V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1965

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ УСЛОВИЯМИ

Б. КВЕДАРАС

В настоящей статье рассматривается вопрос о неразрешимости краевой задачи:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-Ax=f(t), \tag{1}$$

$$x(-T)=x(T)=\dot{x}(-T)=\dot{x}(T)=0, \tag{2}$$

где A матрица с элементами a_{ij} $(i, j=1, \ldots, n)$, а $f(t)$ – заданная вектор-функция, компоненты $f_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ которой имеют вид:

$$f_i(t)=\begin{cases} 1, & \text{если } t\in[-T, a_i), \\ 0, & \text{если } t\in[a_i, b_i], \\ \pm 1, & \text{если } t\in[b_i, T]. \end{cases}$$

Как известно [1], для разрешимости задачи (1)–(2) необходимо и достаточно, чтобы функция $f(t)$ была ортогональной к каждому решению уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2}-A^*y=0. \tag{3}$$

Рассмотрим здесь только тот случай, когда все $f_i(t)$ равны -1 на отрезке $(b_i, T]$. Остальные случаи получаются аналогично.

Пусть $y(t)$ какое-либо решение уравнения (3), тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{-T}^{T} f_i(t)\,y_i(t)\,dt=\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{-T}^{a_i} y_i(t)\,dt-\int_{b_i}^{T} y_i(t)\,dt\right]=0. \tag{4}$$

Справедлива **теорема 1.** Для того, чтобы каждое решение уравнения (3) удовлетворяло условию (4), необходимо и достаточно, чтобы каждое решение задачи

$$\frac{d^2z}{dt^2}-A^*\frac{dz}{dt}=0, \qquad z(0)=0, \tag{5}$$

удовлетворяло условию:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[z_i(a_i)-z_i(-T)-z_i(T)+z_i(b_i)\right]=0. \tag{6}$$

Необходимость. Если $y(t)$ – решение уравнения (3), удовлетворяющее условию (4), то положим

$$z(t)=\int_0^t y(s)\,ds.$$

Очевидно, что для $z(t)$ условия (5) и (6) теоремы выполнены.

Достаточность. Пусть для какой-либо функции $z(t)$ выполнены условия теоремы: она является решением задачи (5) и удовлетворяет условию (6). Тогда положим $y(t)=\frac{dz(t)}{dt}$. Ясно, что $y(t)$ являются решением уравнения (4). Так как $z(0)=0$, то

$$z_i(a_i)-z_i(-T)=\int_0^{a_i} y_i(t)\,dt-z_i(-T)=\int_0^{-T} y_i(t)\,dt-$$

$$-\int_{a_i}^{-T} y_i(t)\,dt-z_i(-T)=\int_{-T}^{a_i} y_i(t)\,dt.$$

Аналогично $z_i(T)-z_i(b_i)=\int_{b_i}^{T} y_i(t)\,dt$, т. е. выполняется условие (4).

Теорема доказана.

Лемма 1. Если A симметрическая положительно определенная матрица, то уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}-A\,\frac{dx}{dt}=0 \tag{7}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям

$$x(-T)=p,\ x(0)=0,\ x(T)=q \tag{8}$$

при любых

$$p=(p_1,\ \ldots,\ p_n)\ \text{и}\ q=(q_1,\ \ldots,\ q_n).$$

Это решение представимо в виде:

$$x(t)=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}A^{\frac{1}{2}}t-I\right)\left(\operatorname{ch}A^{\frac{1}{2}}T-I\right)^{-1}(q+p)+\frac{1}{2}\operatorname{sh}A^{\frac{1}{2}}t\operatorname{sh}^{-1}A^{\frac{1}{2}}T(q-p). \tag{9}$$

Доказательство. Проверка того, что функция $x(t)$, определенная формулой (9), является искомым решением, не представляет труда. Покажем единственность. Для этого достаточно показать, что при $p=q=0$ задача (7)—(8) имеет только тривиальное решение.

Проинтегрировав уравнение (7) от 0 до t получим

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}-\frac{d^2x(0)}{dt^2}-Ax(t)=0.$$

Отсюда следует, что если решение $x(t)$ уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}-Ax=c, \tag{10}$$

где c — любой постоянный вектор, удовлетворяющее условиям $x(-T)=$ $=x(0)=x(T)=0$, тривиально, то задача (7)—(8) имеет единственное решение. Известно [2, 3], что решение уравнения (10), удовлетворяющее нулевым краевым условиям, имеет вид:

$$x(t)=\int_{-T}^{t} A^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sh}^{-1}A^{\frac{1}{2}}2T\operatorname{sh}A^{\frac{1}{2}}(T-t)\operatorname{sh}A^{\frac{1}{2}}(T+s)\,c\,ds+$$

$$+\int_{t}^{T} A^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sh}^{-1}A^{\frac{1}{2}}2T\operatorname{sh}A^{\frac{1}{2}}(T-s)\operatorname{sh}A^{\frac{1}{2}}(T+t)\,c\,ds.$$

Из того, что $x(0)=0$ и все матрицы (как функции от A) перестановочны и неособенные (см. [3]), получаем

$$\int\limits_{-T}^{0} \operatorname{sh} A^{\frac{1}{2}} (T+s)\, c\, ds + \int\limits_{0}^{T} \operatorname{sh} A^{\frac{1}{2}} (T-s)\, c\, ds = 0.$$

Интегрирование дает

$$(\operatorname{ch} A^{\frac{1}{2}} T - I)\, c - (I - \operatorname{ch} A^{\frac{1}{2}} T)\, c = 0.$$

Отсюда следует, что $c=0$. Следовательно $x(t)\equiv 0$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. Введем норму $\|x(t)\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}$ и пусть $\{e_i\}$ $(i=1, \ldots, n)$ ортонормированная система собственных векторов матрицы A. Тогда для любого решения задачи (7) – (8) верна оценка, при $-\infty < t < \infty$

$$\|x(t)\| \leqslant \Theta(t) \left[\sum_{i=1}^{n} (\max\{|\bar{q}_i|, |\bar{p}_i|\})^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

где

$$\Theta(t) = \max_i \left\{\left|\frac{\operatorname{sh}\lambda_i t}{\operatorname{sh}\lambda_i T}\right|\right\}, \quad \bar{p}_i = (p, e_i), \quad \bar{q}_i = (q, e_i).$$

Доказательство. Пусть $x(t)$ какое-либо решение задачи (7) – (8). Имеем

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i(t)\, e_i,$$

$$\|x(t)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Так как каждое решение $x(t)$ дано формулой (9), то

$$\bar{x}_i(t) = \frac{1}{2}\Big((\operatorname{ch} A^{\frac{1}{2}} t - I)(\operatorname{ch} A^{\frac{1}{2}} T - I)^{-1}(q+p) + \operatorname{sh} A^{\frac{1}{2}} t \operatorname{sh}^{-1} A^{\frac{1}{2}} T (q-p),\ e_i\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(q+p,\ \frac{\operatorname{ch}\lambda_i t - 1}{\operatorname{ch}\lambda_i T - 1}\, e_i\right) + \frac{1}{2}\left(q-p,\ \frac{\operatorname{sh}\lambda_i t}{\operatorname{sh}\lambda_i T}\, e_i\right),$$

где $Ae_i = \lambda_i^2 e_i$.

После несложных вычислений получаем

$$\bar{x}_i(t) = \frac{\operatorname{sh}\lambda_i \frac{t}{2}}{\operatorname{sh}\lambda_i \frac{T}{2}} \left(\frac{\operatorname{sh}\lambda_i \frac{T+t}{2}}{\operatorname{sh}\lambda_i T}\, \bar{q}_i - \frac{\operatorname{sh}\lambda_i \frac{T-t}{2}}{\operatorname{sh}\lambda_i T}\, \bar{p}_i\right)$$

и

$$\left|\frac{\operatorname{sh}\lambda_i \frac{T+t}{2}}{\operatorname{sh}\lambda_i T}\, \bar{q}_i - \frac{\operatorname{sh}\lambda_i \frac{T-t}{2}}{\operatorname{sh}\lambda_i T}\, \bar{p}_i\right| \leqslant \frac{\operatorname{ch}\lambda_i \frac{t}{2}}{\operatorname{ch}\lambda_i \frac{T}{2}} \max\{|\bar{q}_i|, |\bar{p}_i|\}.$$

Следовательно

$$|\bar{x}_i(t)| \leqslant \frac{|\operatorname{sh}\lambda_i t|}{\operatorname{sh}\lambda_i T} \max\{|\bar{q}_i|, |\bar{p}_i|\}.$$

Обозначив $\Theta(t) = \max\limits_i \left\{\frac{|\operatorname{sh}\lambda_i t|}{\operatorname{sh}\lambda_i T}\right\}$, в силу (12) получаем (11). Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть A – симметрическая положительно определенная матрица. Тогда если

$$\max\left\{\max_{i,k}\frac{|\operatorname{sh}\lambda_k b_i|}{\operatorname{sh}\lambda_k T},\ \max_{i,k}\frac{|\operatorname{sh}\lambda_k a_i|}{\operatorname{sh}\lambda_k T}\right\}=\Theta<\frac{1}{n},$$

где n порядок матрицы, то задача (1) – (2) неразрешима.

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно доказать, что существует какое-нибудь решение задачи (5), не удовлетворяющее условию (6).

Возьмем вектор q^0, такой что $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0\neq 0$ и будем решать задачу (7) – (8) с условиями $p=0$, $q=q^0$.

Из леммы 2 следует, что это решение $x^0(t)$ удовлетворяет оценке

$$\|x^0(t)\|\leqslant\Theta(t)\,\|q^0\|.$$

Обозначим

$$p^1=\left(x_1^0(a_1),\ x_2^0(a_2),\ \ldots,\ x_n^0(a_n)\right),$$

$$q^1=\left(x_1^0(b_1),\ x_2^0(b_2),\ \ldots,\ x_n^0(b_n)\right).$$

Пользуясь (11), неравенством Коши и подбирая a_0 получаем

$$\|p^1\|^2=\sum_{i=1}^{n}[x_i^0(a_i)]^2=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\bar{x}_k^0(a_i)\,e_{ki}\right]^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[\bar{x}_k^0(a_i)]^2\sum_{k=1}^{n}e_{ki}^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[\bar{x}_k^0(a_i)]^2\leqslant n\sum_{k=1}^{n}\max_i\{|\bar{x}_k^0(a_i)|^2\}=$$

$$=n\sum_{k=1}^{n}[\bar{x}_k^0(a_0)]^2\leqslant n\Theta^2(a_0)\sum_{k=1}^{n}|\bar{q}_k^0|^2=n\Theta^2(a_0)\,\|q^0\|^2.$$

Аналогично

$$\|q^1\|\leqslant\sqrt{n}\,\Theta(b_0)\,\|q^0\|.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}[\max\{|\bar{q}_i^1|,\ \bar{p}_i^1|\}]^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}[\max\{\|q^1\|,\|p^1\|\}]^2=n\max\{\|q^1\|^2,\ \|p^1\|^2\}\leqslant$$

$$\leqslant n^2\max\{\Theta^2(a_0),\ \Theta^2(b_0)\}\,\|q^0\|^2=n^2\Theta^2\|q^0\|^2.$$

Пусть $x^1(t)$ решение задачи (7) – (8) с $p=p^1$ и $q=q^1$.

Тогда из (11) и полученной выше оценки следует, что

$$\|x^1(t)\|\leqslant\Theta(t)\,n\Theta^2\,\|q^0\|.$$

Далее поступим по индукции. Пусть известно решение $x^m(t)$ задачи (7) – (8) и для него верна оценка

$$\|x^m(t)\|\leqslant\Theta(t)\,n^m\,\Theta^m\,\|q^0\|.$$

Возьмем

$$p^{m+1}=\left(x_1^m(a_1),\ x_2^m(a_2),\ \ldots,\ x_n^m(a_n)\right),$$

$$q^{m+1}=\left(x_1^m(b_1),\ x_2^m(b_2),\ \ldots,\ x_n^m(b_n)\right)$$

и решим задачу (7) – (8) с $p=p^{m+1}$, $q=q^{m+1}$. Решение обозначим через $x^{m+1}(t)$. Повторяя вышепроведенные рассуждения, получаем оценку

$$\|x^{m+1}(t)\|\leqslant\Theta(t)\,n^{m+1}\,\Theta^{m+1}\,\|q^0\|.$$

В силу условия теоремы, ряд $x(t)=\sum_{m=0}^{\infty} x^m(t)$ сходится абсолютно и равномерно на каждом конечном интервале изменения t и

$$\|x(t)\|=\left\|\sum_{m=0}^{\infty} x^m(t)\right\|\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\|x^m(t)\|\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\Theta(t)\,n^m\Theta^m\|q^0\|=\frac{\|q^0\|\,\Theta(t)}{1-n\Theta}.$$

Очевидно, что $x(0)=0$. Функции $x^m(t)$ аналитичны, как решения дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Следовательно, ряд допускает почленное дифференцирование на любом конечном интервале [см. 4]. Отсюда следует, что $x(t)$ является решением задачи (5). Покажем, что оно не удовлетворяет условию (6).

В самом деле

$$\sum_{i=1}^{n}[x_i(a_i)-x_i(-T)-x_i(T)+x_i(b_i)]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=0}^{\infty}[x_i^m(a_i)-x_i^m(-T)-x_i^m(T)+$$

$$+x_i^m(b_i)]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=0}^{\infty}[p_i^{m+1}-p_i^m-q_i^m+q_i^{m+1}]=-\sum_{i=1}^{n}q_i^0\neq 0.$$

Теорема доказана.

Отметим, что метод доказательства теоремы 2 близок к методу П. С. Новикова, примененному им при доказательстве теоремы единственности решения обратной задачи теории потенциала [5].

В заключение автор выражает глубокую благодарность С. Г. Крейну за постановку задачи и помощь в работе.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
31.III.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Гостехиздат, Москва, 1959.
2. Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, Москва, 1958.
3. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Гостехиздат, Москва, 1953.
4. И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, Физматгиз, Москва, 1960.
5. П. С. Новиков, Об единственности решения обратной задачи потенциала, ДАН СССР, т. 18, вып. 3, 1938.

APIE VIENĄ KRAŠTINĮ UŽDAVINĮ SU PERAPIBRĖŽTOMIS SĄLYGOMIS

B. KVEDARAS

(Reziumė)

Straipsnyje nagrinėjamas (1)–(2) uždavinio neišsprendžiamumas. Įrodoma, kad uždavinys neišsprendžiamas, jeigu A – simetrinė teigiamai apibrėžta matrica, ir dešinė (1) lygties pusė $f(t)$ priklauso specialiai funkcijų klasei.

ABOUT ONE BOUNDARY PROBLEM WITH OVERDETERMINATE CONDITIONS

B. KVEDARAS

(*Summary*)

The question of insolubility of problem (1)–(2) is regarged in the article. It is proved that the question is insolubile when A is symmetrical positively determined matrix and the right part $f(t)$ of equation (1) belongs to special function class.

Примечание к корректуре. Используя неравенство $\frac{\operatorname{sh}\lambda t}{\operatorname{sh}\lambda} \leqslant t$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ автору удалось показать, что теорема 2 остается в силе, если условие $\Theta < \frac{1}{n}$ заменить условием $\Theta < \frac{1}{\sqrt{n}}$ или (более точным)

$$\max \left\{ \left[\sum_{i=1}^{n} \Theta^2(a_i) \right]^{\frac{1}{2}}, \left[\sum_{i=1}^{n} \Theta^2(b_i) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} < 1.$$

При этом оценка (II) заменяется неулучшаемой оценкой

$$\| z(t) \| \leqslant \Theta(t) \max \{ \| p \|, \| q \| \}.$$