V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1965

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

К. С. МАМИЙ

Пусть H – комплексное гильбертово пространство. Обозначим через $L(H, H)$ – пространство линейных ограниченных операторов, действующих в H. Рассмотрим в H уравнение

$$y''(t)+A(t)y(t)+B(t)y(t)=0 \qquad (0<t<\infty) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y(0)=y_0, \quad y'(0)=y_0', \tag{2}$$

где $y(t)$ – неизвестная функция со значениями в H, $A(t)$ – при каждом $t\geqslant 0$ линейный, вообще говоря, неограниченный оператор, действующий в H, а $B(t)\in L(H, H)$. Будем предполагать, что $A(t)=S^2(t)$.

Определение. *Решением задачи* (1) – (2) *будем называть функцию* $y(t)$, *обладающую следующими свойствами:*

1. *Существуют и сильно непрерывны* $y'(t)$ *и* $y''(t)$, *соответственно, при всех* $t\geqslant 0$ *и* $t>0$;

2. $y(t)\in D\big(A(t)\big)$ *для* $t>0$, $y(0)\in D\big(S(0)\big)$, $y'(t)\in D\big(S(t)\big)$ *для* $t\geqslant 0$;

3. *Функции* $A(t)y(t)$, $B(t)y(t)$ *сильно непрерывны на* $(0, \infty)$, *а функции* $S(t)y(t)$, $S(t)y'(t)$ *сильно непрерывны на* $[0, \infty)$;

4. $y(t)$ *удовлетворяет уравнению* (1) *для любого* $t>0$;

5. $\lim\limits_{t\to 0}\|y(t)-y_0\|=0, \quad \lim\limits_{t\to 0}\|y'(t)-y_0'\|=0.$

В работе даются некоторые достаточные условия ограниченности решений при $t\to+\infty$ уравнения (1), из которых следует, в частности ряд результатов, полученных ранее в работах [1, 3, 4, 8] для случая, когда $H=R_n$ – n-мерное вещественное эвклидово пространство.

§ 1. В этом параграфе приведем некоторые вспомогательные предложения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 1. Пусть A – постоянный замкнутый линейный оператор, действующий в банаховом пространстве X, а $y(t)$ заданная на $[0, \infty)$ функция со значениями в X, сильно непрерывно дифференцируемая при $t\geqslant 0$. Пусть, далее, при $t\geqslant 0$ $y(t)$, $y'(t)\in D(A)$ и $Ay'(t)$ – сильно непрерывная функция. Тогда функция $Ay(t)$ сильно непрерывно дифференцируема и

$$\frac{d}{dt}[Ay(t)]=Ay'(t) \qquad (t\geqslant 0).$$

Доказательство. Из равенства

$$y(t) = y(0) + \int_0^t y'(\tau)\,d\tau$$

следует, что $\int_0^t y'(\tau)\,d\tau \in D(A)$. Следовательно, имеет смысл выражение $A\int_0^t y'(\tau)\,d\tau$. С другой стороны, имеет смысл $\int_0^t Ay'(\tau)\,d\tau$ в силу сильной непрерывности функции $Ay'(\tau)$. Но тогда из замкнутости оператора A

$$A\int_0^t y'(\tau)\,d\tau = \int_0^t Ay'(\tau)\,d\tau.$$

Поэтому

$$Ay(t) = Ay(0) + \int_0^t Ay'(\tau)\,d\tau,$$

откуда следует лемма.

Замечание. Аналогичная лемма доказана в [6] в предположении, что функция $Ay(t)$ сильно непрерывно дифференцируема.

Лемма 2. Пусть при каждом $t \in [a, b]$ $A(t)$ – самосопряженный оператор в H и область определения его $D(A)$ не зависит от t. Пусть $y(t)$ – сильно, а $A(t)h\left(h \in D(A)\right)$ – слабо дифференцируемые на $[a, b]$ функции и $y(t)$, $y'(t) \in D(A)$ при всех $t \in [a, b]$. Тогда функция $A(t)y(t)$ слабо дифференцируема и

$$\frac{d}{dt}[A(t)y(t)] = A'(t)y(t) + A(t)y'(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b.$$

Доказательство. Пусть h – произвольный постоянный элемент из $D(A)$. Тогда

$$\left|\left(\frac{A(t+\Delta t)y(t+\Delta t) - A(t)y(t)}{\Delta t} - A'(t)y(t) - A(t)y'(t),\ h\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\left(\frac{A(t+\Delta t)y(t+t\Delta) - A(t+\Delta t)y(t)}{\Delta t} - A(t+\Delta t)y'(t),\ h\right)\right| +$$

$$+\left|\left(\frac{A(t+\Delta t)y(t) - A(t)y(t)}{\Delta t} - A'(t)y(t),\ h\right)\right| + \left|\left(A(t+\Delta t)y'(t) - A(t)y'(t),\ h\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|A(t+\Delta t)h\| \cdot \left\|\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} - y'(t)\right\| +$$

$$+\left|\left(\left[\frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} - A'(t)\right]y(t),\ h\right)\right| + \left|\left([A(t+\Delta t) - A(t)]\,y'(t),\ h\right)\right| \to 0$$

при $\Delta t \to 0$, так как функция $A(t)h$ слабо непрерывна и, следовательно, $\|A(t+\Delta t)h\| \leqslant C(t)$ $(t+\Delta t \in [a, b])$, где $C(t)$ не зависит от Δt.

Таким образом, мы получили, что для всех $h \in D(A)$

$$\left([A(t)y(t)]' - A'(t)y(t) - A(t)y'(t),\ h\right) = 0$$

и лемма очевидна в силу плотности $D(A)$ в H.

Лемма 3. Пусть на $[a, b]$ заданы две функции $x(t)$ и $y(t)$ со значениями в H, причем $x(t)$ – слабо, а $y(t)$ – сильно дифференцируемы на $[a, b]$. Тогда числовая функция $\left(x(t), y(t)\right)$ дифференцируема и

$$\frac{d}{dt}\left(x(t), y(t)\right) = \left(x'(t), y(t)\right) + \left(x'(t), y'(t)\right), \qquad a \leqslant t \leqslant b.$$

Эта лемма доказывается так же, как лемма 2.

Лемма 4. Пусть при каждом $t \geqslant 0$ $A(t)$ – самосопряженный неотрицательный оператор в H, область определения $D(A)$ которого не зависит от t. Пусть $y(t)$ заданная на $[0, \infty)$ функция со значениями в H, сильно дифференцируемая при $t \geqslant 0$. Тогда, если при $t \geqslant 0$ $y(t) \in D(A)$, $y'(t) \in D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$ $\left(A^{\frac{1}{2}}(t)\right.$ – положительный квадратный корень из оператора $\left.A(t)\right)$ и функции $A^{\frac{1}{2}}(t)h$ $\left(h \in D(A^{\frac{1}{2}})\right)$, $A^{\frac{1}{2}}(t)y(t)$ – сильно дифференцируемы на $[0, \infty)$, то дифференцируема в обычном смысле и числовая функция $\left(A(t)y(t), y(t)\right)$, причем

$$\frac{d}{dt}\left(A(t)y(t), y(t)\right) = 2\operatorname{Re}\left(A(t)y(t), y'(t)\right) + 2\operatorname{Re}\left(A_t^{\frac{1}{2}}(t)A^{\frac{1}{2}}(t)y(t), y(t)\right),$$

где

$$A_t^{\frac{1}{2}}(t)h = \frac{d}{dt}\left[A^{\frac{1}{2}}(t)h\right].$$

Лемма 4 является следствием лемм 2 и 3.

Лемма 5. Пусть при каждом $t \in [a, b]$ $A(t) \in L(H, H)$ и $A(t)$, как функция t, непрерывна и имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$ в равномерной операторной топологии (т. е. в топологии пространства L). Пусть $y(t)$ заданная на $[a, b]$ сильно непрерывная функция, имеющая ограниченную сильную вариацию. Тогда числовая функция $\left(A(t)y(t), y(t)\right)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$, причем справедливо равенство

$$\int_a^b \left[\left(A(t)y(t), dy(t)\right) + \left(A(t)dy(t), y(t)\right)\right] =$$

$$= \left(A(t)y(t), y(t)\right)\Big|_a^b - \int_a^b \left([dA(t)]\,y(t), y(t)\right).$$

Лемма 5 следует непосредственно из определения и свойств интеграла Стильтьеса от одной абстрактной функции по другой абстрактной функции (см. [2]).

§ 2. Рассмотрим в H уравнение

$$y''(t) + K(t)B_0 y(t) = 0, \qquad 0 < t < \infty, \tag{3}$$

где при $t \geqslant 0$ $K(t) \in L(H, H)$, B_0 – вообще говоря, неограниченный линейный постоянный оператор в H. Уравнение (3) является частным случаем уравнения (1), когда $A(t) = K(t)B_0$, $B(t) = 0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1. $B_0 = B_0^*$, $(B_0 h, h) \geqslant \gamma \| h \|^2$, $h \in D(B_0)$, $\gamma = \text{const} > 0$.
2. $K(t) = K^*(t)$, $K(t) B_0^{\frac{1}{2}} h = B_0^{\frac{1}{2}} K(t) h$ *для всех* $t \geqslant 0$ *и* $h \in D\left(B_0^{\frac{1}{2}}\right)$.
3. *Операторная функция* $K(t)$ *непрерывна на* $[0, \infty)$ *и имеет ограниченную вариацию на* $[a, \infty)$, $a \geqslant 0$):

$$\overset{\infty}{\underset{a}{V}} K(t) = \int_a^\infty \| dK(t) \| < \infty$$

в равномерной операторной топологии.

4. $\Big(K(t) h, h\Big) \geqslant \gamma(t) \| h \|^2$, $h \in H$, *где* $\gamma(t)$ — *некоторая действительная функция, определенная на* $[0, \infty)$, *для которой*

$$\lim_{t \to +\infty} \gamma(t) = \gamma_0 > 0.$$

Тогда решения уравнения (3) $\left(y_0 \in D\left(B_0^{\frac{1}{2}}\right)\right)$ *ограничены вместе с первой производной при* $t \to +\infty$.

Доказательство. Пусть $y(t)$ произвольное решение уравнения (3). Умножив тождество (3) справа и слева скалярно на $y'(t)$ и сложив почленно полученные выражения, будем иметь:

$$\frac{d}{dt} \| y'(t) \|^2 + \Big(K(t) B_0 y(t), y'(t)\Big) + \Big(y'(t), K(t) B_0 y(t)\Big) = 0,$$

или в силу леммы 1 и условий теоремы

$$\frac{d}{dt} \| y'(t) \|^2 + \left(K(t) B_0^{\frac{1}{2}} y(t), \frac{d}{dt}\left[B_0^{\frac{1}{2}} y(t)\right]\right) + \left(K(t) \frac{d}{dt}\left[B_0^{\frac{1}{2}} y(t)\right], B_0^{\frac{1}{2}} y(t)\right) = 0.$$

Проинтегрировав это тождество от некоторого $t_0 \geqslant a$, которое подберем ниже, до $t > t_0$ и учитывая затем лемму 5, получим

$$\| y'(t) \|^2 + \left(K(t) B_0^{\frac{1}{2}} y(t), B_0^{\frac{1}{2}} y(t)\right) \leqslant C_0 + \int_{t_0}^t \left([dK(\tau)] B_0^{\frac{1}{2}} y(\tau), B_0^{\frac{1}{2}} y(\tau)\right), \tag{4}$$

где

$$C_0 = \| y'(t_0) \|^2 + \| K(t_0) \| \cdot \left\| B_0^{\frac{1}{2}} y(t_0) \right\|^2 < +\infty.$$

Из условий 3 и 4 теоремы следует, что для $\alpha = \frac{1}{4}\gamma_0$ существует такое достаточно большое число $T(\alpha) \geqslant a$, что при всех $t \geqslant T(\alpha)$ будут справедливы неравенства

$$\Big(K(t) h, h\Big) \geqslant 2\alpha \| h \|^2 \ (h \in H) \quad \text{и} \quad \int_t^\infty \| dK(\tau) \| \leqslant \alpha. \tag{5}$$

Положим $t_0 \geqslant T(\alpha)$. Так как функция $\left\| B_0^{\frac{1}{2}} y(t) \right\|^2$ непрерывна на $[t_0, t]$ по определению, то существует точка $t^* \in [t_0, t]$ такая, что

$$\left\| B_0^{\frac{1}{2}} y(t^*) \right\|^2 = \max_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \left\| B_0^{\frac{1}{2}} y(\tau) \right\|^2.$$

Положив $t=t^*$ и учитывая неравенства (5), из (4) получим

$$\| y'(t^*)\|^2+2\alpha\left\| B_0^{\frac{1}{2}} y(t^*)\right\|^2 \leqslant C_0+\left\| B_0^{\frac{1}{2}} y(t^*)\right\|^2 \cdot \int_{t_0}^{t^*} \| dK(\tau)\| \leqslant$$

$$\leqslant C_0+\alpha\left\| B_2^{\frac{1}{2}} y(t^*)\right\|^2,$$

откуда следует что

$$2\alpha\left\| B_0^{\frac{1}{2}} y(t^*)\right\|^2 \leqslant C_0+\alpha\left\| B_0^{\frac{1}{2}} y(t^*)\right\|^2.$$

или

$$\left\| B_0^{\frac{1}{2}} y(\tau)\right\|^2 \leqslant C_0\alpha^{-1} \qquad \text{для всех} \quad \tau\in[t_0,\ t].$$

Но так как t — произвольное число, большее t_0, и $C_0\alpha^{-1}$ не зависит от t, то

$$\left\| B_0^{\frac{1}{2}} y(t)\right\|^2 \leqslant C_0\alpha^{-1} \qquad \text{для всех} \quad t\geqslant t_0, \tag{*}$$

откуда согласно условия 1 имеем

$$\| y(t)\|^2 \leqslant C_0(\gamma\alpha)^{-1} \qquad (t\geqslant t_0). \tag{**}$$

Теперь из неравенства (4) легко получить, что

$$\| y'(t)\|^2 \leqslant 2C_0 \qquad (t\geqslant t_0). \tag{***}$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Если H — вещественное гильбертово пространство, то условие самосопряженности оператора $K(t)$ можно снять, так как в этом случае

$$\left(K(t)h,\ h\right)=\left(K_s(t)h,\ h\right), \quad \text{где} \quad K_s(t)=\frac{1}{2}\left(K(t)+K^*(t)\right).$$

Замечание 2. Если $H=\boldsymbol{R}_t$ — вещественное эвклидово пространство, $A(t)$ — симметричная матрица $n\times n$, $B=E$ — единичная матрица $n\times n$, то из теоремы 1 вытекает, как следствие, теорема G. Borg'a [1]. Если же $A(t)$ — произвольная вещественная матрица $n\times n$, то из замечания 1 получается, в частности, замечание Р. С. Гусаровой [3] к указанной теореме из [1].

§ 3. Рассмотрим теперь уравнение (1) при следующих предположениях:

а) при каждом $t\in[0,\ \infty)$ $A(t)$ — самосопряженный оператор в H, область определения $D(A)$ которого не зависит от t;

б) $\left(A(t)h,\ h\right)\geqslant\gamma\| h\|^2$, $h\in D(A)$, $\gamma=\text{const}>0$, $t\geqslant 0$;

в) при каждом $t\geqslant 0$ оператор $B(t)\in L(H,\ H)$ и самосопряженный.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* а)—в). *Предположим, далее, что*

1. *Оператор-функция* $A^{\frac{1}{2}}(t)$ *сильно непрерывно дифференцируема по* t $(t\geqslant 0)$ *на* $D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$.

2. $2\,\mathrm{Re}\left(A_t^{\frac{1}{2}}(t)\,A^{\frac{1}{2}}(t)\,h,\ h\right)\leqslant\lambda(t)\,\|h\|^2,\ h\in D(A),\ t\geqslant 0,$ *где* $\lambda(t)$ *— некоторая скалярная функция, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_0^\infty \lambda^+(t)\,dt<\infty$$

$\left(\lambda^+(t)\right.$ *— неотрицательная часть функции* $\left.\lambda(t)\right)$.

3. *Оператор-функция* $B(t)$ *дифференцируема на* $[0,\ \infty)$ *в равномерной операторной топологии.*

4. $\int\limits_a^\infty \|B'(t)\|\,dt<\infty$ *при некотором* $a\geqslant 0$ *и* $\|B(t)\|\to 0$ *при* $t\to+\infty$.

Тогда решение $y(t)$ $\left(y_0\in D(A^{\frac{1}{2}})\right)$ *уравнения* (1), *для которого функция* $A^{\frac{1}{2}}(t)\,y(t)$ *сильно непрерывно дифференцируема, ограничено вместе с первой производной при* $t\to+\infty$.

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение уравнения (1). Рассмотрим функцию

$$\varphi(t)=\|y'(t)\|^2+\left(A(t)\,y(t),\ y(t)\right)+\left(B(t)\,y(t),\ y(t)\right).$$

Очевидно, что эта функция непрерывно дифференцируема при $t>0$. Воспользовавшись леммой 4 и ограниченностью оператора $B(t)$, легко проверить, что производная $\varphi'(t)$ в силу уравнения (1) будет равна

$$\varphi'(t)=2\,\mathrm{Re}\left(A_t^{\frac{1}{2}}(t)\,A^{\frac{1}{2}}(t)\,y(t),\ y(t)\right)+\left(B'(t)\,y(t),\ y(t)\right).$$

Проинтегрировав это тождество от некоторого $t_0\geqslant a$, которое подберем ниже, до $t>t_0$, получим

$$\begin{aligned}\|y'(t)\|^2&+\left(A(t)\,y(t),\ y(t)\right)+\left(B(t)\,y(t),\ y(t)\right)=\\&\|y_0'\|^2+\left\|A^{\frac{1}{2}}(t_0)\,y_0\right\|^2+\left(B(t_0)\,y_0,\ y_0\right)+\\&+2\int\limits_{t_0}^t \mathrm{Re}\left(A_\tau^{\frac{1}{2}}(\tau)\,A^{\frac{1}{2}}(\tau)\,y(\tau),\ y(\tau)\right)d\tau+\int\limits_{t_0}^t\left(B'(\tau)\,y(\tau),\ y(\tau)\right)d\tau,\end{aligned}\tag{5}$$

где $y_0=y(t_0)$, $y'(t_0)$.

Так как $\|B(t)\|\to 0$ при $t\to+\infty$, то по любому фиксированному $\varepsilon_0>0$ $(\varepsilon_0<\gamma)$ найдется такое $T(\varepsilon_0)\geqslant a$, что при всех $t\geqslant T(\varepsilon_0)$ будут справедливы неравенства

$$-\varepsilon_0\|h\|^2\leqslant\left(B(t)\,h,\ h\right)\leqslant\varepsilon_0\|h\|^2,\quad h\in H.\tag{6}$$

Пусть $t_0\geqslant T(\varepsilon_0)$. Тогда в силу (6) и условий б) и 2) теоремы, из (5) получаем:

$$\|y'(t)\|^2+(\gamma-\varepsilon_0)\,\|y(t)\|^2\leqslant C_0+\int\limits_{t_0}^t\left(\lambda^+(\tau)+\|B'(\tau)\|\right)\cdot\|y(\tau)\|^2\,d\tau,\tag{7}$$

где

$$C_0 = \| y_0' \|^2 + \left\| A^{\frac{1}{2}}(t_0) y_0 \right\|^2 + \varepsilon_0 \| y_0 \|^2,$$

откуда

$$\| y(t) \|^2 \leqslant \frac{C_0}{\gamma - \varepsilon_0} + \frac{1}{\gamma - \varepsilon_0} \int_{t_0}^{t} \left(\lambda^+(\tau) + \| B(\tau) \| \right) \cdot \| y(\tau) \|^2 d\tau, \qquad (\gamma - \varepsilon_0 > 0)$$

или в силу леммы Гронуолла – Беллмана

$$\| y(t) \|^2 \leqslant \frac{C_0}{\gamma - \varepsilon_0} \exp \left[\frac{1}{\gamma - \varepsilon_0} \int_{t_0}^{t} \left(\lambda^+(\tau) + \| B'(\tau) \| \right) d\tau \right]. \qquad (t \geqslant t_0)$$

Следовательно, $\| y(t) \|$ ограничена при $t \geqslant t_0$, так как по условию

$$\int_{t_0}^{\infty} \left(\lambda^+(\tau) + \| B'(\tau) \| \right) d\tau < \infty \qquad (t_0 \geqslant a).$$

Далее, из (7) следует, что будет ограниченной и $\| y'(t) \|$ при всех $t \geqslant t_0$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* а) *и* в). *Предположим еще, что*

1. *Функция $A(t)h$ сильно непрерывна на $[0, \infty)$ для всех $h \in D(A)$.*
2. $\left(A(t)h, h \right) \geqslant \gamma(t) \| h \|^2$, $h \in D(A)$, $t \geqslant 0$, *где* $\gamma(t) \geqslant \gamma_0 = \mathrm{const} > 0$ *и*

$$\lim_{t \to +\infty} \gamma(t) = +\infty.$$

3. *Квадратичная форма $\left(A^{-1}(t) x, x \right)$ монотонно убывает по t на $[0, \infty)$ для всех $x \in H$, $x \neq 0$.*
4. *Операторная функция $B(t)$ непрерывна при $t \geqslant 0$ в равномерной операторной топологии и ограничена: $\| B(t) \| \leqslant M < \infty$.*
5. $A^{-1}(t) B(t) = B(t) A^{-1}(t)$ *при* $t \geqslant 0$.
6. *Операторная функция $A^{-1}(t) B(t)$ имеет ограниченную вариацию на $[a, \infty)$, $a \geqslant 0$, в равномерной операторной топологии, т. е.*

$$\mathop{V}_{a}^{\infty} A^{-1}(t) B(t) = \int_{a}^{\infty} \| dA^{-1}(t) B(t) \| < \infty.$$

Тогда все решения $y(t)$ уравнения (1) *ограничены при $t \to +\infty$, а для производной $y'(t)$ имеет место оценка*

$$\| A^{-\frac{1}{2}}(t) y'(t) \| \leqslant C = \mathrm{const} < \infty \qquad (t \geqslant t_0 \geqslant 0).$$

Доказательство. Из 1 и 2 вытекает, что $A^{-1}(t)$ сильно непрерывна и удовлетворяет условию

$$0 < \left(A^{-1}(t) x, x \right) \leqslant \mu(t) \| x \|^2 \leqslant \mu_0 \| x \|^2 \qquad (8)$$

для всех $x \in H$, $x \neq 0$ и $t \geqslant 0$, где $\mu(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$, $\mu_0 = \frac{1}{\gamma_0}$.

Из (8) и условий 2 и 3 теоремы следует, что квадратичная форма $\left(A^{-1}(t) x, x \right)$ монотонно убывает при $t \to +\infty$, а следовательно, она имеет ограниченную вариацию на $[0, \infty)$ и потому существует интеграл Стильтьеса

$$\int_{t_0}^{t} \left(dA^{-1}(\tau)\,x,\ x\right) = \lim_{\max|\tau_{i+1}-\tau_i|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \left([A^{-1}(\tau_{i+1}) - A^{-1}(\tau_i)]\,x,\ x\right), \qquad x \in H,$$

где $t > t_0 \geqslant 0$ и $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = t$ — произвольное разбиение отрезка $[t_0, t]$, причем, очевидно, что

$$\int_{t_0}^{t} \left(dA^{-1}(\tau)\,x,\ x\right) \leqslant 0 \tag{9}$$

для всех $t > t_0$ и $x \in H$.

Пусть теперь $y(t)$ — любое решение уравнения (1). Тогда (1) можно записать в виде

$$A^{-1}(t)\,y''(t) + y(t) + A^{-1}(t)\,B(t)\,y(t) = 0.$$

Умножив это тождество справа и слева скалярно на $y'(t)$ и сложив почленно полученные выражения, будем иметь (после некоторых очевидных преобразований)

$$\left(A^{-1}(t)\frac{d}{dt}y'(t),\ y'(t)\right) + \left(y'(t),\ A^{-1}(t)\frac{d}{dt}y'(t)\right) + \frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 +$$
$$+ \left(A^{-1}(t)\,B(t)\,y(t),\ \frac{dy(t)}{dt}\right) + \left(\frac{dy(t)}{dt},\ A^{-1}(t)\,B(t)\,y(t)\right) = 0,$$

или, учитывая условия а), в) и 5,

$$\left(A^{-1}(t)\frac{d}{dt}y'(t),\ y'(t)\right) + \left(A^{-1}(t)\,y'(t),\ \frac{d}{dt}y'(t)\right) + \frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 +$$
$$+ \left(A^{-1}(t)\,B(t)\,y(t),\ \frac{dy(t)}{dt}\right) + \left(A^{-1}(t)\,B(t)\frac{dy(t)}{dt},\ y(t)\right) = 0.$$

Проинтегрировав последнее тождество от некоторого $t_0 \geqslant a$ до $t > t_0$ и воспользовавшись затем леммой 5, получим

$$\|y(t)\|^2 + \left(A^{-1}(t)\,B(t)\,y(t),\ y(t)\right) + \left(A^{-1}(t)\,y'(t),\ y'(t)\right) =$$
$$= \|y_0\|^2 + \left(A^{-1}(t_0)\,B(t_0)\,y_0,\ y_0\right) + \left(A^{-1}(t_0)\,y_0',\ y_0'\right) +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \left([dA^{-1}(\tau)]\,y'(\tau),\ y'(\tau)\right) + \int_{t_0}^{t} \left([dA^{-1}(\tau)\,B(\tau)]\,y(\tau),\ y(\tau)\right), \tag{10}$$

где $y_0 = y(t_0)$, $y_0' = y'(t_0)$.

Пусть $C_0 = (1 + M\mu)\|y_0\|^2 + \mu_0\|y_0'\|^2$. Тогда, учитывая (9) и (8), из (10) получим

$$\|y(t)\|^2 + \left(A^{-1}(t)\,B(t)\,y(t),\ y(t)\right) + \left\|A^{-\frac{1}{2}}(t)\,y'(t)\right\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant C_0 + \int_{t_0}^{t} \left([dA^{-1}(\tau)\,B(\tau)]\,y(\tau),\ y(\tau)\right). \tag{11}$$

Так как $\|B(t)\| \leqslant M$ и $\|A^{-1}(t)\| \leqslant \mu(t)$, то

$$\left|\left(A^{-1}(t)\,B(t)\,y(t),\ y(t)\right)\right| \leqslant M\mu(t)\,\|y(t)\|^2. \tag{12}$$

В силу условий 2 и 6 теоремы и неравенства (12), для фиксированного $\varepsilon_0>0$ $(\varepsilon_0<1)$ существует такое $T(\varepsilon_0)\geqslant a$, что при всех $t\geqslant T(\varepsilon_0)$ будут выполняться неравенства

$$-\frac{\varepsilon_0}{2}\|y(t)\|^2\leqslant\left(A^{-1}(t)B(t)y(t),\ y(t)\right)\leqslant\frac{\varepsilon_0}{2}\|y(t)\|^2,$$

$$\overset{\infty}{\underset{t}{V}}A^{-1}(t)B(t)=\int\limits_t^\infty\|dA^{-1}(\tau)B(\tau)\|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Положим, что $t_0\geqslant T(\varepsilon_0)$. Тогда неравенство (11) можно записать в виде

$$\left(1-\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\|y(t)\|^2+\left\|A^{-\frac{1}{2}}(t)y'(t)\right\|^2\leqslant C_0+\max_{t_0\leqslant\tau\leqslant t}\|y(\tau)\|^2\cdot\int\limits_{t_0}^{t}\|dA^{-1}(\tau)B(\tau)\|. \quad (13)$$

Пусть точка t^* $(t_0\leqslant t^*\leqslant t)$ такова, что

$$\|y(t^*)\|^2=\max_{t_0\leqslant\tau\leqslant t}\|y(\tau)\|^2.$$

Положим в (13) $t=t^*$. Тогда будем иметь

$$\left(1-\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\|y(t^*)\|^2+\left\|A^{-\frac{1}{2}}(t^*)y'(t^*)\right\|^2\leqslant C_0=\frac{\varepsilon_0}{2}\|y(t^*)\|^2,$$

откуда

$$\|y(t^*)\|^2\leqslant\frac{C_0}{1-\varepsilon_0}=C_1,$$

или

$$\|y(\tau)\|^2\leqslant C_1, \qquad t_0\leqslant\tau\leqslant t.$$

Но так как t – произвольное $(>t_0)$ и C_1 не зависит от t, то

$$\|y(t)\|^2\leqslant C_1, \qquad t_0\leqslant t<\infty.$$

Теперь из (13) ясно, что

$$\|A^{-\frac{1}{2}}(t)y'(t)\|^2\leqslant C, \qquad t_0\leqslant t<\infty,$$

где $C=C_0+\frac{\varepsilon_0}{2}C_1$. Что и требовалось доказать.

Следствие. *Пусть $H=E^{(n)}$ – комплексное эвклидово пространство, а $A(t)=\left(a_{ij}(t)\right)_1^n$ и $B(t)=\left(b_{ij}(t)\right)_1^n$ – самосопряженные матрицы с непрерывными на $[0,\ \infty)$ элементами, причем для всех $t\in[0,\ \infty)$ $\det A(t)\neq0$ и $\|B(t)\|=\left(\sum\limits_{i,j=1}^{n}|b_{ij}(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant M<\infty$. Пусть, далее, выполнены условия 3, 5 и 6 теоремы 3. Тогда, если наименьшее собственное значение $\gamma(t)$ матрицы $A(t)$ удовлетворяет условиям: $\gamma(t)\geqslant\gamma_0>0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\gamma(t)=+\infty$, то все решения $y(t)=\{y_1(t),\ \ldots,\ y_n(t)\}$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\frac{d^2y_i(t)}{dt^2}+\sum_{j=1}^{n}[a_{ij}(t)+b_{ij}(t)]\,y_j(t)=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

ограничены при $t\to+\infty$, а для $y'(t)=\{y_1'(t),\ \ldots,\ y_n'(t)\}$ справедлива оценка

$$\|A^{-\frac{1}{2}}(t)y'(t)\|\leqslant C=\text{const}<\infty \qquad (t\geqslant0).$$

Этот результат, насколько нам известно, является новым для случая $n\geqslant2$.

Замечание. Если $A(t)$ и $B(t)$ непрерывные на $[0, \infty)$ скалярные функции, а H — числовая ось, то из теоремы 3 вытекают, как следствие, теоремы 1 и 3 из работы [4].

§ 4. Рассмотрим теперь некоторые примеры.

1. Пусть Ω — ограниченная область n-мерного эвклидова пространства R_n с достаточно гладкой границей Γ. Пусть $H = L_{2,m}(\Omega)$ — пространство вектор-функций $\vec{u}(x) = \{u_1(x), \ldots u_m(x)\}$ $\left(x = (x_1, \ldots x_n)\right)$ со скалярным произведением

$$(\vec{u}\,\vec{v}) = \int\limits_{\Omega} [u_1(x)\bar{v}_1(x) + \ldots + u_m(x)\bar{v}_m(x)]\,dx.$$

Рассмотрим в этом пространстве систему уравнений

$$\frac{\partial^2 u_i}{dt^2} + a_{i1}(t)Lu_1 + a_{i2}(t)Lu_2 + \ldots + a_{im}^{(t)}Lu_m = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

или в матричной форме

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} + A(t)B\vec{u} = 0, \tag{14}$$

где

$$A(t) = \left(a_{ij}(t)\right)_{i,j=1}^{m}, \quad B = (\overbrace{L, L, \ldots, L}^{m \text{ раз}}),$$

$$Lu_i = -\sum_{p,q=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_p} b_{pq}(x)\frac{\partial u_i}{\partial x_q} + b(x)u_i, \tag{15}$$

причем по определению полагаем, что

$$B\vec{u} = \begin{pmatrix} Lu_1 \\ \vdots \\ Lu_m \end{pmatrix}.$$

Предположим, что функции $b_{pq}(x)$, $\frac{\partial b_{pq}(x)}{\partial x_k}$, $b(x)$ измеримы и ограничены в Ω и что выполнены условия

$$b_{pq} = \bar{b}_{qp}, \quad b(x) \geqslant 0, \quad \sum_{p,q=1}^{n} b_{pq}(x)\xi_q\bar{\xi}_p \geqslant \alpha^2 \sum_{p=1}^{n} |\xi_p|^2, \qquad \alpha^2 = \mathrm{const} > 0.$$

Тогда, если в качестве области определения $D(L)$ взять множество $\mathring{W}_2^2(\Omega)$, то, как известно, (см., например, [5]) оператор L, порождаемый выражением (15), будет самосопряженным в $L_2(\Omega)$ и положительно-определенным на $D(L)$. Очевидно тогда, что и оператор B будет самосопряженным и положительно определенным на $\mathring{W}_{2,m}^2(\Omega)$.

Пусть элементы матрицы $A(t)$ непрерывны на $[0, \infty)$ и удовлетворяют условиям

$$a_{ij}(t) = \bar{a}_{ji}(t), \quad \overset{x}{\underset{a}{V}} A(t) = \int\limits_a^x \left(\sum_{i,j=1}^{m} |da_{ij}(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \qquad (a \geqslant 0).$$

Пусть $\gamma(t)$ наименьшее собственное значение матрицы $A(t)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\gamma(t)=\gamma_0>0$. Тогда, в силу теоремы 1 $\big($см. оценки (*), (**) и (***)$\big)$ для любого решения уравнения (14), удовлетворяющего условиям

$$\vec{u}(t,\ x)|_{x\in\Gamma}=0, \qquad (t\geqslant 0),$$

$$\vec{u}(0,\ x)=\vec{\varphi}(x)\in\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\,m}(\Omega),\quad \vec{u}'_t(0,\ x)=\vec{\psi}(x)\in L_{2,\,m}(\Omega)$$

будут справедливы оценки

$$\|\vec{u}(t,\ x)\|^2_{L_2,\,m(\Omega)}=\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^m|u_i(t,\ x)|^2\,dx\leqslant C_1,$$

$$\|\vec{u}'_t(t,\ x)\|^2_{L_2,\,m(\Omega)}\leqslant C_2,$$

$$\left\|\frac{\partial\vec{u}(t,\ x)}{\partial x_p}\right\|_{L_2,\,m(\Omega)}\leqslant C_3 \qquad (p=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

для всех $t\geqslant t_0\geqslant 0$, где C_1, C_2, C_3 – положительные постоянные. Последняя оценка непосредственно получается из неравенства (*).

2. Пусть $H=L_2(R_n)$. Рассмотрим следующую задачу Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a(t)\Big(-\Delta u+b(x)\,u\Big)=0, \tag{16}$$

$$u(0,\ x)=\varphi(x),\quad u'_t(0,\ x)=\psi(x). \tag{17}$$

Пусть $b(x)$ измеримая и ограниченная функция, причем

$$0<m\leqslant b(x)\leqslant M,\quad x\in R_n.$$

Тогда можно показать, что оператор $B=-\Delta+b(x)$ будет самосопряженным и положительно определенным на $D(B)=W^2_2(R_n)$ (см., например, [7], стр. 573).

Пусть $a(t)$ – непрерывная, положительная на $[0,\ \infty)$ функция такая, что $\lim\limits_{t\to+\infty}a(t)=a_0>0$ и $\overset{\infty}{\underset{t_0}{V}}a(t)<\infty$ $(t_0\geqslant 0)$. Тогда в силу теоремы 1 решение $u(t,\ x)$ задачи (16)–(17) $\big(\varphi(x)\in W^1_2(R_n)\big)$ ограничено вместе с $u'_t(t,\ x)$, $u'_{x_k}(t,\ x)$ в норме $L_2(R_n)$ при $t\to+\infty$.

Можно также вместо одного уравнения (15) рассмотреть в пространстве $L_{2,\,m}(R_n)$ систему

$$\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}+A(t)\Big(-\Delta\vec{u}+b(x)\,\vec{u}\Big)=0,$$

где $A(t)$ – матрица $m\times m$.

3. Пусть $H=L_2(\Omega)$, где Ω – ограниченная область пространства R_n с достаточно гладкой границей Γ. Рассмотрим следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+L(t)\,u=b(t,\ x)\,u+\int\limits_\Omega K(t,\ x,\ y)\,u(t,\ y)\,dy, \tag{18}$$

где

$$L(t)u=-\sum_{i,\,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}(t,\ x)\frac{\partial}{\partial x_j}+a(t,\ x)\,u.$$

Из теорем 2 и 3 можно получить условия ограниченности решений уравнения (18) при $t \to +\infty$.

В заключение приношу глубокую благодарность проф. В. В. Немыцкому за постановку задачи и внимание к работе.

Московский Государственный
Университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
13.IV.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Borg, Arkiv för Mat., Astr., Fys., Band 34B, N24, 1—7 (1948).
2. М. М. Вайнберг, Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М., 1956.
3. Р. С. Гусарова, Канд. диссертация, МГУ, 1952.
4. Л. И. Камынин, Вестник МГУ, сер. физ.-мат., № 5, 3, 3—12 (1951).
5. О. А. Ладыженская, Мат. сб., т. 45(87), № 2, 124—158 (1958).
6. Э. Хилле, Р. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, М., 1962.
7. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. V, М., 1959.
8. Р. Беллман, Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1954.

APIE HILBERTO ERDVĖJE TIESINĖS ANTROS EILĖS HOMOGENINĖS LYGTIES SPRENDINIŲ APRĖŽTUMĄ

K. S. MAMIJ

(Reziumė)

Darbe įrodomos kai kurios teoremos apie visų lygties

$$y''(t)+A(t)y'(t)+B(t)y(t)=0$$

sprendinių aprėžtumą, kai $t \to +\infty$, kompleksinėje Hilberto erdvėje. Duodami gautų rezultatų pritaikymai antros eilės hiperbolinių lygčių sistemoms ir kai kurioms integro-diferencialinėms lygtims.

ON LIMITATIONS OF SOLUTIONS OF A LINEAR UNIFORM SECOND-ORDER EQUATION IN GILBERT SPACE

K. MAMIJ

(Summary)

In the present paper are proved some theorems on limitations of all solutions of the equation

$$y''(t)+A(t)y'(t)+B(t)y(t)=0$$

in the complex Gilbert space for $t \to +\infty$. It has been given some applications of the obtained results to the hyperbolic second-order equation systems and also to some integral-differential equations.