\left|\cos\frac{\pi}{2}\alpha\right|^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Знак „$\sim$“ означает, что отношение величин, стоящих в правой и в левой части, стремится к единице.

В дальнейшем вместо $\xi_{\alpha,-1}(t)$ будем писать просто $\xi(t)$.

Условимся, что функция $g(t)$ принадлежит к классу G_α, если она при $t \to \infty$ имеет следующие свойства:

а) $g(t) > 0$, $g(t) \uparrow \infty$, $t^{-\frac{1}{\alpha}} g(t) \uparrow \infty$ в случае $2 > \alpha > 1$ и

в) $g(t) < 0$, $g(t) \downarrow -\infty$, $t^{-\frac{1}{\alpha}} g(t) \uparrow 0$ в случае $0 < \alpha < 1$. Функцию $g(t)$ из класса G_α назовем интегрально-верхней, если с вероятностью 1 множество $\{t : \xi(t) > g(t)\}$ ограничено, и интегрально-нижней, если с вероятностью 1 это множество не ограничено.

Положим $\psi(t) = (-1)^\varkappa g(t)\, t^{-\frac{1}{\alpha}}$, т. е. функцию $g(t)$ представим в виде $g(t) = (-1)^\varkappa t^{\frac{1}{\alpha}} \psi(t)$, где $\psi(t)$ уже всегда положительная фукция, а $\varkappa = [\alpha] + 1$. Кроме того, пусть

$$q_\alpha(t) = \begin{cases} \psi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(t) & \text{при} \quad 1 < \alpha < 2 \\ \dfrac{1}{\psi^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(t)} & \text{при} \quad 0 < \alpha < 1. \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 1. Функция $g(t) \in G_\alpha$ является интегрально-верхней, если интеграл

$$I_\alpha(g) = \int_1^\infty \frac{1}{t}\, q_\alpha^{\frac{1}{2}}(t) \exp\left\{-B(\alpha)\, q_\alpha(t)\right\} dt$$

сходится, и интегрально-нижней, если интеграл $I_\alpha(g)$ расходится.

Легко проверить, что функция $a\varphi(t) \equiv (-1)^\varkappa t^{\frac{1}{\alpha}} (B^{-1}(\alpha) \ln\ln t)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$ интегрально-верхняя, если $a > 1$, и интегрально-нижняя, если $a \leqslant 1$. Если взять $a = 1 \pm \varepsilon$, то для любого $0 < \varepsilon < 1$ получаем

$$P\left\{ \limsup_{t \to \infty} \frac{\xi(t)}{\varphi(t)} > (1-\varepsilon) \right\} = 1,$$

$$P\left\{ \limsup_{t \to \infty} \frac{\xi(t)}{\varphi(t)} < (1+\varepsilon) \right\} = 1,$$

т. е.

$$P\left\{ \limsup_{t \to \infty} \frac{\xi(t)}{\varphi(t)} = 1 \right\} = 1.$$

Для случая $1 \leqslant \alpha < 2$ аналог закона повторного логарифма установил В. М. Золотарев [3].

При исследовании процесса $\xi(t)$, когда $t \to 0$, рассматриваются непрерывные функции $l(t)$, которые при $t \to 0$ имеют следующие свойства:

а) $l(t) > 0$, $l(t) \downarrow 0$, $t^{-\frac{1}{\alpha}} l(t) \uparrow \infty$, если $2 > \alpha > 1$, и

в) $l(t) < 0$, $l(t) \uparrow 0$, $t^{-\frac{1}{\alpha}} l(t) \uparrow 0$, если $0 < \alpha < 1$.

Функция $l(t)$ называется локально-верхней, если с вероятностью 1 множество $\{ t : \xi(t) > l(t) \}$ отделено от нуля, т. е замыкание этого множества не содержит нуля, и локально-нижней, если это множество не отделено от нуля, т. е. замыкание содержит нуль.

Теорема 2. Для того, чтобы функция $l(t)$ была локально-верхней (локально-нижней), необходима и достаточна сходимость (расходимость) интеграла

$$J_\alpha(l) = \int_0^1 \frac{1}{t} \hat{q}_\alpha^{\frac{1}{2}}(t) \exp\left\{ -B(\alpha)\hat{q}_\alpha(t) \right\} dt,$$

где $\hat{q}_\alpha(t)$ определяется функцией $l(t)$ по формулам (4), так же, как $q_\alpha(t)$ определяется функцией $g(t)$.

Доказательства этой теоремы проводить не будем. Она доказывается таким же методом, что и теорема 1.

Как следствие из теоремы 2 получаем локальный аналог закону повторного логарифма:

$$P\left\{ \limsup_{t\to 0} \frac{\xi(t)}{(-1)^\varkappa \left(B^{-1}(\alpha)\ln\ln\frac{1}{t}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} t^{\frac{1}{\alpha}}} = 1 \right\} = 1.$$

Во всем дальнейшем $C_1, C_2, \ldots, C, M_1, M_2, M_3$ означают константы, в общем случае зависящие от α, но независящие от t.

Переходим к доказательству теоремы 1. Условимся рассматривать процесс $\xi(t)$ при t достаточно больших, и будем пользоваться оценкой (3), а также некоторыми оценками, основанными на разложении Тейлора, имеющими место для достаточно больших t, не оговаривая законности этого каждый раз отдельно.

Сначала приведем вспомогательные леммы.

Лемма 1. Если непрерывная функция $g(t) \in G_\alpha$ не является интегрально-верхней, тогда существует последовательность значений параметра времени $\{t_n\}$, стремящаяся к бесконечности такая, что с положительной вероятностью множество $\{ t_k : \xi(t_k) > g(t_k) \}$ неограниченное.

Доказывается эта лемма также, как и соответствующая лемма Т. Сирао (см. [5], стр. 98).

Из леммы 1 следует, что достаточно доказать теорему 1 для любой последовательности $\{t_n\}$, возрастающей в бесконечность. Не уменьшая общности, можно брать последовательность с $t_n - t_{n-1} \leqslant 1$.

Лемма 2. Достаточно доказать теорему 1 только для тех функций $g(t) \in G_\alpha$, для которых имеет место соотношение

$$\frac{1}{2} B^{-1}(\alpha) \ln\ln t < q_\alpha(t) < (1+\varepsilon) B^{-1}(\alpha) \ln\ln t. \qquad (6)$$

Доказательство леммы 2. Пусть теорема 1 имеет место для функций из класса G_α, удовлетворяющих условию (6), и $g(t)=(-1)^{\varkappa}t^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t)$ любая функция из класса G_α. Обозначим

$$\varphi_1(t)=(1+\varepsilon)B^{-1}(\alpha)\ln\ln t,$$

$$\varphi_2(t)=\frac{1}{2}B^{-1}(\alpha)\ln\ln t,$$

$$\varphi_3(t)=\min\left\{\max\Big(q(t),\ \varphi_2(t)\Big),\ \varphi_l(t)\right\}.$$

Функциям $\varphi_i(x)$, $i=1, 2, 3$, соответствуют функции $\hat{\psi}_i(t)$, если в (4) вместо $q(t)$ вставить $\varphi_i(t)$ и решить это уравнение относительно $\psi(t)$.

Из (4) ясно, что из соотношения $q(t)>\varphi_3(t)$ следует $\psi(t)>\hat{\psi}_3(t)$, в случае $1<\alpha<2$, и $\psi(t)<\hat{\psi}_3(t)$, в случае $0<\alpha<1$. Поэтому из того, что $q(t)>\varphi_3(t)$ при $t>t_0$ и функция $\hat{g}(t)=(-1)^{\varkappa}t^{\frac{1}{\alpha}}\hat{\psi}(t)$ интегрально-верхняя, следует, что и функция $g(t)=(-1)^{\varkappa}t^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t)$ тоже интегрально-верхняя. Также из того, что $q(t)<\varphi_3(t)$ при $t>t_0$ и функция $\hat{g}(t)$ интегрально-нижняя, следует, что и функция $g(t)$ интегрально-нижняя. Остается проверить, что $I_\alpha(g)$ и $I_\alpha(\hat{g})$ сходятся или расходятся одновременно, и при достаточно большом t имеют место соотношения $q(t)>\varphi_3(t)$ и $q(t)<\varphi_3(t)$, соответственно.

1. Пусть $I_\alpha(g)<\infty$. Если существует монотонно возрастающая в бесконечность последовательность $\{t_n\}$ такая, что $q_\alpha(t)\equiv q(t)<\varphi_2(t_n)$, то при $t_n>t_{k_0}>t_0(\alpha,\ q)$ интеграл

$$I_\alpha(g)\geqslant\int\limits_{t0}^{\infty}\frac{1}{t}q^{\frac{1}{2}}(t)\exp\left\{-B(\alpha)q(t)\right\}dt\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{1}{t}q^{\frac{1}{2}}(t)\exp\left\{-B(\alpha)q(t)\right\}dt\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{t_k-t_{k-1}}{t_k}q^{\frac{1}{2}}(t_k)\exp\left\{-B(\alpha)q(t_k)\right\}\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{t_k-t_{k-1}}{t_k}\varphi_2(t_k)\exp\left\{-B(\alpha)\varphi_2(t)\right\}=$$

$$=C_1\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{t_k-t_{k-1}}{t_k}\cdot\frac{\sqrt{\ln\ln t_k}}{\sqrt{\ln t_k}}=\infty$$

по интегральному признаку сходимости рядов, что противоречит предположению, что $I_\alpha(g)<\infty$. Поэтому такой последовательности не существует, и для $t>t_1$ имеет место обратное неравенство $q(t)>\varphi_2(t)$. Итак, при $t>t_0$ функция $\varphi_3(t)$ равна $q(t)$, когда $q(t)\leqslant\varphi_1(t)$, и равна $\varphi_1(t)$, когда $q(t)\geqslant\varphi_1(t)$, т. е. $\varphi_3(t)=\min q(t),\ \varphi_1(t)$.

Очевидно, что при $t > t_0$ имеет место неравенство

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{t} \varphi_3^{\frac{1}{2}}(t) \exp\left\{ -B(\alpha)\varphi_3(t) \right\} dt \leqslant \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{t} \varphi_1^{\frac{1}{2}}(t) \exp\left\{ -B(\alpha)\varphi_1(t) \right\} dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{t} q_\alpha^{\frac{1}{2}}(t) \exp\left\{ -B(\alpha) q(t) \right\} dt < \infty,$$

где t_0 такое, что

$$\min\left(q(t_0),\ \varphi_1(t)\right) \leqslant \frac{1}{2} B^{-1}(\alpha).$$

2. Рассмотрим случай $I_\alpha(g) = \infty$. Если существует последовательность $\{t_n\}$, стремящаяся в бесконечность, такая, что $q(t_n) < \varphi_2(t_n)$, то $\varphi_3(t_n) = \varphi_2(t_n)$ и, рассуждая как и в 1, получаем

$$I_\alpha(\varphi_3) \geqslant \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{t} \varphi_3^{\frac{1}{2}}(t) \exp\left\{ -B(\alpha)\varphi_3(t) \right\} dt \geqslant$$

$$\geqslant C_2 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{t_k - t_{k-1}}{t_k} \frac{\sqrt{\ln\ln t_k}}{\sqrt{\ln t_k}} = \infty.$$

С другой стороны, если такой последовательности не существует, т. е. для достаточно больших t, $\varphi_2(t) \leqslant q(t)$, то $\varphi_3(t) \leqslant q(t)$, и так же как в случае 1 получаем

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{t} \varphi_3^{\frac{1}{2}}(t) \exp\left\{ -B(\alpha)\varphi_3(t) \right\} dt \geqslant \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{t} q^{\frac{1}{2}}(t) \exp\left\{ -B(\alpha) q(t) \right\} dt = \infty.$$

Функция $\varphi_3(t)$ удовлетворяет условию (6), лемма доказана.

Лемма 3. Пусть имеется стремящаяся к бесконечности последовательность $\{t_n\}$ с $t_n - t_{n-1} \leqslant 1$. Выберем подпоследовательность $\{t_{n_k}\}$, удовлетворяющую условию

$$t_{n_k}\left(1 + \frac{a}{q(t_{n_k})}\right) < t_{n_{k+1}} < t_{n_k}\left(1 + \frac{b}{q(t_{n_k})}\right), \tag{7}$$

где $a < b$ — положительные константы. Тогда интеграл $I_\alpha(g)$ сходится или расходится одновременно с суммой $\sum\limits_k P_{n_k}$,

$$P_{n_k} = q^{-\frac{1}{2}}(t_{n_k}) \exp\left\{ -B(\alpha) q(t_{n_k}) \right\}. \tag{8}$$

Доказательство. Так как при $0 < x < 1$ имеют место неравенства

$$\frac{x}{2} < \ln(1+x) < x \quad \text{и} \quad 2x > -\ln(1-x) > x,$$

то

$$\frac{a}{4q(t_{n_k})} < \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{a}{q(t_{n_k})}\right) \leqslant \frac{1}{2} \ln \frac{t_{n_{k+1}}}{t_{n_k}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \ln \frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \ln\left(1 - \frac{t_n - t_{n-1}}{t_n}\right) < \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{t_n - t_{n-1}}{t_n} <$$

$$< \sum_{n=n_k+1}^{n_k} \ln \frac{t_n}{t_{n-1}} = \ln \frac{t_{n_{k+1}}}{t_{n_k}} \leqslant \ln\left(1 + \frac{b}{q(t_{n_k})}\right) < \frac{b}{q(t_{n_k})}.$$

Так как для $t_n > t_0(\alpha, g)$ имеем $P_n \downarrow 0$, $q(t_n) \uparrow \infty$, $P_n q(t_n) \downarrow 0$ при $n \to \infty$, то

$$\frac{a}{2}\sum^{K} P_{n_k} \leqslant \sum_{k=k_0}^{K} P_{n_k} q(t_{n_{k-1}}) \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{t_n-t_{n-1}}{t_n} \leqslant \sum_{n=n_{k_0}}^{\infty} \frac{t_n-t_{n-1}}{t_n} P_n q(t_n) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=k_0}^{K} P_{n_k} q(t_{n_k}) \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{t_n-t_{n-1}}{t_n} < B \sum_{k=k_0}^{\infty} P_{n_k}.$$

Пусть

$$S_1 = \sum_n \frac{t_n-t_{n-1}}{t_n} q^{\frac{1}{2}}(t_n) \exp\left\{-B(\alpha)\, q(t_n)\right\},$$

$$S_2 = \sum_n \frac{t_n-t_{n-1}}{t_{n-1}} q^{\frac{1}{2}}(t_{n-1}) \exp\left\{-B(\alpha)\, q(t_{n-1})\right\}.$$

Очевидно, что

$$S_1 < I_\alpha(g) < S_2.$$

По лемме 2 при t достаточно большом и $n_{k-1} < n \leqslant n_k$ получаем

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} > \frac{t_{n_{k-1}}}{t_{n_{k+1}}} > \frac{1}{1+\frac{a}{q(t_{n_k})}} > \frac{1}{2}.$$

Следовательно, суммы S_1 и S_2 сходятся одновременно. Тем завершается доказательство леммы 3.

Лемма 4. Для любой константы C и для каждого фиксированного $\alpha \neq 1$ при $t \to \infty$ имеем

$$P\left\{\xi(t) > g(t)\left(1-\frac{c}{q(t)}\right)\right\} \sim A(\alpha)\, e^{\frac{\alpha c}{|1-\alpha|}B(\alpha)} \cdot P\left\{\xi(t) > g(t)\right\}. \tag{9}$$

Если

$$c_n \to \pm\infty \quad \text{и} \quad |c_n q^{-1}(t_n)| < c < 1,$$

то

$$P\left\{\xi(t_n) > g(t_n)\left(1-\frac{c_n}{q(t_n)}\right)\right\} \sim A(\alpha) \exp\frac{B(\alpha)\,\alpha c_n}{|\alpha-1|}(1+\Theta)\right\} \cdot P\left\{\xi(t) > g(t)\right\}, \tag{10}$$

где

$$0 < |\Theta| < c\,|1-\alpha|^{-1}.$$

Чтобы доказать лемму 4 используем оценку (3). Имеем

$$P\left\{\xi(t_n) > g(t_n)\left(1-\frac{c_n}{q(t_n)}\right)\right\} \sim$$

$$\sim A(\alpha)\, q^{\frac{1}{2}}(t_n)\left(1-\frac{c_n}{q(t_n)}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\alpha-1}} \exp\left\{-B(\alpha)\, q(t_n)\left(1-\frac{c_n}{q(t_n)}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right\}. \tag{11}$$

Разлагая выражение $\left(1-\frac{c_n}{q(t_n)}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ по степеням $\frac{c_n}{q(t_n)}$ по формуле Тейлора, получаем

$$-B(\alpha)\, q(t_n)\left\{1-\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{c_n}{q(t_n)} + \vartheta' \frac{\alpha}{\alpha-1}\left(\frac{c_n}{q(t_n)}\right)^2\right\} =$$

$$= -B(\alpha)\, q(t_n)\left[1-\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{c_n}{q(t_n)}\left(1+\Theta\frac{c_n}{q(t_n)}\right)\right]. \tag{12}$$

Используя условие $|c_n q^{-1}(t_n)| < c_1$ из (11) и (12), получаем (10). Соотношение (9) тоже получается из (11) и (12), если вместо c_n взять c' и воспользоваться тем, что $q^{-1}(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Лемма 5 (см. [7]). Рассматривается бесконечная последовательность событий $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$, определенных на вероятностном поле $\{\Omega, F, P\}$, удовлетворяющих условиям:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(F_n) = \infty$.

2. Для любого положительного целого числа h существует целочисленная функция $H(m) > h$ такая, что для каждого $k > H(m)$ и $n \geqslant h$ существуют ненулевые условные вероятности $P\{F_k | \overline{F}_n \ldots \overline{F}_m\}$ и имеет место неравенство

$$P(F_k | \overline{F}_n \ldots \overline{F}_m) \geqslant c_3 P(F_k),$$

где константа c_3 зависит только от h и функции $H(m)$. Дополнение события F_k обозначаем $\overline{F}_k$.

3. Существуют две константы $c_4 > 0$ и $c_5 > 0$, такие, что каждому событию F_j соответствует множество событий $\{F_{j_1}, F_{j_2}, \ldots, F_{j_s}\}$ из последовательности $\{F_k\}$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{s} P(F_j, F_{j_i}) < c_4 P(F_j),$$

и, если $k > j$, но F_k не принадлежит множеству $\{F_{j_i}, i = 1, 2, \ldots, s\}$, то

$$P(F_j, F_k) < C_5 P(F_j) \cdot P(F_k).$$

В этих условиях $P\{\lim\sup F_k\} = 1$.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы 1.

А. Рассмотрим случай $I_\alpha(g) < \infty$. Пусть $\{t_n\}$ любая стремящаяся к бесконечности последовательность такая, что $t_n - t_{n-1} \leqslant 1$. Согласно (7) из нее выбираем подпоследовательность $\{t_{n_k}\}$. Введем события

$$A_n = \left\{ \xi(t_n) > (-1)^{\varkappa} t_n^{\frac{1}{\alpha}} \psi(t_n) \right\},$$

$$B_{n,k} = \left\{ \xi(t_{n_k}) - \xi(t_n) > -(t_{n_k} - t_n)^{\frac{1}{\alpha}} \right\},$$

$$C_k = \left\{ \xi(t_{n_k}) > (-1)^{\varkappa} t_{n_k}^{\frac{1}{\alpha}} \psi(t_{n_{k-1}}) \left(1 - \frac{\delta}{q(t_{n_{k-1}})}\right) \right\},$$

где $n_{k-1} < n \leqslant n_k$ и

$$\delta = \begin{cases} b + 2b^{\frac{1}{\alpha}}, & \text{если} \quad 1 < \alpha < 2, \\ -2b^{\frac{1}{\alpha}}, & \text{если} \quad 0 < \alpha < 2. \end{cases}$$

Так как

$$P\left\{\lim\sup A_n\right\} = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} P\left\{ \sum_{k=m}^{n} A_n \right\},$$

то достаточно доказать, что $P\left\{\sum_{n=N}^{\infty} A_n\right\}<\varepsilon$ при N достаточно большом.
Из (7) следует, что при $n_{k-1}<n\leqslant n_k$ имеют место соотношения

$$\frac{at_{n_{k-1}}}{q(t_{n_{k-1}})}\leqslant t_{n_k}-t_{n_{k-1}}\leqslant\frac{b\,t_{n_{k-1}}}{q(t_{n_{k-1}})}, \tag{13}$$

при любом $\alpha\in(0,\ 2)$, $\alpha\neq 1$ и

$$t_n\geqslant\frac{t_{n_k}}{1+\dfrac{b}{q(t_{n_{k-1}})}}\geqslant t_{n_{k-1}}\left(1-\frac{b}{q(t_{n_{k-1}})}\right), \tag{14}$$

при $2>\alpha>1$.

Суммируя неравенства, определяющие события $B_{n,k}$ и A_n, и используя (13) и (14) для пересечения $A_nB_{n,k}$, получаем

$$\xi(t_{n_k})=\xi(t_n)-\left[\xi(t_{n_k})-\xi(t_n)\right]\geqslant(-1)^{\varkappa}\left[t_n^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t_n)-2\,(t_{n_k}-t_n)^{\frac{1}{\alpha}}\right]\geqslant$$
$$\geqslant(-1)^{\varkappa}t_{n_k}^{\frac{1}{\alpha}}\left\{\psi(t_{n_{k-1}})+\frac{\delta\psi(t_{n_{k-1}})}{q(t_{n_{k-1}})}\right\}.$$

Сравнивая последнее неравенство с неравенством, определяющим событие C_k, получаем $C_k>A_nB_{n,k}$, если $n_{k-1}<n\leqslant n_k$. Очевидно, что $P\{B_{n,k}\}=C_0$. Заметим, что события $B_{n,k}$ и A_m независимы при $m\leqslant n$. Следовательно,

$$P(C_k)\geqslant P\left\{\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k}A_nB_{n,k}\right\}=$$
$$=\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k}P\left\{A_nB_{n,k}-A_nB_{n,k}\sum_{m=n_{k-1}+1}^{n}A_mB_{m,k}\right\}\geqslant$$
$$\geqslant\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k}P\left\{A_nB_{n,k}-A_nB_{n,k}\sum_{m=n_{k-1}+1}^{n}A_m\right\}=$$
$$=\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k}P\left\{B_{n,k}\right\}\cdot P\left\{A_n-A_n\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k}A_n\right\}\geqslant c_0P\left\{\sum_{n=n_{k-1}}^{n_k}A_n\right\}$$

или

$$P\left\{\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k}A_n\right\}\leqslant\frac{1}{c_0}P(C_k).$$

Используя леммы 3 и 4, получаем, что $\sum P(C_k)<\infty$. Поэтому $P\left\{\sum_{n=N}^{\infty}A_n\right\}<\varepsilon$, и с вероятностью I происходит только конечное число событий F_k. Следовательно, функция $g(t)=(-1)^{\varkappa}t^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t)$ интегрально-верхняя.

Б. Рассмотрим случай $I(g)=\infty$. Достаточно рассматривать последовательность $\{t_n\}$, удовлетворяющую условию (7). Доказательство состоит в проверке условий леммы 5.

1. Сумма $\sum_k P(F_k)$ расходится в силу леммы 3.

2. Вероятности $P(F_k \mid \bar{F}_h \ldots \bar{F}_m)$ существуют для любого положительного h и m. Функцию $H(m)$ определим позже. Так как $\xi(t_k)-\xi(t_m)$ не зависит от $\xi(t_m)$, то

$$P(F_k \mid \bar{F}_h \ldots \bar{F}_m) \geqslant P\left\{F_k,\ \xi(t_m) > -t_m^{\frac{3}{\alpha}} \mid \bar{F}_h \ldots \bar{F}_m\right\} \geqslant$$

$$\geqslant P\left\{\xi(t_k)-\xi(t_m) > (-1)^{\varkappa}\left(t_k^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t_k)-(-1)^{\varkappa}t_m^{\frac{3}{\alpha}}\right)\right\}\cdot$$

$$\cdot P\left\{\xi(t_m) > -t_m^{\frac{3}{\alpha}} \mid \bar{F}_h \ldots \bar{F}_m\right\}. \tag{15}$$

Второй множитель в произведении (15) равен

$$\left(1-P\left\{\xi(t_m)\leqslant -t_m^{\frac{3}{\alpha}},\ \bar{F}_h \ldots \bar{F}_m\right\}\right)\frac{1}{P(\bar{F}_h \ldots \bar{F}_m)} \geqslant$$

$$\geqslant \left(1-P\left\{\xi(t_m)\leqslant -t_m^{\frac{3}{\alpha}}\right\}\right)\cdot\frac{1}{P(\bar{F}_h \ldots \bar{F}_m)} \geqslant \left(1-\frac{C_6}{t_m^3}\right)\cdot\frac{1}{P(\bar{F}_h \ldots \bar{F}_m)}. \tag{16}$$

Оценим вероятность $P(\bar{F}_h \ldots \bar{F}_m)$ снизу. В случае $0<\alpha<1$ процесс $\xi(t)<0$, поэтому

$$P(\bar{F}_h \ldots \bar{F}_m) \geqslant \prod_{j=h}^{m} P\left\{\xi(t_j) < -t_j^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t_j)\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \prod_{j=h}^{m}\left(1-\frac{3}{2}A(\alpha)\,q^{-\frac{1}{2}}(t_j)\exp\left\{-B(\alpha)\,q(t_j)\right\}\right).$$

Для достаточно больших j имеет место неравенство

$$\exp\left\{-B(\alpha)\,q(t_j)\right\} \leqslant \frac{2}{3A(\alpha)}\,q^{-\frac{1}{2}}(t_j),$$

поэтому

$$P\{\bar{F}_h \ldots \bar{F}_m\} \geqslant \prod_{j=h}^{m}\left(1-\frac{a}{2q(t_j)}\right) \geqslant \prod_{j=h}^{m}\left(1+\frac{a}{q(t_j)}\right)^{-1} \geqslant \frac{t_h}{t_m} > t_m^{-1}. \tag{17}$$

В случае $\alpha>1$, используя (7), имеем

$$t_j^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t_j)-t_{j-1}^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t_{j-1}) \geqslant \psi(t_j)\ \left(t_j^{\frac{1}{\alpha}}-t_{j-1}^{\frac{1}{\alpha}}\right) \geqslant (t_j-t_{j-1})^{\frac{1}{\alpha}}\,\psi(t_j)\,\frac{1}{2\alpha}\cdot\frac{a}{b}.$$

Поэтому

$$P\{\bar{F}_h \ldots \bar{F}_m\} \geqslant P(\bar{F}_h)\cdot\prod_{j=h+1}^{m} P\left\{\xi(t_j)-\xi(t_{j-1}) > (t_j-t_{j-1})^{\frac{1}{\alpha}}\,\psi(t_j)\,\frac{a}{4b}\right\}.$$

Дальше рассуждая как и в случае $0<\alpha<1$, получаем, что

$$P(\bar{F}_h \ldots \bar{F}_m) > -t_m^{-1}. \tag{18}$$

Вероятность

$$P\left\{ \xi(t_k)-\xi(t_m) > (-1)^{\varkappa}(t_k^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t_k)-(-1)^{\varkappa} t_m^{\frac{3}{\alpha}}\right\} \geqslant C_7 P(F_k)$$

согласно лемме 4 больше

$$C_7 P(F_k), \tag{19}$$

если функцию $H(m)$ выберем так, чтобы

$$\frac{t_m^{\frac{3}{\alpha}}}{t_k^{\frac{1}{\alpha}}}\cdot\frac{1}{\psi(t_k)} < \frac{C_8}{q(t_k)}$$

в случае $0<\alpha<1$ и

$$\left(\frac{t_k}{t_k-t_m}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(1+\frac{t_m^{\frac{3}{\alpha}}}{t_k^{\frac{1}{\alpha}}}\cdot\frac{1}{\psi(t_k)}\right) > 1+\frac{C_8}{q(t_k)}$$

в случае $1<\alpha<2$.

Тогда из (15), (16), (17), (18) и (19) следует

$$P(F_k\,|\,\bar{F}_h\ \ldots\ \bar{F}_m) \geqslant (1-\varepsilon)\,C_9 P(F_k).$$

3. Проверим условие 3. Заметим, что вероятность

$$P_{r,k}=P\{F_r,\ F_k\} \leqslant P\left\{\xi(t_r)-\xi(t_k) > (-1)^{\varkappa}\left(t_r^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t_r)-t_k^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t_k)\right)\right\}\cdot P(F_k). \tag{20}$$

Рассмотрим те значения t_r, для которых имеет место неравенство

$$t_r^{\frac{1}{\alpha}} > t_k^{\frac{1}{\alpha}}\,q(t_r). \tag{21}$$

Отсюда

$$t_r^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t_r)-t_k^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t_k) \geqslant t_r^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t_r)\left(1-\left(\frac{t_k}{t_r}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \geqslant (t_r-t_k)^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t_r)\left(1-\frac{1}{q(t_r)}\right),$$

если $1<\alpha<2$, и по лемме 4

$$P_{r,k} \leqslant C_{10} P(F_k)\,P(F_r). \tag{22}$$

В случае $0<\alpha<1$, используя (21), получаем

$$t_r^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t_r)-t_k^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t_k) \leqslant t_r^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t_r) \leqslant (t_r-t_k)^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t_r)\left(1+\frac{1}{\alpha}\frac{C_{11}}{q(t_r)}\right)$$

и опять

$$P_{r,k} \leqslant C_{12} P(F_k)\cdot P(F_r). \tag{23}$$

Теперь рассмотрим те t_r, для которых не имеет места (21), т. е.

$$t_r^{\frac{1}{\alpha}} < t_k^{\frac{1}{\alpha}}\,q(t_r). \tag{24}$$

Через Q_k обозначим множество таких t_r. Оценим верхнюю границу числа элементов этого множества. Повторно применяя (7), получаем

$$t_k \prod_{j=k}^{r} \left(1 + \frac{a}{q(t_j)}\right) < t_r < t_k \prod_{j=k}^{r} \left(1 + \frac{b}{q(t_j)}\right). \tag{25}$$

Так как $\frac{x}{2} < \ln(1+x) < x$ при $0 < x < 1$, то

$$\ln \frac{t_r}{t_k} = \sum_{j=k}^{r} \ln \frac{t_{j+1}}{t_j} \geqslant \sum_{j=k}^{r} \ln\left(1 + \frac{a}{q(t_j)}\right) \geqslant \frac{1}{2} \frac{(r-k)a}{q(t_r)},$$

откуда при помощи леммы 2 и неравенства (24) получаем, что

$$(r-k) \leqslant C_{13} (\ln\ln t_k)^{1+\varepsilon}. \tag{26}$$

Рассмотрим подмножество Q_k' множества Q_k, состоящее из таких t_r, для которых

$$t_r^{\frac{1}{\alpha}} > \rho\, t_k^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{27}$$

где

$$\rho = \begin{cases} \exp\left\{ \dfrac{a(\alpha-1)}{4b} \right\}, & \text{если} \quad 1 < \alpha < 2, \\ \exp\left\{ \dfrac{a(1-\alpha)}{4b\alpha} \right\}, & \text{если} \quad 0 < \alpha < 1. \end{cases} \tag{28}$$

Из (27) следует, что

$$t_r^{\frac{1}{\alpha}} \psi(t_r) - t_k^{\frac{1}{\alpha}} \psi(t_k)$$

при $1 < \alpha < 2$ больше

$$(t_r - t_k)^{\frac{1}{\alpha}} \psi(t_r)\, (1 - \rho^{-1})^{-\frac{1}{\alpha}}$$

и при $0 < \alpha < 1$ меньше

$$t_r^{\frac{1}{\alpha}} \psi(t_r) < (t_r - t_k)^{\frac{1}{\alpha}} \psi(t_r)\, (1 - \rho^{-\alpha})^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Отсюда вероятность $P_{r,k}$ меньше

$$C_{14} P(F_k) \exp\{ -B(\alpha)\, u(\alpha)\, q(t_r) \}, \tag{28'}$$

где

$$u(\alpha) = \left(1 - \exp\left\{ -\frac{a|\alpha-1|}{4b} \right\}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

По лемме 2 $\frac{1}{2} B^{-1}(\alpha) \ln\ln t < q(t)$, то

$$\sum_{t_r \in Q_k'} P_{r,k} \leqslant C_{15} P(F_k) \sum_{t_r \in Q_k'} (\ln t_r)^{-\frac{u(\alpha)}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{16} P(F_k) (\ln\ln t_k)^{1+\varepsilon} (\ln t_k)^{-\frac{u(\alpha)}{2}} \leqslant M_1 P(F_k). \tag{29}$$

Пусть Q_k'' подмножество тех t_r, для которых

$$t_r^{\frac{1}{\alpha}} < \rho\, t_k^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{30}$$

Для таких t_r имеем

$$(r-k) < 2a^{-1} q(t_k \rho^{\alpha}) \ln \rho^{\alpha} \leqslant C_{17} B^{-1}(\alpha) \ln\ln t_k. \tag{31}$$

Из неравенства $\frac{x}{2} < \log(1+x) < x$ при $0 < x < 1$ следует

$$1+\frac{1}{2}\sum_{j=k}^{r}\frac{a}{q(t_j)} < \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=k}^{r}\frac{a}{q(t_j)}\right\} \leqslant \prod_{j=k}^{r}\left(1+\frac{a}{q(t_j)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant\left(1+\frac{a}{q(t_k)}\right)^{r-k} \leqslant 1+\frac{2a(r-k)}{q(t_k)}.$$

Поэтому из (25) получаем

$$t_k\left(1+\frac{a(r-k)}{2q(t_r)}\right) < t_r < t_k\left(1+\frac{2b(r-k)}{q(t_k)}\right). \tag{32}$$

Пусть A константа. Вероятность $P_{r,k}$ представим в виде суммы

$$P'_{r,k}=P\left\{\xi(t_k) > (-1)^{\varkappa} t_k^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t_k)\left(1+\frac{(r-k)A}{q(t_k)}\right),\ F_r\right\}$$

и

$$P''_{r,k}=P\left\{(-1)^{\varkappa} t_k^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t_k)\left(1+\frac{(r-k)A}{q(t_k)}\right) \geqslant \xi(t_k) > (-1)^{\varkappa} t_k^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t_k),\ F_r\right\}.$$

По лемме 4

$$P'_{r,k} \leqslant C_{18} P(F_k)\exp\left\{-B(\alpha)\frac{A\alpha(r-k)}{|\alpha-1|}(1+\vartheta)\right\}$$

и из (31) следует, что сумма

$$\sum_{t_r\in Q''_k} P'_{r,k} \leqslant M_2 P(F_k).$$

Вероятность $P''_{r,k}$ не превосходит

$$P\left\{\xi(t_r)-\xi(t_k) > (-1)^{\varkappa}\left[t_r^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t_r)-t_k^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t_k)\left(1+\frac{(r-k)A}{q(t_k)}\right)\right]\right\}\cdot P(F_k). \tag{33}$$

Используя (32), получаем, что

$$t_r^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t_r)-t_k^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t_k)\left(1-\frac{(r-k)A}{q(t_r)}\right)$$

при $1<\alpha<2$ больше

$$(t_r-t_k)^{\frac{1}{\alpha}}\,2b^{-\frac{1}{\alpha}}(r-k)^{1-\frac{1}{\alpha}}A,$$

а при $0<\alpha<1$ меньше

$$(t_r-t_k)^{\frac{1}{\alpha}}(r-k)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(A+4b\alpha^{-1}).$$

Тогда из (3) и (33) следует, что

$$P''_{r,k} \leqslant C_{19}\exp\{-B(\alpha)(r-k)A_1\}\cdot P(F_k),$$

где

$$A_1=\begin{cases} A^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}, & \text{если } 1<\alpha<2,\\ (A+4b\alpha^{-1})^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}, & \text{если } 0<\alpha<1.\end{cases}$$

Суммируя по всем $t_r\in Q''_k$, получаем

$$\sum_{t_r\in Q''_k} P''_{r,k} \leqslant M_3 P(F_k).$$

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
6.IV.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, К теории роста однородных случайных процессов с независимыми приращениями, сб. трудов Института математики АН Укр. ССР, т. 10 (1948), 60—82.
2. А. В. Скороход, Асимптотические формулы для устойчивых законов распределения, ДАН СССР, т. 98, № 5 (1954), 731—734.
3. В. М. Золотарев, Аналог закона повторного логарифма для полунепрерывных устойчивых процессов, Теория вероятностей и ее применения, т. 9. вып. 3, 1964, 566—567.
4. W. Feller, The general form of the so-called law of the iterated logarithm., Trans. Aner. Math. Soc., vol 54. (1943), p. 373.
5. T. Sirao, On some asymptotic properties concerning homogeneous differential process, Nagoya Math. J., Nr. 6. p. 95 — 107, 1953.
6. M. Lipschutz, On strong bounds for sums of independent random variables which tend to a stable distribution. Trans. Amer. Math. Soc., 1956, p. 135—154.
7. K. L. Chung and P. Erdos, On the applications of the Borel-Cantelli lemma, Trans. Amer. Math. Soc., vol 72 (1952), p. 179.

ATSITIKTINIŲ STABILIŲ PROCESŲ VIRŠUTINIŲ IR APATINIŲ FUNKCIJŲ KLAUSIMU. I

N. KALINAUSKAITĖ

(*Reziumė*)

Sakysime, $\xi_\alpha(t)$ yra atsitiktinis homogeninis stabilus procesas su parametrais $0<\alpha<1$, $\beta=-1$, $\alpha\neq 1$. Tolydinę G_α klasės funkciją $g(t)$ vadinsime viršutine, jei su tikimybe 1 aibė $\{\xi_\alpha(t)>g(t)\}$ aprėžta, ir apatine, jei ši aibė neaprėžta. Būtina ir pakankama sąlyga, kad funkcija $g(t)$ būtų viršutinė (apatinė) yra integralo (5) konvergavimas (divergavimas). Kaip išvada gaunamas kartotinio logaritmo dėsnio analogas, kai $0<\alpha<1$.

ON THE UPPER AND LOWER FUNCTIONS FOR THE STABLE STOCHASTIC PROCESS

N. KALINAUSKAITĖ

(*Summary*)

Let $\xi_\alpha(t)$ be the stable stochastio process with $0<\alpha<2$, $\alpha\neq 1$, $\beta=-1$. The continuous function $g(t)$ is said to be the upper (lower) function if with probability I the set $\{t:\xi_\alpha(t)>g(t)\}$ is bounded (unbounded). Necessary and sufficient condition for the continuous function $g(t)$ satisfying the conditions a), if $1<\alpha<2$, and b), if $0<\alpha<1$, to be the upper (lower) function is the convergence (divergence) of the integral (5).

The law analoguous to the law of the iterated logarithm for the case $0<\alpha<1$ is detected.