V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1965

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ЭРМИТА

А. Г. НАФТАЛЕВИЧ

1. В настоящей работе изучаются мероморфные решения двойной системы разностных уравнений

$$\begin{cases} L[f(z)] = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k f(z+\alpha_k) = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_m \neq 0, \quad \alpha_1 = 0, \\ M[f(z)] = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i f(z+\beta_i) = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_n \neq 0, \quad \beta_1 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где a_k, α_k и b_i, β_i, $k=1, 2, \ldots, m$; $i=1, 2, \ldots, n$ — заданные комплексные числа. Мы предполагаем, что $\alpha_k = t_k \alpha$, $\beta_k = \tau_k \beta$, где $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_m = 1$, $0 = \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n = 1$ и $\operatorname{Im}(\alpha : \beta) \neq 0$. Таким образом, все точки α_k лежат на отрезке, соединяющем точки $z=0$ и $z=\alpha$, а все точки β_k — на отрезке (не коллинеарном с первым), соединяющем точки $z=0$ и $z=\beta$. Полузамкнутый параллелограмм Π,

$$\Pi : z = u\alpha + v\beta, \quad 0 \leqslant u < 1, \quad 0 \leqslant v < 1,$$

назовем **ф у н д а м е н т а л ь н ы м п а р а л л е л о г р а м м о м** системы (1).

В частном случае $m=n=2$ систему (1) можно записать в виде

$$\begin{cases} f(z+\alpha) = \lambda f(z), \\ f(z+\beta) = \mu f(z), \end{cases} \tag{2}$$

где λ и μ — неравные нулю комплексные числа. Мероморфные решения системы (2) названы Эрмитом (см. [5], гл. 11) э л л и п т и ч е с к и м и ф у н к ц и я м и в т о р о г о р о д а, а числа λ и μ — м н о ж и т е л я м и этих функций. Заметим еще, что параллелограмм Π является фундаментальным и для системы (2).

В исследованиях Эрмита по эллиптическим функциям второго рода содержится и такая теорема:

Если

$$\alpha \ln \mu \neq \beta \ln \lambda, \tag{3}$$

то существует единственная эллиптическая функция второго рода с множителями λ и μ, имеющая в фундаментальном параллелограмме Π заранее (произвольно) заданные полюсы и главные части.

Эта теорема переносится и на мероморфные решения системы (1).

Теорема 1. *Если характеристические функции системы* (1)

$$L(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k e^{\alpha_k t}, \quad M(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i e^{\beta_i t}$$

не имеют общих нулей, то существует единственное мероморфное решение системы (1), *имеющее в фундаментальном параллелограмме* П *заранее (произвольно) заданные полюсы и главные части.*

В случае системы (2) характеристические функции $L(t)$ и $M(t)$ имеют вид
$$L(t)=e^{\alpha t}-\lambda, \quad M(t)=e^{\beta t}-\mu.$$
В этом случае функция $L(t)$ имеет нули в точках $t=\ln\lambda:\alpha$, а функция $M(t)$ — в точках $t=\ln\mu:\beta$. Таким образом, условие отсутствия общих нулей у функций $L(t)$ и $M(t)$ эквивалентно условию (3).

Замечание. Характеристические функции системы (1) мы обозначили теми же буквами L и M, что и разностные операторы, входящие в систему (1). Такой способ обозначения оказывается полезным в дальнейшем изложении. Кроме того, он оправдан еще тем, что множество пар характеристических функций $L(t)$ и $M(t)$ взаимно однозначно соответствует множеству пар разностных операторов $L[f(z)]$ и $M[f(z)]$.

2. В следующей теореме рассматривается случай, когда характеристические функции $L(t)$ и $M(t)$ имеют общие нули. Предварительно условимся о следующем:

а) число μ является нулем кратности k пары функций $L(t)$ и $M(t)$, если
$$L(t)=(t-\mu)^l[c_l+c_{l+1}(t-\mu)+\cdots],\ c_l\neq 0,\ l>0,$$
$$M(t)=(t-\mu)^p[d_p+d_{p+1}(t-\mu)+\cdots],\ d_p\neq 0,\ p>0,$$
и
$$k=\min(l,\ p).$$

б) пусть $\gamma\in\Pi$ и $\gamma=u\alpha+v\beta$, $t_k\leqslant u<t_{k+1}$, $\tau_l\leqslant v<\tau_{l+1}$ (другими словами, γ лежит в полузамкнутом параллелограмме с вершинами $\alpha_k+\beta_l$, $\alpha_{k+1}+\beta_l$, $\alpha_{k+1}+\beta_{l+1}$, $\alpha_k+\beta_{l+1}$). Через $N_\gamma(t)$ обозначим функцию
$$N_\gamma(t)=e^{-\gamma t}L_\gamma(t)M_\gamma(t), \tag{4}$$
где
$$L_\gamma(t)=\sum_{i=1}^{k}a_ie^{\alpha_it}, \quad M_\gamma(t)=\sum_{j=1}^{l}b_je^{\beta_jt}. \tag{5}$$
Заметим, что $L_\gamma(t)$ и $M_\gamma(t)$ — частичные суммы от $L(t)$ и $M(t)$. Число слагаемых в $L_\gamma(t)$ и $M_\gamma(t)$ определено положением точки γ в параллелограмме П.

Теорема 2. *Пусть*
$$R(z,\ \gamma_k)=\sum_{i=1}^{s_k}\frac{c_{ki}}{(z-\gamma_k)^i},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ l, - \tag{6}$$
произвольно заданные рациональные функции, полюсы которых лежат в фундаментальном параллелограмме П. *Для того, чтобы существовало мероморфное решение системы* (1), *имеющее в* П *полюсы в точках* γ_k (*и только в них*) *с главными частями* $R(z,\ \gamma_k)$, *необходимо и достаточно, чтобы каждый нуль пары характеристических функций* $L(t)$ *и* $M(t)$ *являлся и нулем (с учетом его кратности) функции*
$$R(t)=\sum_{k=1}^{l}N_{\gamma_k}(t)\sum_{i=1}^{s_k}(-1)^{i-1}\frac{c_{ki}}{(i-1)!}t^{i-1}. \tag{7}$$

Применим эту теорему к системе

$$\begin{cases} f(z)-f(z+\alpha)=0, \\ f(z)-f(z+\beta)=0, \end{cases} \tag{8}$$

определяющей эллиптические функции с периодами α и β. Характеристическими для системы (8) являются функции

$$L(t)=1-e^{\alpha t}, \quad M(t)=1-e^{\beta t}.$$

Эти функции имеют лишь один простой общий нуль в точке $t=0$. Кроме того, если $\gamma\in\Pi$, то $L_\gamma(t)=M_\gamma(t)=1$, $N_\gamma(t)=\exp(-\gamma t)$ и

$$R(0)=\sum_{k=1}^{s} c_{k1}.$$

Следовательно, $R(0)$ равно сумме вычетов главных частей (6). Таким образом, из теоремы 2 следует хорошо известный результат об эллиптических функциях:

Для того чтобы существовала эллиптическая функция, имеющая в фундаментальном параллелограмме Π главные части $R(z, \gamma_k)$, необходимо и достаточно, чтобы сумма вычетов главных частей $R(z, \gamma_k)$ была равна нулю.

3. Если $f_0(z)$ – эллиптическая функция, имеющая в фундаментальном параллелограмме Π главные части $R(z, \gamma_k)$, то всевозможные эллиптические функции, имеющие в Π главные части $R(z, \gamma_k)$, выражаются в виде $f(z)=f_0(z)+C$, где C – произвольная постоянная. Этот результат переносится и на мероморфные решения системы (1). Для этого обозначим нули пары характеристикических функций $L(t)$ и $M(t)$ (таких нулей имеется только конечное множество*) через $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ и через $k_1, k_2, \ldots, k_p$ кратности этих нулей.

Теорема 3. *Если $f_0(z)$ – мероморфное решение системы (1), имеющее в фундаментальном параллелограмме Π главные части $R(z, \gamma_k)$, то всевозможные мероморфные решения $f(z)$ системы (1), имеющие эти же главные части $R(z, \gamma_k)$, выражаются в виде*

$$f(z)=f_0(z)+u(z),$$

где $u(z)$ – произвольное решение дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\prod_{i=1}^{p}(D-\mu_i)^{k_i}u(z)=0 \quad \left(Du(z)=\frac{du}{dz}\right). \tag{9}$$

---

*) В полуплоскости $\mathrm{Re}(\alpha t)>A$ имеем $L(t)=a_m\exp(\alpha t)\left(1+\varepsilon(t)\right)$, где $\varepsilon(t)\to 0$ при $A\to\infty$. Поэтому $L(t)$ не имеет нулей в полуплоскости $\mathrm{Re}(\alpha t)>A_0$, где A_0 – достаточно большое число. Точно также показываем, что $L(t)$ не имеет нулей и в полуплоскости $\mathrm{Re}(\alpha t)<-A_0$, а $M(t)$ – в полуплоскостях $\mathrm{Re}(\beta t)>A_0$ и $\mathrm{Re}(\beta t)<-A_0$. Таким образом, множество всех общих нулей функций $L(t)$ и $M(t)$ ограничено, а поэтому и конечно.

§ 1. Функции класса K, их полюсы и главные части

1. Если $g(z)$ — целая функция, то, очевидно, и функции

$$L[g(z)] = \sum_{k=1}^{m} a_k g(z+\alpha_k), \quad M[g(z)] = \sum_{i=1}^{n} b_i g(z+\beta_i) \tag{1.1}$$

являются целыми. Но, возможно, что функции (1.1) будут целыми, хотя сама функция $g(z)$ является мероморфной. Класс всех таких мероморфных функций $g(z)$, для которых функции (1.1) оказываются целыми, обозначим через K. Этот класс является линейным пространством над полем комплексных чисел: если $g_i(z) \in K$, $i=1, 2, \ldots, k$, то и $c_1 g_1(z) + c_2 g_2(z) + \cdots + c_k g_k(z) \in K$, где c_i — произвольные комплексные числа. Если $g(z) \in K$, то и $g'(z) \in K$. Классу K принадлежат все целые функции.

В следующих леммах займемся построением функций $g(z)$ из класса K, имеющих в фундаментальном параллелограмме Π заданные полюсы и главные части.

2. **Лемма 1.** *Пусть $g(z) \in K$. Если $g(z)$ регулярна в параллелограмме* Π, *то $g(z)$ — целая функция.*

Доказательство. По условию $g(z) \in K$. Поэтому

$$L[g(z)] = \sum_{k=1}^{m} a_k g(z+\alpha_k) = g_1(z), \tag{2.1}$$

где $g_1(z)$ — целая функция. Покажем, что функция $g(z)$ не имеет полюсов в полосе $z = u\alpha + v\beta$, $-\infty < u < \infty$, $0 \leqslant v < 1$. Эту полосу обозначим через P. Предположим противное. Тогда функция $g(z)$ имеет полюс хотя бы в одной из полуполос P_1 и P_2, определяемых равенствами:

$$P_1 : z = u\alpha + v\beta, \quad P_2 : z = w\alpha + v\beta,$$
$$1 \leqslant u < \infty, \quad 0 \leqslant v < 1, \quad -\infty < w < 0.$$

Для определенности предположим, что функция $g(z)$ имеет полюсы в полуполосе P_1, и через $\gamma + \alpha_m$ обозначим ближайший из этих полюсов до прямой $z = \alpha + t\beta$, $-\infty < t < \infty$. Из (2.1) следует

$$g(\gamma+\alpha_m) = -\frac{a_1}{a_m} g(\gamma+\alpha_1) - \frac{a_2}{a_m} g(\gamma+\alpha_2) - \cdots - \frac{a_{m-1}}{a_m} g(\gamma+\alpha_{m-1}) + g_1(\gamma). \tag{3.1}$$

Из способа выбора полюса $\gamma + \alpha_m$ и из предположения о регулярности функции $g(z)$ в параллелограмме Π следует, что функция $g(z)$ регулярна в точках $\gamma+\alpha_1$, $\gamma+\alpha_2, \ldots, \gamma+\alpha_{m-1}$. Припомним еще, что и функция $g_1(z)$ регулярна в точке γ. Из (3.1) следует, что функция $g(z)$ регулярна в точке $\gamma+\alpha_m$. Но это противоречит нашему допущению. Таким образом, функция $g(z)$ регулярна в полосе P. Что функция $g(z)$ регулярна и в других точках плоскости, показываем таким же образом, пользуясь при этом тем, что и функция $M[g(z)]$ является целой.

Лемма 2. *Функция из класса K определена однозначно с точностью до произвольного целого слагаемого, если заданы все лежащие в фундаментальном параллелограмме* Π *полюсы этой функции и соответствующие этим полюсам главные части.*

В самом деле, если $g_1(z)$ и $g_2(z)$ принадлежат классу K и имеют в фундаментальном параллелограмме П одинаковые полюсы и одинаковые главные части, то функция $C(z)=g_1(z)=g_2(z)$ принадлежит классу K и она регулярна в П. По лемме 1 функция $C(z)$ является целой.

3. Пользуясь леммой 2 и одним результатом А. О. Гельфонда, легко доказать теорему 3 (стр. 607). Пусть $f_0(z)$ и $f(z)$ решения системы (1), имеющие в П полюсы γ_i и главные части $R(z, \gamma_i)$. Очевидно $f_0(z)\in K$ и $f(z)\in K$. По лемме 2 функция $u(z)=f(z)-f_0(z)$ является целой. Очевидно, что $u(z)$ — решение системы (1). Как показал А. О. Гельфонд, (см. [1] стр. 464—467), функция $u(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (9), что и требовалось доказать в теореме 3.

Замечание. Если характеристические функции $L(t)$ и $M(t)$ не имеют общих нулей, то $u(z)\equiv 0$. Следовательно, в этом случае система (1) имеет не более одного решения с заданными в П полюсами и главными частями. Таким образом, мы доказали содержащееся в теореме 1 утверждение об единственности решения с заданными в П полюсами и главными частями.

4. Обратимся к вопросу о существовании функции класса K, имеющей в П заданные полюсы и главные части. Сначала займемся построением функции $g(z)$ класса K, имеющей в П единственный простой полюс в точке $z=0$ с вычетом равным единице. Для построения функции $g(z)$ пользуемся методом, суть которого изложена в следующем пункте.

5. Рассмотрим одно неоднородное разностное уравнение

$$L[f(z)]=\sum_{k=1}^{m} a_k f(z+\alpha_k)=\varphi(z), \quad a_1=1, \quad a_m\neq 0,$$

$$\alpha_k=t_k\alpha, \quad 0=t_1<t_2<\cdots<t_m, \tag{4.1}$$

где $\varphi(z)$ — мероморфная функция. Методы для построения мероморфных решений этого уравнения имеются в [7] и [2]. Но здесь нам удобно подходить к этому вопросу несколько другим путем. При этом, как в предыдущих пунктах нас будет интересовать не решение этого уравнения, а построение такой мероморфной функции $g(z)$, для которой $L[g(z)]-\varphi(z)$ является целой функцией.

Функцию $f(z+\gamma)$ разложим в формальный ряд Тейлора

$$f(z+\gamma)=f(z)+\frac{\gamma}{1!}f'(z)+\frac{\gamma^2}{2!}f''(z)+\cdots.$$

Обозначим через D оператор дифференцирования $\left(Df(z)=f'(z)\right)$ и предыдущее разложение запишем в виде

$$f(z+\gamma)=\left(1+\frac{\gamma}{1!}D+\frac{\gamma^2}{2!}D^2+\cdots\right)f(z)=e^{\gamma D}f(z).$$

Оператор $L[f(z)]$ можно записать в виде $L(D)f(z)$, где

$$L(D)=\sum_{k=1}^{m} a_k e^{\alpha_k D}, \tag{5.1}$$

и уравнение (4.1) — в виде

$$L(D)f(z)=\varphi(z). \tag{6.1}$$

Заметим, что характеристическая функция $L(t)$ получается из оператора $L(D)$ заменой D на t.

Между операторами $L(D)$ и $L[f(z)]$ имеется взаимно однозначное соответствие. При этом, если $L(D)$ и $M(D)$ соответствуют операторам $L[f(z)]$ и $M[f(z)]$, то $c_1 L(D)+c_2 M(D)$ соответствует оператору $c_1 L[f(z)]+c_2 M[f(z)]$ (при любых комплексных постоянных c_1 и c_2) и $L(D)\,M(D)$ соответствует оператору $L\Big[M[f(z)]\Big]\equiv M\Big[L[f(z)]\Big]$.

Решение уравнения (6.1) можно формально записать в виде

$$f(z)=L^{-1}(D)\,\varphi(z).$$

Смысл оператору $L^{-1}(D)$ придадим раскладывая его в ряд Дирихле

$$L^{-1}(D)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{\delta_k D}=L^*(D). \tag{7.1}$$

Функция

$$L^*(D)\,\varphi(z)=L^*[\varphi(z)]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\varphi(z+\delta_k) \tag{8.1}$$

является формальным решением уравнения (6.1). В самом деле

$$L\Big[L^*[\varphi(z)]\Big]=L(D)\,L^*(D)\,\varphi(z)=\varphi(z).$$

Этот метод решения разностного уравнения (4.1) в действительной области был разработан Бохнером в работе [6] и затем использован Мартином в работе [9] для решения уравнения (4.1) в комплексной области. Заметим, что в этих работах не вводится оператор $L(D)$ и вместо разложения (7.1) рассматривается эквивалентное разложение функции $1:L(t)$ ($L(t)$ — характеристическая функция)

$$1:L(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{\delta_k t}=L^*(t). \tag{9.1}$$

Бохнер показал, что в некоторой открытой области O на прямой t функция $1:L(t)$ является почти периодической и поэтому каждому составляющему интервалу этого множества O соответствует разложение вида (9.1) функции $1:L(t)$ (коэффициенты c_k и показатели δ_k разложений (9.1) зависят от рассматриваемого интервала). Соответствующие ряды

$$L^*[\varphi(z)]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\varphi(z+\delta_k)$$

дают при некоторых предположениях о функции $\varphi(z)$ решения уравнения (4.1), обладающие замечательными свойствами.

Здесь мы используем только два простейших разложения оператора $L^{-1}(D)$. Чтобы получить эти разложения, $L(D)$ представим в виде

$$L(D)=a_1\, e^{\alpha_1 D}\,[1-l_1(D)],\quad a_1=1,\ \alpha_1=0, \tag{10.1}$$

и

$$L(D)=a_m e^{\alpha_m D}[1-l_2(D)], \tag{11.1}$$

где

$$l_1(D)=-\sum_{k=2}^{m}\frac{a_k}{a_1}e^{(\alpha_k-\alpha_1)D}, \tag{12.1}$$

$$l_2(D)=-\sum_{k=1}^{m-1}\frac{a_k}{a_m}e^{(\alpha_k-\alpha_m)D}. \tag{13.1}$$

Мы получим

$$L^{-1}(D)=\frac{1}{a_1 e^{\alpha_1 D}\left(1-l_1(D)\right)}=\frac{1}{a_1}e^{-\alpha_1 D}\left(1+l_1(D)+l_1^2(D)+\cdots\right)=L_1(D), \tag{14.1}$$

$$L^{-1}(D)=\frac{1}{a_m e^{\alpha_m D}\left(1-l_2(D)\right)}=\frac{1}{a_m}e^{-\alpha_m D}\left(1+l_2(D)+l_2^2(D)+\cdots\right)=L_2(D). \tag{15.1}$$

Пользуясь (12.1) и (13.1), легко усмотреть, что

$$L_1(D)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n^1 e^{\delta_n^1 D},\quad L_2(D)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2 e^{\delta_n^2 D} \tag{16.1}$$

где c_n^1, c_n^2, δ_n^1, δ_n^2 — комплексные числа. При этом, числа δ_n^1 и δ_n^2 имеют вид

$$\delta_n^1=-\alpha_1+k_1(\alpha_{n_1}-\alpha_1)+k_2(\alpha_{n_2}-\alpha_1)+\cdots+k_s(\alpha_{n_s}-\alpha_1), \tag{17.1}$$

$$\delta_n^2=-\alpha_m+k_1(\alpha_{m_1}-\alpha_m)+k_2(\alpha_{m_2}-\alpha_m)+\cdots+k_s(\alpha_{m_s}-\alpha_m), \tag{18.1}$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_s$ — неотрицательные целые числа, а $n_1, n_2, \ldots, n_s = 2, 3, \ldots, m$ и $m_1, m_2, \ldots, m_s = 1, 2, \ldots, m-1$. Таким образом, все точки δ_n^1 находятся на полупрямой $z=-\alpha_1+t\alpha$, $0\leqslant t<\infty$, а все точки δ_n^2 — на полупрямой $z=-\alpha_m-t\alpha$, $0\leqslant t<\infty$. Кроме того,

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n^1=\lim_{n\to\infty}\delta_n^2=\infty. \tag{19.1}$$

Рассмотрим теперь ряд

$$L_1(D)\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n^1\varphi(z+\delta_n^1). \tag{20.1}$$

Если γ — полюс функции $\varphi(z)$, то слагаемые этого ряда имеют полюсы $\gamma-\delta_n^1$, $n=1, 2, 3, \ldots$ Таким образом, множество M_1 полюсов всех слагаемых ряда (20.1) может иметь точки сгущения и в конечной плоскости. Но если все полюсы функции $\varphi(z)$ лежат в полуплоскости $z=-u\alpha+v\beta$, $0<u<\infty$, $-\infty<v<\infty$, то множество M_1 лежит в этой же полуплоскости (напомним, что $\alpha_1=0$, $\alpha_m=\alpha$) и имеет единственную предельную точку в бесконечности. Точно также множество M_2 полюсов всех слагаемых ряда

$$L_2(D)\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2\varphi(z+\delta_n^2)$$

лежит в полуплоскости $z=u\alpha+v\beta$, $1\leqslant u<\infty$, $-\infty<v<\infty$, и имеет единственную предельную точку в бесконечности, если все полюсы функции $\varphi(z)$ лежат в полуплоскости $z=u\alpha+v\beta$, $0\leqslant u<\infty$, $-\infty<v<\infty$.

Это замечание приводит нас к следующему приему: функция $\varphi(z)$ представляется в виде суммы*

$$\varphi(z)=\varphi_1(z)+\varphi_2(z),$$

где мероморфная функция $\varphi_1(z)$ имеет все свои полюсы в полуплоскости $z=-u\alpha+v\beta$, $0<u<\infty$, $-\infty<v<\infty$, а функция $\varphi_2(z)$ — в полуплоскости $z=u\alpha+v\beta$, $0\leqslant u<\infty$, $-\infty<v<\infty$. Сумма рядов

$$f(z)=L_1(D)\varphi_1(z)+L_2(D)\varphi_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n^1\varphi_1(z+\delta_n^1)+\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2\varphi_2(z+\delta_n^2) \quad (21.1)$$

представляет формальное решение уравнения (4.1). Далее находим полюсы и соответствующие главные части всех слагаемых обеих рядов (21.1) и, пользуясь теоремой Миттаг—Леффлера построим мероморфную функцию $g(z)$, имеющую упомянутые полюсы и главные части. Эта функция не имеет полюсов в полосе $z=u\alpha+v\beta$, $0\leqslant u<1$, $-\infty<v<\infty$.

Можно показать, что функция $g(z)$ дает решение рассматриваемого нами вопроса, а именно $L[g(z)]-\varphi(z)$ является целой функцией. Но, чтобы избежать повторений, мы здесь это доказательство опустим, так как доказательство такого же утверждения будет несколько дальше проведено для случая системы (1).

6. Применим изложенный выше метод в частном случае

$$\varphi(z)=-L(D)\frac{1}{z}=[-1+l_1(D)]\frac{1}{z}=-\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{z+\alpha_k}.$$

В этом случае $\varphi_1(z)=l_1(D)(1:z)$ и $\varphi_2(z)=-1:z$. Ряд (21.1) принимает вид

$$f(z)=[l_1(D)L_1(D)-L_2(D)]\frac{1}{z}. \quad (22.1)$$

Он является формальным решением уравнения

$$L(D)f(z)=-L(D)\frac{1}{z} \quad (23.1)$$

и его полюсы (т. е. полюсы слагаемых ряда (22.1)) лежат вне полосы $z=u\alpha+v\beta$, $0\leqslant u<1$, $-\infty<v<\infty$.

Уравнение (23.1) можно переписать в виде

$$L(D)\left(f(z)+\frac{1}{z}\right)=0.$$

Следовательно, ряд

$$g(z)=[1+l_1(D)L_1(D)-L_2(D)]\frac{1}{z} \quad (24.1)$$

является формальным решением уравнения

$$L(D)g(z)=0. \quad (25.1)$$

Это формальное решение имеет в полосе $z=u\alpha+v\beta$, $0\leqslant u<1$, $-\infty<v<\infty$, единственный простой полюс в точке $z=0$ с вычетом, равным единице.

* Такое представление функции $\varphi(z)$ Гурвиц [8] применил для решения разностного уравнения $f(z+\alpha)-f(z)=\varphi(z)$.

7. Вернемся к двойной системе

$$\begin{cases} L[f(z)] = L(D) f(z) = 0, \\ M[f(z)] = M(D) f(z) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Исходя из оператора $L(D)$ мы в пункте 5 ввели операторы $l_1(D)$, $l_2(D)$, $L_1(D)$ и $L_2(D)$. Точно также, исходя из оператора $M(D)$ введем операторы

$$m_1(D) = -\sum_{k=2}^{n} \frac{b_k}{b_1} e^{(\beta_k-\beta_1)D}, \quad m_2(D) = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{b_n} e^{(\beta_k-\beta_n)D}, \tag{26.1}$$

$$M_1(D) = \frac{e^{-\beta_1 D}}{b_1}\left(1 + m_1(D) + m_1^2(D) + \cdots\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k^1 e^{\chi_k^1 D},$$

$$M_2(D) = \frac{e^{-\beta_n D}}{b_n}\left(1 + m_2(D) + m_2^2(D) + \cdots\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k^2 e^{\chi_k^2 D}.$$

Эти операторы удовлетворяют соотношениям

$$1 - m_1(D) = b_n e^{-\beta_n D}\Big(1 - m_2(D)\Big) = M(D),$$

$$M(D)\, M_1(D) = M(D)\, M_2(D) = 1. \tag{27.1}$$

Показатели χ_k^1 и χ_k^2, входящие в рядах (26.1), имеют вид

$$\chi_k^1 = -\beta_1 + k_1(\beta_{n_1} - \beta_1) + k_2(\beta_{n_2} - \beta_1) + \cdots + k_s(\beta_{n_s} - \beta_1),$$

$$\chi_k^2 = -\beta_n + k_1(\beta_{m_1} - \beta_n) + k_2(\beta_{m_2} - \beta_n) + \cdots + k_s(\beta_{m_s} - \beta_n),$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_s$ — целые неотрицательные числа, $n_1, n_2, \ldots, n_s = 2, 3, \ldots, n$ и $m_1, m_2, \ldots, m_s = 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Таким образом, все точки χ_k^1 лежат на полупрямой $z = t\beta$, $0 \leqslant t < \infty$, а все точки χ_k^2 на полупрямой $z = -(t+1)\beta$, $0 \leqslant t < \infty$.

Пользуясь соотношениями (27.1), легко проверить, что

$$M(D)\,[1 + m_1(D)\, M_1(D) - M_2(D)] = 0.$$

Точно также,

$$L(D)\,[1 + l_1(D)\, L_1(D) - L_2(D)] = 0.$$

Таким образом, ряд

$$g(z) = P(D)\,\frac{1}{z}, \tag{28.1}$$

где

$$P(D) = [1 + l_1(D)\, L_1(D) - L_2(D)]\;[1 + m_1(D)\, M_1(D) - M_2(D)] \tag{29.1}$$

является формальным решением системы (1).

В (29.1) вместо $l_1(D)$, $m_1(D)$, $L_i(D)$ и $M_i(D)$, $i = 1, 2$, подставим их выражения (12.1), (14.1), (15.1) и (26.1). Проделав формальные действия над полученным выражением, мы оператор $P(D)$ представим рядом Дирихле

$$P(D) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k e^{\nu_k D},$$

где коэффициенты P_k — некоторые комплексные числа, а любой показатель ν_k равен одному из чисел вида δ_s^i, χ_s^i или $\delta_s^i+\chi_t^j$, $i, j=1, 2$; $s, t=1, 2, 3, \ldots$

Функция $g(z)$ (см. (28.1)) представима, поэтому, формальным рядом

$$g(z)=P(D)\ \frac{1}{z}=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_k}{z+\nu_k}.$$

Из сказанного выше о расположении точек δ_s^i, χ_s^i, $i=1, 2$; $s=1, 2, 3, \ldots$, следует, что $g(z)$ имеет в фундаментальном параллелограмме Π единственный простой полюс в точке $z=0$ с вычетом, равным единице. Кроме того, множество полюсов $\{-\nu_k\}$ ряда $g(z)$ имеет единственную предельную точку в бесконечности.

Рассмотрим теперь мероморфную функцию $h(z)$, имеющую те же полюсы и главные части, что и формальный ряд (28.1). Существование такой функции следует из теоремы Миттаг—Леффлера. Покажем, что функция $h(z)$ принадлежит классу K, т. е., что $L[h(z)]$ и $M[h(z)]$ — целые функции. Для этого операторы $L_1(D)$, $L_2(D)$, $M_1(D)$ и $M_2(D)$ (см. (14.1), (15.1), и (26.1)) представим в виде

$$\left.\begin{aligned} L_i(D)&=L_{ik}(D)+\lambda_{ik}(D),\\ M_i(D)&=M_{ik}(D)+\mu_{ik}(D), \quad i=1,\ 2, \end{aligned}\right\} \tag{30.1}$$

где

$$\left.\begin{aligned} L_{1k}(D)&=\frac{e^{-\alpha_1 D}}{a_1}\left(1+l_1(D)+l_1^2(D)+\cdots+l_1^{k-1}(D)\right),\\ L_{2k}(D)&=\frac{e^{\alpha_m D}}{a_m}\left(1+l_2(D)+l_2^2(D)+\cdots+l_2^k(D)\right),\\ M_{1k}(D)&=\frac{e^{-\beta_1 D}}{b_1}\left(1+m_1(D)+m_1^2(D)+\cdots+m_1^{k-1}(D)\right),\\ M_{2k}(D)&=\frac{e^{\beta_n D}}{b_n}\left(1+m_2(D)+m_2^2(D)+\cdots+m_2^k(D)\right), \end{aligned}\right| \tag{31.1}$$

а $\lambda_{ik}(D)$, $\mu_{ik}(D)$ — соответствующие остатки рядов $L_i(D)$ и $M_i(D)$, $i=1, 2$. Далее оператор $P(D)$ (см. (29.1)) запишем в виде

$$P(D)=P_k(D)+\Theta_k(D), \tag{32.1}$$

где

$$P_k(D)=[1+l_1(D)\,L_{1k}(D)-L_{2k}(D)]\,[1+m_1(D)\,M_{1k}(D)-M_{2k}(D)] \tag{33.1}$$

и $\Theta_k(D)=P(D)-P_k(D)$. Заметим, что (см. (10.1), (11.1) (31.1)),

$$L(D)\,l_1(D)\,L_{1k}(D)=\left(1-l_1(D)\right)l_1(D)\,[1+l_1(D)+l_1^2(D)+\cdots+l_1^{k-1}(D)]=$$
$$=l_1(D)-l_1^{k+1}(D),$$

$$L(D)\,L_{2k}(D)=\left(1-l_2(D)\right)[1+l_2(D)+l_2^2(D)+\cdots+l_2^k(D)]=1-l_2^{k+1}(D).$$

Отсюда и из (33.1) следует

$$L(D)\,P_k(D)=[l_2^{k+1}(D)-l_1^{k+1}(D)]\,[1+m_1(D)\,M_{1k}(D)-M_{2k}(D)]. \tag{34.1}$$

Точно также доказываем, что

$$M(D)\,P_k(D)=[m_2^{k+1}(D)-m_1^{k+1}(D)]\,[1+l_1(D)\,L_{1k}(D)-L_{2k}(D)]. \qquad (35.1)$$

Функцию $h(z)$ (напомним, что $h(z)$ — мероморфная функция, имеющая те же полюсы и те же главные части, что и формальный ряд (28.1)) представим в виде $h(z)=h_k(z)+g_k(z)$, где $h_k(z)$ — рациональная функция

$$h_k(z)=P_k(D)\,\frac{1}{z} \qquad (36.1)$$

и $g_k(z)=h(z)-h_k(z)$ — мероморфная функция, имеющая такие же полюсы и главные части, что и формальный ряд $\Theta_k(D)\,(1:z)$. Нетрудно усмотреть, что полюсы функции $g_k(z)$ лежат как угодно далеко от начала координат, если только k — достаточно большое число.

Пусть R — произвольно зафиксированное положительное число. Рассмотрим функцию

$$L(D)\,h(z)=L(D)\,h_k(z)+L(D)\,g_k(z).$$

Из (34.1) и (36.1) следует

$$L(D)\,h(z)=[l_2^{k+1}(D)-l_1^{k+1}(D)]\,[1+m_1(D)M_{1k}(D)-M_{2k}(D)]\,\frac{1}{z}+L(D)g_k(z). \quad (37.1)$$

Точно также имеем

$$M(D)\,h(z)=[m_2^{k+1}(D)-m_1^{k+1}(D)]\,[1+l_1(D)\,L_{1k}(D)-L_{2k}(D)]\,\frac{1}{z}+M(D)\,g_k(z). \quad (38.1)$$

Правые части выражений (37.1) и (38.1) не имеют полюсов в круге $|z|\leqslant R$, если только k — достаточно большое натуральное число. Но левые части этих выражений (37.1) и (38.1) от k не зависят. Следовательно, они в конечной плоскости полюсов не имеют и являются, поэтому, целыми функциями.

Таким образом нами доказана следующая

Лемма 3. *В классе K существует функция $h(z)$, имеющая в фундаментальном параллелограмме Π единственный простой полюс в точке $z=0$ с вычетом равным единице. Эта функция $h(z)$ имеет такие же полюсы и главные части, что и формальный ряд $P(D)\,(1:z)$, где $P(D)$ — оператор* (29.1).

8. Пусть

$$R(z,\ 0)=\sum_{k=1}^{s}\frac{c_k}{z^k} \; -$$

рациональная функция с единственным полюсом в точке $z=0$. Рассмотрим функцию

$$h(z,\ R,\ 0)=\sum_{k=1}^{s}(-1)^{k-1}\frac{c_k}{(k-1)!}\,D^{k-1}h(z), \quad Dh(z)=h'(z), \qquad (39.1)$$

где $h(z)$ — функция из леммы 3. Легко видеть, что имеет место

Лемма 4. *Функция $h(z,\ R,\ 0)$, определенная формулой* (39.1), *принадлежит классу K и имеет в фундаментальном параллелограмме Π единственный полюс в точке $z=0$ с главной частью $R(z,\ 0)$. Эта функция*

$h(z, R, 0)$ имеет такие же полюсы и главные части, что и формальный ряд

$$P(D)\sum_{k=1}^{s}(-1)^{k-1}\frac{c_k D^{k-1}}{(k-1)!}\ \frac{1}{z},$$

где $P(D)$ — оператор (29.1).

9. Обозначим через γ точку параллелограмма П и (как во введении) предположим, что $\gamma = u\alpha + v\beta$, $t_k \leqslant u < t_{k+1}$, $\tau_l \leqslant v < \tau_{l+1}$. Введем операторы $L_\gamma(D)$, $M_\gamma(D)$ и $N_\gamma(D)$ (ср. с выражениями (4) и (5))

$$L_\gamma(D) = \sum_{i=1}^{k} a_i e^{\alpha_i D}, \quad M_\gamma(D) = \sum_{j=1}^{l} b_j e^{\beta_j D}, \tag{40.1}$$

$$N_\gamma(D) = e^{-\gamma D} L_\gamma(D) M_\gamma(D) \tag{41.1}$$

и рассмотрим произведение

$$U(D) = e^{-\gamma D} L_\gamma(D)\,[1 + l_1(D) L_1(D) - L_2(D)], \tag{42.1}$$

где $l_1(D)$, $L_1(D)$ и $L_2(D)$ — операторы (12.1), (14.1) и (15.1). Оператор $U(D)$ представим в виде

$$\left.\begin{aligned} U(D) = {} & -e^{-\gamma D} L_\gamma(D) L_2(D) + e^{-\gamma D} L(D)\,[1 + l_1(D) L_1(D)] - \\ & - e^{-\gamma D} \sum_{i=k+1}^{m} a_i e^{\alpha_i D}\,[1 + l_1(D) L_1(D)]. \end{aligned}\right\} \tag{43.1}$$

По определению оператора $L_\gamma(D)$ имеем

$$e^{-\gamma D} L_\gamma(D) = \sum_{i=1}^{k} a_i e^{(\alpha_i - \gamma) D}.$$

Все показатели $\alpha_i - \gamma$ последней суммы имеют вид $t\alpha + v\beta$, где $t \leqslant 0$. Что касается показателей δ_n^2 оператора $L_2(D)$, то как уже было показано (см. (18.1)) $\delta_n^2 = t\alpha$, где $t \leqslant -1$. Таким образом, и все показатели ряда полученного по перемножении $\exp(-\gamma D) L_\gamma(D) L_2(D)$ (т. е. показатели первого члена правой части (43.1)), имеют вид $t\alpha + v\beta$, где $t \leqslant -1$.

Рассмотрим второй член правой части (43.1). Пользуясь (10.1) и (14.1), получаем

$$e^{-\gamma D} L(D)\,[1 + l_1(D) L_1(D)] = e^{-\gamma D}\,[L(D) + l_1(D)] = e^{-\gamma D}.$$

Наконец, третий член

$$e^{-\gamma D} \sum_{i=k+1}^{m} a_i e^{\alpha_i D}\,[1 + l_1(D) L_1(D)]$$

представляет собой ряд Дирихле в котором все показатели имеют вид $t\alpha + v\beta$, где $t > 0$.

Таким образом, оператор $U(D)$ выражается как сумма $\exp(-\gamma D)$ и ряда Дирихле в котором любой показатель имеет или вид $t\alpha + v\beta$, $t \leqslant -1$, или вид $t\alpha + v\beta$, $t > 0$. Точно также и оператор

$$V(D) = e^{-\gamma D} M_\gamma(D)\,[1 + m_1(D) M_1(D) - M_2(D)]$$

представим как сумму от $\exp(-\gamma D)$ и ряда Дирихле, в котором каждый показатель или имеет вид $u\alpha+t\beta$, $t\leqslant-1$, или вид $u\alpha+t\beta$, $t>0$.

Из сказанного легко следует следующий вывод: формальный ряд

$$P_\gamma(D)\,\frac{1}{z}=N_\gamma(D)\,P(D)\,\frac{1}{z}, \tag{44.1}$$

где $P(D)$ — оператор (29.1), имеет в фундаментальном параллелограмме Π единственный простой полюс в точке $z=\gamma$ с вычетом, равным единице.

Напомним, что функция $h(z)$, о которой говорится в лемме 3, имеет такие же полюсы и главные части, что и формальный ряд $P(D)$ $(1:z)$. Следовательно, функция $N_\gamma(D)\,h(z)$ имеет такие же полюсы и главные части, что и формальный ряд (44.1). Из всего сказанного легко вытекают следующие три леммы:

Лемма 3'. *Пусть $h(z)$ — функция о которой говорится в лемме 3. Функция $N_\gamma(D)\,h(z)$ причадлежит классу K и имеет в фундаментальном параллелограмме единственный простой полюс в точке $z=\gamma$ с вычетом, равным единице. Эта функция имеет такие же полюсы и главные части, что и формальный ряд $P_\gamma(D)$ $(1:z)$.*

Лемма 4'. *Пусть $h(z)$ — функция, о которой говорится в лемме 3. Функция*

$$N_\gamma(D)\sum_{k=1}^{s}(-1)^{k-1}\frac{c_k D^{k-1}}{(k-1)!}\,h(z)$$

принадлежит классу K и имеет в фундаментальном параллелограмме Π единственный полюс в точке $z=\gamma$ с главной частью

$$R(z,\gamma)=\sum_{k=1}^{s}\frac{c_k}{(z-\gamma)^k}.$$

Эта функция имеет такие же полюсы и главные части, что и формальный ряд

$$P_\gamma(D)\sum_{k=1}^{s}(-1)^{k-1}\frac{c_k D^{k-1}}{(k-1)!}\,\frac{1}{z}.$$

Лемма 5. *Пусть $h(z)$ — функция, о которой говорится в лемме 3, и*

$$R(z,\gamma_k)=\sum_{i=1}^{s_k}\frac{c_{ki}}{(z-\gamma_k)^i},\quad k=1,\,2,\,\ldots,\,l, \;-$$

рациональные функции, полюсы γ_k, $k=1,\,2,\,\ldots,\,l$, которых лежат в фундаментальном параллелограмме Π. Функция $R(D)\,h(z)$, где

$$R(D)=\sum_{k=1}^{l}N_{\gamma_k}(D)\sum_{i=1}^{s_k}(-1)^i\frac{c_{ki}D^{i-1}}{(i-1)!}, \tag{45.1}$$

принадлежит классу K и имеет в фундаментальном параллелограмме Π полюсы в точках $z=\gamma_k$, $k=1,\,2,\,\ldots,\,l$ (и только в них), с главными частями $R(z,\gamma_k)$. Эта функция имеет такие же полюсы и главные части, что и формальный ряд $R(D)\,P(D)$ $(1:z)$, где $P(D)$ — оператор (29.1).

§ 2. *H*-функция

1. В предыдущем параграфе мы рассматривали функцию $h(z)$, имеющую указанные в лемме 3 свойства. Очевидно, что и любая функция вида $h(z)+c(z)$, где $c(z)$ — произвольная целая функция, также имеет все свойства, указанные в лемме 3. Функцию $h(z)$ можно заменить функцией $h(z)+c(z)$ и в леммах 4, 3′, 4′ и 5 предыдущего параграфа. H-функция, о которой будет говориться в этом параграфе, также имеет вид $H(z)=h(z)+c(z)$, где $c(z)$ — подходящим образом выбранная целая функция.

2. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция. Функции

$$L[f(z)] = \sum_{k=1}^{m} a_k f(z+\alpha_k), \quad M[f(z)] = \sum_{i=1}^{n} b_i f(z+\beta_i)$$

условимся называть **остатками** (по отношению к операторам L и M) **функции** $f(z)$. Отметим некоторые легко проверяемые свойства остатков:

1) остатки от суммы двух функций, равны суммам остатков этих функций;

2) остатки от $cf(z)$, где c — постоянная, равны остаткам от $f(z)$, умноженным на c;

3) остатки от $f'(z)$ равны производным от остатков функций $f(z)$;

4) функция $f(z)$ имеет остатки, равные тождественно нулю, в том и только в том случае, когда $f(z)$ — решение системы

$$L[f(z)]=0, \quad M[f(z)]=0; \tag{1}$$

5) функция $f(z)$ принадлежит классу K, в том и только в том случае, когда остатки от $f(z)$ — целые функции;

6) остатки от функции вида $P(z)\exp(\nu z)$, где $P(z)$ — многочлен, а ν — постоянная, имеют такой же вид, а именно они равны $P_1(z)\exp(\nu z)$ и $P_2(z)\exp(\nu z)$, где $P_1(z)$ и $P_2(z)$ — тоже многочлены. Пусть степени многочленов $P_1(z)$, $P_2(z)$ и $P(z)$ равны, соответственно, s_1, s_2 и s. Если ν не является нулем ни одной из характеристических функций $L(t)$ и $M(t)$, то $s_1=s_2=s$. Если же, ν — нуль кратности k_1 функции $L(t)$ и кратности k_2 функции $M(t)$, то $s_i=s-k_i$, $i=1, 2$, при $k_i\leqslant s$ и $P_i(z)\equiv 0$ при $k_i>s$. В частности, для того чтобы функция $P(z)\exp(\nu z)$ имела нулевые остатки (или, другими словами, чтобы была решением системы (1)), необходимо и достаточно, чтобы ν был нулем пары характеристических функций $L(t)$ и $M(t)$ и чтобы его кратность была больше степени s многочлена $P(z)$.

3. Сформулируем здесь две основные леммы этого параграфа.

Лемма 1. *Если характеристические функции $L(t)$ и $M(t)$ не имеют общих нулей, то существует мероморфная функция $H(z)$, обладающая тождественно равными нулю остатками и имеющая в фундаментальном параллелограмме* П *единственный простой полюс в точке $z=0$ с вычетом, равным единице. Эта функция $H(z)$ имеет такие же полюсы и главные части, что и формальный ряд $P(D)$* $(1:z)$, *где $P(D)$ — оператор* (29.1). *Кроме того, для любого комплексного a и целого $j\geqslant 0$*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{m\left(r, H^{(j)}(z+a)\right)}{r} < \infty, \quad m\left(r, H(z)\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|H(re^{i\varphi})|\,d\varphi. \tag{1.2}$$

Лемма 2. *Пусть μ_i, $i=1, 2, \ldots, p$, — общие нули характеристических функций $L(t)$ и $M(t)$, k_{i1} и k_{i2} — кратности нуля μ_i по отношению к функциям $L(t)$ и $M(t)$ и $k_i=\min(k_{i1}, k_{i2})$ — кратность нуля μ_i по отношению к паре функций $L(t)$ и $M(t)$. Существует мероморфная функция $H(z)$, имеющая следующие свойства:*

1. *Она имеет в фундаментальном параллелограмме единственный простой полюс в точке $z=0$ с вычетом, равным единице.*

2. *Ее остатки равны*

$$\left.\begin{aligned} L[H(z)] &= \sum_{i=1}^{p} \delta_i P_i(z)\, e^{\mu_i z}, \\ M[H(z)] &= \sum_{i=1}^{p} (1-\delta_i) P_i(z)\, e^{\mu_i z}, \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

где $P_i(z)$ — многочлен, степень которого не больше k_i-1, а $\delta_i=1$, если $k_i=k_{i2}$ и $\delta_i=0$, если $k_{i2}>k_i$.

3. *Функция $H(z)$ имеет такие же полюсы и главные части, что и формальный ряд $P(D)$ $(1:z)$, где $P(D)$ — оператор* (29.1).

4. *Функция $H(z)$ удовлетворяет условию* (1.2).

Такую функцию $H(z)$ условимся называвать H-ф у н к ц и е й, соответствующей паре операторов L и M.

Замечание. Рассмотрим частный случай, когда

$$L[f(z)]=f(z)-f(z+\alpha), \quad M[f(z)]=f(z)-f(z+\beta) \tag{3.2}$$

Как хорошо известно, дзета функция Вейерштрасса $\zeta(z)$ имеет в фундаментальном параллелограмме П единственный простой полюс в точке $z=0$ с вычетом, равным единице. Остатки же функции $\zeta(z)$ по отношению к операторам (3.2) равны постоянным $-\eta_1$ и $-\eta_2$. Функция

$$Z(z)=\zeta(z)-\frac{\eta_2}{\beta}\, z \tag{4.2}$$

также имеет в фундаментальном параллелограмме П единственный простой полюс в точке $z=0$ с вычетом, равным единице. Кроме того, ее остатки равны

$$L[Z(z)]=-\eta_1+\frac{\eta_2\alpha}{\beta}, \qquad M[Z(z)]=0. \tag{5.2}$$

Напомним еще, что в случае (3.2) характеристические функции $L(t)=1-\exp(\alpha t)$ и $M(t)=1-\exp(\beta t)$ имеют единственный общий простой нуль в точке $t=0$. Наконец функция $\zeta(z)$ является логарифмической производной для сигма функции. Следовательно (по лемме о логарифмической производной [3]), $m\big(r, Z(z)\big)=0\,(lnr)$. Таким образом, функция $Z(z)$ является H-функцией по отношению к паре операторов (3.2).

4. Перед тем, как перейти к доказательству лемм 1 и 2, сделаем некоторые выводы из этих лемм.

1. Доказательство теоремы 1 (стр. 605). Предположим, что характеристические функции $L(t)$ и $M(t)$ не имеют общих нулей, и обозначим через

$$R(z, \gamma_k) = \sum_{i=1}^{s_k} \frac{c_{ki}}{(z-\gamma_k)^i}, \quad k=1, 2, \ldots, l,$$

рациональные функции, полюсы γ_k, $k=1, 2, \ldots, l$, которых лежат в П. Из леммы 1 следует, что функция $f(z)=R(D)H(z)$, где $R(D)$ — оператор (45.1), является мероморфным решением системы (1). Кроме того, как это следует из той же леммы 1, функция $f(z)=R(D)H(z)$ имеет такие же полюсы и главные части, что и формальный ряд $R(D)P(D)(1:z)$. Но, как мы уже знаем (см. лемму 5, § 1), последний ряд имеет в П полюсы в точках γ_k, $k=1, 2, \ldots, l$ (и только в них) с главными частями $R(z, \gamma_k)$.

Остается напомнить, что на стр. 609 мы доказали единственность мероморфного решения системы (1), имеющего в фундаментальном параллелограмме П заданные полюсы и главные части.

Заметим еще, что функция $f(z)=R(D)H(z)$ удовлетворяет условию $\varlimsup\limits_{r\to\infty}\left[m\left(r, f(z)\right):r\right]<\infty$. Это следует из (1.2).

2. Доказательство достаточности условия теоремы 2 (стр. 606). Предположим, что пара характеристических функций $L(t)$ и $M(t)$ имеет нули μ_i, $i=1, 2, \ldots, p$, кратностей k_i, и рассмотрим функцию $f(z)=R(D)H(z)$, где $R(D)$ — оператор (45.1) и $H(z)$ обозначает H-функцию, соответствующую паре операторов L и M. По лемме 2 функция $f(z)$ имеет в П полюсы γ_k, $k=1, 2, \ldots, l$ с главными частями $R(z, \gamma_k)$ (см. (6.2)). Остатки же функции $f(z)$ будут, как это следует из (2.2),

$$\left.\begin{aligned} L[f(z)] &= R(D)L[H(z)] = R(D)\sum_{i=1}^{p}\delta_i P_i(z)\exp(\mu_i z),\\ M[f(z)] &= R(D)M[H(z)] = R(D)\sum_{i=1}^{p}(1-\delta_i)P(z)\exp(\mu_i z). \end{aligned}\right\} \quad (7.2)$$

Педположим теперь, что каждый нуль μ_i пары характеристических функций $L(t)$ и $M(t)$ является и нулем (с учетом его кратности) функции $R(t)$ (см. (7)). Тогда из (7.2) и сказанного в лемме 2 о степенях полиномов $P_i(z)$ легко следует, что $f(z)$ — решение системы (1).

Заметим еще, что и в этом случае $f(z)$ имеет такие же полюсы и главные части, что и формальный ряд $R(D)P(D)(1:z)$. Кроме того,

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{m\left(r, f(z)\right)}{r}<\infty.$$

5. Обратимся к доказательству лемм 1 и 2. Для этого нам нужны будут некоторые вспомогательные предложения.

Лемма 3. *Последовательность полюсов формального ряда $P(D)(1:z)$, где $P(D)$ — оператор (29.1), имеет конечный показатель сходимости. Этот показатель не больше $m+n-2$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала формальный ряд $L_1(D)(1:z)$, где $L_1(D)$ — оператор (14.1) (см., также, (16.1)), и подсчитаем число полюсов этого ряда, лежащих в круге $|z|<r$. Заметим, что число этих полюсов равно числу показателей δ_k^1, меньших по модулю r, из ряда (16.1).

Воспользуемся теперь представлением (14.1) ряда $L_1(D)$:

$$L_1(D)=\frac{e^{-\alpha_1 D}}{a_1}\left(1+l_1(D)+l_1^2(D)+\cdots\right),\qquad a_1=1,\qquad \alpha_1=0, \tag{14.1}$$

где

$$l_1(D)=-\sum_{k=2}^{m} a_k e^{\alpha_k D}. \tag{12.1}$$

Каждый показатель разложения

$$l_1^k(D)=(-1)^k\,[a_2^k e^{k\alpha_2 D}+\cdots] \tag{8.2}$$

по модулю не меньше $k|\alpha_2|$ и поэтому в этом разложении встречаются показатели, меньшие по модулю r, только при $k|\alpha_2|<r$. Кроме того, в разложении (8.2) различных показателей не больше чем членов в многочлене вида $(x_1+x_2+\cdots+x_{m-1})^k$, т. е. не больше

$$\frac{(k+m-2)\,(k+m-3)\cdots(k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-2)}<Ck^{m-2},$$

где C — постоянная (см. [4] отдел 1, задача 13). Отсюда получаем, что в частичной сумме $1+l_1(D)+l_1^2(D)+\cdots+l_1^k(D)$ ряда (14.1) разных показателей не больше

$$C(1+1+2^{m-2}+3^{m-2}+\cdots k^{m-2})\leqslant Ck^{m-1}.$$

Так как $k<(r:|\alpha_2|)$, то число полюсов ряда $L_1(D)\,(1:z)$, лежащих в круге $|z|<r$, не больше Cr^{m-1}, где C — постоянная. То же самое можно сказать и о полюсах ряда $L_2(D)\,(1:z)$, где $L_2(D)$ — оператор (16.1) (см., также, (15.1)). Поэтому и число лежащих в круге $|z|<r$ полюсов ряда $[1+l_1(D)\,L_1(D)-L_2(D)]\,(1:z)$ не больше Cr^{m-1}. Точно также оказывается меньшим Cr^{n-1} число лежащих в круге $|z|<r$ полюсов ряда $[1+m_1(D)\,M_1(D)-M_2(D)]\,(1:z)$ (выражения этих операторов см. в (26.1)). Отсюда легко следует, что число лежащих в круге $|z|<r$ полюсов ряда $P(D)\,(1:z)$ не больше Cr^{m+n-2}, где C — постоянная. Но это означает, что показатель сходимости последовательности полюсов этого ряда не больше $m+n-2$.

Лемма 4. *Пусть $P(D)$ — оператор* (29.1), $\{\delta_n\}$ — *последовательность полюсов ряда $P(D)\,(1:z)$ и $\{c_n\}$ — последовательность вычетов этого ряда, соответствующих полюсам $\{\delta_n\}$. Существуют такие числа C и K, что*

$$|c_n|<C\exp(K|\delta_n|). \tag{9.2}$$

Доказательство. Последовательности $\{-\delta_n\}$ и $\{c_n\}$ представляют, соответственно, показатели и коэффициенты ряда Дирихле для оператора $P(D)$. Чтобы установить (9.2), нам достаточно показать, что соотношениям такого рода удовлетворяют коэффициенты и показатели каждого из рядов $L_1(D)$, $L_2(D)$, $M_1(D)$ и $M_2(D)$. Проделаем это для ряда $L_1(D)$. Представим $L_1(D)$ в виде (14.1). Как и в доказательстве леммы 3, убедимся, что показатель δ_n^1 может входить в разложении (8.2) для $l_1^k(D)$ только в случае, когда $k\leqslant(|\delta_n^1|:|\alpha_2|)$. С другой стороны, сумма всех коэффициентов разложения $l_1^k(D)$ не больше A^k, где $A=|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_m|$. Можем считать, что $A>1$. Поэтому сумма всех коэффициентов, входящих в частичную сумму $1+l_1(D)+l_1^2(D)+\cdots+l_1^k(D)$, не больше CA^k, где C — постоянная. Так как $k\leqslant(|\delta_n^1|:|\alpha_2|)$, то $|c_n^1|<C\exp(K|\delta_n^1|)$, где C и K — постоянные.

Замечание. Ряд $L_1(t)$ сходится абсолютно в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re}[\alpha t]<c$, где c — некоторое действительное число (см. [6]). Следовательно, $c_n^1\exp(-K|\delta_n^1|)\to 0$ при $-K<c$ и $n\to\infty$. Отсюда опять следует

$$|c_n^1|<C\exp(K|\delta_n^1|).$$

6. В предыдущем параграфе важную роль играла функция $h(z)$, имеющая такие же полюсы и главные части, что и формальный ряд $P(D)(1:z)$. Пользуясь леммами 3 и 4, мы покажем, что функцию $h(z)$ можно так выбрать, чтобы для любого комплексного числа a и целого неотрицательного числа j выполнялось неравенство

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{m\left(r,\,h^{(j)}(z+a)\right)}{r}<\infty. \tag{10.2}$$

Это непосредственно вытекает из следующей леммы.

Лемма 5. *Пусть* $\{\delta_n\}$, $\lim\delta_n=\infty$ — *последовательность комплексных чисел, имеющая конечный показатель сходимости, и* $\{c_n\}$ — *последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию*

$$|c_n|\leqslant C\exp(K|\delta_n|), \tag{11.2}$$

где C и K — некоторые постоянные. Существует такая мероморфная функция $g(z)$, имеющая простые полюсы в точках δ_n (и только в них) с вычетами c_n, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{m\left(r,\,g(z)\right)}{r}<\infty.$$

Кроме того, при любом комплексном a и неотрицательном целом j выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{m\left(r,\,g^{(j)}(z+a)\right)}{r}<\infty.$$

Доказательство. Предположим сначала, что все точки δ_n лежат в угле с раствором, меньшим π. Без ограничения общности можем считать, что

$$|\arg\delta_n|\leqslant\alpha_0,\quad\text{где}\quad\alpha_0<\frac{\pi}{2}. \tag{12.2}$$

Функцию $g(z)$ будем искать в виде

$$g(z)=e^{\nu z}k(z), \tag{13.2}$$

где ν — достаточно большое число и

$$k(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n\exp(-\nu\delta_n)}{z-\delta_n}. \tag{14.2}$$

Покажем, что ряд (14.2) сходится абсолютно и равномерно внутри комплексной плоскости. Из (11.2) и (12.2) следует, что

$$|c_n\exp(-\nu\delta_n)|\leqslant\exp\left((K-\nu\cos\alpha_0)|\delta_n|\right).$$

Число ν возьмем настолько большим, чтобы $K-\nu\cos\alpha_0<-1$. Зафиксируем число $r>0$ и рассмотрим остаток $k_r(z)$ ряда (14.2):

$$k_r(z)=\sum_{|\delta_n|>r+1}\frac{c_n\exp(-\nu\delta_n)}{z-\delta_n}. \qquad (15.2)$$

Если $|z|\leqslant r$ и $|\delta_n|>r+1$, то

$$\left|\frac{c_n\exp(-\nu\delta_n)}{z-\delta_n}\right|\leqslant\left|c_n e^{-\nu\delta_n}\right|<e^{-|\delta_n|}.$$

Ряд $\Sigma\exp(-|\delta_n|)$ очевидно сходится, так как последовательность $\{\delta_n\}$ имеет конечный показатель сходимости. Этот ряд является, как это следует из последнего неравенства, мажорантой для ряда (14.2). Следовательно ряд (14.2) абсолютно и равномерно сходится в круге $|z|\leqslant r$. Заметим, что заодно мы установили и следующее неравенство:

$$|k_r(z)|\leqslant C, \qquad (16.2)$$

где C — постоянная и $|z|\leqslant r$.

Обозначим через $K_r(z)$ частичную сумму ряда (14.2)

$$K_r(z)=k(z)-k_r(z)=\sum_{|\delta_n|\leqslant r+1}\frac{c_n\exp(-\nu\delta_n)}{z-\delta_n}. \qquad (17.2)$$

Каждый член последней суммы удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{c_n\exp(-\nu\delta_n)}{z-\delta_n}\right|\leqslant\frac{\exp(-|\delta_n|)}{|z-\delta_n|}. \qquad (18.2)$$

Член в правой части последнего неравенства имеет вид $1:(k|z-\delta|)$, где k — положительное число и δ — комплексное число. Пусть $|z|=r$ и $\varphi=\arg(z:\delta)$. Тогда

$$|k(z-\delta)\geqslant k\,r\sin|\varphi|\geqslant\frac{2k}{\pi}\,r\,|\varphi|,\qquad 0\leqslant|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2},$$

откуда

$$m\left(r,\frac{1}{k(z-\delta)}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|\frac{1}{k(re^{i\vartheta}-\delta)}\right|d\vartheta\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln^+\frac{\pi}{2kr\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2kr}\int_0^1\ln\frac{1}{\varphi}\,d\varphi=\frac{1}{2kr}.$$

Пользуясь (17.2), (18.2) и последней оценкой, мы получаем

$$m\left(r,\ K_r(z)\right)\leqslant\frac{1}{2r}\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-|\delta_n|)+\ln n(r+1),$$

где $n(r)$ — число точек δ_n в круге $|z|\leqslant r$. Как уже знаем, ряд $\Sigma\exp(-|\delta_n|)$ сходится. Кроме того, последовательность $\{\delta_n\}$ имеет конечный показатель сходимости. Поэтому $n(r)\leqslant r^s$, где s — достаточно большое число. Таким образом,

$$m\left(r,\ K_r(z)\right)=O(\ln r).$$

В соединении с (13.2), (16.2) и (17.2) это дает

$$m\left(r,k(z)\right)=O(\ln r),\ \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{m\left(r,g(z)\right)}{r}<\infty. \qquad (19.2)$$

Точно также можно показать, что при любом комплексном a и целом неотрицательном j имеет место неравенство

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{m\left(r,\ g^{(j)}(z+a)\right)}{r} < \infty. \tag{20.2}$$

Заметим, что неравенство (20.2) следует при $a=0$ из (19.2), из неравенства $m(r,\ g') \leqslant m(r,\ g) + m\left(r,\ (g':g)\right)$ и из леммы о логарифмической производной (см. [3], п. 204).

Обратимся теперь к общему случаю. Комплексную плоскость разделим на три равных угла U_1, U_2 и U_3 с вершиной в точке $z=0$. По доказанному для каждого $i=1,\ 2,\ 3$ существует мероморфная функция $g_i(z)$, удовлетворяющая условию

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{m\left(r,\ g_i^{(j)}(z+a)\right)}{r} < \infty$$

и имеющая полюсы в точках δ_n, $\delta_n \in U_i$, с вычетами c_n. Функция $g(z) = g_1(z) + g_2(z) + g_3(z)$ имеет все требуемые в лемме 5 свойства.

7. Рассмотрим теперь остатки $L[h(z)]$ и $M[h(z)]$, где $h(z)$ удовлетворяет условию (10.2) и имеет такие же полюсы и главные части, что и формальный ряд $P(D)(1:z)$ $\big(P(D)$ — оператор (29.1)$\big)$. Из леммы 3, § 1 следует, что эти остатки целые функции, а из (10.2) — что эти остатки целые функции экспоненциального типа. Поэтому (см. [1], стр. 460) уравнение $M[f(z)] = -M[h(z)]$ имеет целое решение $f(z) = k_1(z)$ экспоненциального типа. Остатками функции $h_1(z) = h(z) + k_1(z)$ будут $L[h_1(z)] = L[h(z)] + L[k_1(z)]$ и $M[h_1(z)] = M[h(z)] + M[k_1(z)] \equiv 0$. Остаток $L[h_1(z)]$ является целой функцией экспоненциального типа. Кроме того,

$$M\Big[L[h_1(z)]\Big] = L\Big[M[h_1(z)]\Big] \equiv 0. \tag{21.2}$$

Поэтому (см. [1], стр. 464—467)

$$L[h_1(z)] = \sum_{i=1}^{t} \Theta_i(z) \exp(\lambda_i z), \tag{22.2}$$

где t — некоторое целое неотрицательное число, λ_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ t$, — нули характеристической функции $M(t)$ и $\Theta_i(z)$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ t$, многочлен, степень которого меньше кратности нуля λ_i. Если λ_i не является нулем характеристической функции $L(t)$, то существует такой многочлен $\Theta_i^*(z)$, степень которого равна степени многочлена $\Theta_i(z)$, что

$$L[\Theta_i^*(z) \exp(\lambda_i z)] = -\Theta_i(z) \exp(\lambda_i z). \tag{23.2}$$

Заметим, что

$$M[\Theta_i^*(z) \exp(\lambda_i z)] \equiv 0, \tag{24.2}$$

и обозначим через

$$k_2(z) = \Sigma\, \Theta_i^*(z) \exp(\lambda_i z), \tag{25.2}$$

где в сумму входят только члены, содержащие показатель λ_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ t$, не являющийся нулем функции $L(t)$. Из (21.2)—(25.2) следует, что функция $h_2(z) = h_1(z) + k_2(z) = h(z) + k_1(z) + k_2(z)$ имеет остатки

$$L[h_2(z)] = \sum_{i=1}^{p} R_i(z) \exp(\mu_i z), \quad M[h_2(z)] \equiv 0, \tag{26.2}$$

где μ_i, $i=1, 2, \ldots, p$ — общие нули пары характеристических функций $L(t)$ и $M(t)$, $R_i(z)$, $i=1, 2, \ldots, p$, — многочлен, степень которого не больше $k_{i2}-1$ и k_{i2} — кратность нуля μ_i по отношению к функции $M(t)$.

Если пара характеристических функций $L(t)$ и $M(t)$ общих нулей не имеет, то $L[h_2(z)]\equiv 0$ и $M[h_2(z)]\equiv 0$. В этом случае обозначим $H(z)=h_2(z)$, и эта функция $H(z)$ имеет все свойства, перечисленные в лемме 1. Таким образом, $H(z)$ является в этом случае H-функцией, соответствующей паре операторов L и M.

Нам осталось закончить доказательство леммы 2. Пусть μ_i, $i=1, 2, \ldots, p$, — общий нуль функций $L(t)$ и $M(t)$, k_{i1} и k_{i2} — кратности этого нуля по отношению к $L(t)$ и $M(t)$ и $k_i=\min(k_{i1}, k_{i2})$. Нулю μ_i соответствует в остатке $M[h_2(z)]$ член равный тождественно нулю (см. (26.2)), а в остатке $L[h_2(z)]$ член $R_i(z)\exp(\mu_i z)$, где $R_i(z)$ — многочлен, степень которого меньше $k_{i2}-1$. Если $k_{i2}=k_i$, то мы ничего больше с этим слагаемым $R_i(z)\exp(\mu_i z)$ не предпринимаем. Если же $k_{i2}>k_i$, то имеется такой многочлен $R_i^*(z)$, что

$$L[R_i^*(z)\exp(\mu_i z)] = -R_i(z)\exp(\mu_i z).$$

При этом степень многочлена $R_i^*(z)$ равна l_i-1+k_{i1}, где l_i-1 — степень многочлена $R_i(z)$. Заметим, что

$$M[R_i^*(z)\exp(\mu_i z)] = P_i(z)\exp(\mu_i z),$$

где $P_i(z)$ — многочлен, степень которого равна $h_i-1=l_i-1+k_{i1}-k_{i2}$. Так как $l_i\leqslant k_{i2}$ и $k_{i1}=k_i$, то $h_i\leqslant k_i$. Обозначим

$$k_3(z)=\sum R_i^*(z)\exp(\mu_i z),$$

где в сумму входят только те слагаемые $R_i^*(z)\exp(\mu_i z)$, для которых $k_{i2}>k_i$. Из всего сказанного следует, что функция

$$H(z)=h_2(z)+k_3(z)=h(z)+k_1(z)+k_2(z)+k_3(z)$$

имеет все свойства, перечисленные в лемме 2 и является поэтому H-функцией, соответствующей паре операторов L и M.

8. Остатки (2.2) функции $H(z)$ являются суммами функций

$$\delta_i P_i(z)\exp(\mu_i z),\quad i=1, 2, \ldots, p,$$

где μ_i — общие нули функций $L(t)$ и $M(t)$, а $P_i(z)$ — многочлены. Если $P_i(z)\not\equiv 0$, то через h_i-1 обозначим степень полинома $P_i(z)$. Если же $P_i(z)\equiv 0$, то положим $h_i=0$. Напомним, что $h_i\leqslant k_i$, где k_i — кратность нуля μ_i по отношению к паре функций $L(t)$ и $M(t)$. Кроме того, условимся числа μ_i, для которых $h_i\neq 0$, называть показателями остатков функции $H(z)$.

Лемма 6. *Для того, чтобы существовало мероморфное решение системы* (1), *имеющее в фундаментальном параллелограмме* П *полюсы* γ_k, $k=1, 2, \ldots, l$, *с главными частями* $R(z, \gamma_k)$ (см. (6.2)) *необходимо, чтобы каждый показатель* μ_i *остатков функции* $H(z)$ *являлся нулем функции* $R(t)$ (см. (7)), *кратность которого не меньше* h_i.

Доказательство леммы проведем методом от противного. Предположим, что хотя бы один из показателей μ_i или не является нулем функции $R(t)$, или, будучи нулем этой функции, имеет кратность, меньшую h_i.

Рассмотрим функцию

$$f_0(z)=R(D)\,H(z). \tag{27.2}$$

Эта функция, как уже было показано, имеет в П полюсы γ_k, $k=1, 2, \ldots, l$, с главными частями $R(z, \gamma_k)$, и ее остатки выражаются формулами (7.2). Поэтому

$$\left.\begin{aligned} L[f_0(z)] &= R(D)\,L[H(z)] = \sum_{i=1}^{p} \delta_i P_i^*(z)\exp(\mu_i z), \\ M[f_0(z)] &= R(D)\,M[H(z)] = \sum_{i=1}^{p} (1-\delta_i) P_i^*(z)\exp(\mu_i z), \end{aligned}\right\} \tag{28.2}$$

где $P^*(z)$ — многочлены, степени которых не больше h_i-1, а δ_i имеют тот же смысл, что в (2.2) (т. е. δ_i равно единице или нулю). По сделанному в начале доказательства предположению хотя бы один из этих многочленов $P_i^*(z)$ не равен тождественно нулю. Для определенности предположим, что это многочлен $P_1^*(z)$.

Пусть $f(z)$ — мероморфное решение системы (1), имеющее в П главные части $R(z, \gamma_k)$, $k=1, 2, \ldots, l$. Как мы уже отметили, эти же главные части имеет в П и функция (27.2). По лемме 2, §1,

$$f(z) = f_0(z) + C(z),$$

где $C(z)$ — целая функция. Таким образом (см. (28.2)).

$$\left.\begin{aligned} L[C(z)] &= -L[f_0(z)] = -\sum_{i=1}^{p} \delta_i P_i^*(z)\exp(\mu_i z), \\ M[C(z)] &= -M[f_0(z)] = -\sum_{i=1}^{p} (1-\delta_i) P_i^*(z)\exp(\mu_i z). \end{aligned}\right\} \tag{29.2}$$

Операторы $L(D)$ и $M(D)$ представим в виде степенных рядов

$$L(D) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k D^k, \quad M(D) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k D^k$$

и заметим, что в случае любой целой функции $C(z)$ имеют смысл операции

$$L(D)\,C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k C^{(k)}(z), \quad M(D)\,C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k C^{(k)}(z)$$

(т. е. ряды в правых частях равномерно сходятся внутри комплексной плоскости) и совпадают с операциями $L[C(z)]$ и $M[C(z)]$. Пусть μ_1 — нуль кратности k_1 пары функций $L(t)$ и $M(t)$. Тогда

$$L(D) = (D-\mu_1)^{k_1} L^*(D), \quad M(D) = (D-\mu_1)^{k_1} M^*(D),$$

где $L^*(t)$ и $M^*(t)$ — целые функции экспоненциального типа, и соотношения (29.2) можно переписать в виде

$$L^*(D)\ (D-\mu_1)^{k_1} C(z) = -\sum_{i=1}^{p} \delta_i P_i^*(z)\exp(\mu_i z),$$

$$M^*(D)\ (D-\mu_1)^{k_1} C(z) = -\sum_{i=1}^{p} (1-\delta_i) P_i^*(z)\exp(\mu_i z).$$

На первое из этих равенств подействуем оператором $M^*(D)$, а на второе — оператором $L^*(D)$. Мы получим

$$M^*(D)\sum_{i=1}^{p}\delta_i P_i^*(z)\exp(\mu_i z)\equiv L^*(D)\sum_{i=1}^{p}(1-\delta_i)P_i^*(z)\exp(\mu_i z).$$

С другой стороны покажем, что это тождество не возможно. В самом деле, μ_i является при $i=2, 3, \ldots, p$, нулем кратности k_i, как функции $M^*(t)$, так и функции $L^*(t)$. Поэтому $L^*(D)P^*(z)\exp(\mu_i z)\equiv M^*(D)P_i^*(z)\exp(\mu_i z)\equiv 0$ при $i=2, 3, \ldots, p$. Таким образом

$$L^*(D)\sum_{i=1}^{p}(1-\delta_i)P_i^*(z)\exp(\mu_i z)=L^*(D)(1-\delta_1)P_1^*(z)\exp(\mu_1 z),$$

$$M^*(D)\sum_{i=1}^{p}\delta_i P_i^*(z)\exp(\mu_i z)=M^*(D)\delta_1 P_1^*(z)\exp(\mu_1 z).$$

Для определенности предположим, что $\delta_1=1$ (напомним, что δ_1 равен или единице, или нулю), тогда μ_1 не является нулем функции $M^*(t)$. Поэтому $M^*(D)\delta_1 P_1(z)\exp(\mu_1 z)\not\equiv 0$. Но $L^*(D)(1-\delta_1)P_1(z)\exp(\mu_1 z)\equiv 0$, так как $1-\delta_1=0$. Из полученного противоречия и следует справедливость леммы 6. В пункте 4 этого параграфа мы доказали достаточность условия теоремы 2. Чтобы установить необходимость этого условия, т. е. закончить доказательство теоремы 2, достаточно показать, как это следует из леммы 6, что $h_i=k_i$, $i=1, 2, \ldots, p$. Это будет показано в следующем параграфе.

§ 3. Обобщение соотношения Лежандра

1. Рассмотрим более подробно остатки (2.2) функции $H(z)$. Пусть μ — нуль кратности k пары характеристических функций $L(t)$ и $M(t)$. По лемме 2, § 2, нулю μ соответствует функция $P(z)\exp(\mu z)$, входящая как слагаемое в остатки функции $H(z)$. При этом, степень многочлена $P(z)$ не больше $k-1$, и это слагаемое входит в остаток $L[H(z)]$, если $M^{(k)}(\mu)\neq 0$. В этом случае, в остатке $M[H(z)]$ соответствующее μ слагаемое равно тождественно нулю. Если же $M^{(k)}(\mu)=0$, то $L^{(k)}(\mu)\neq 0$. Тогда слагаемое $P(z)\exp(\mu z)$ входит в остаток $M[H(z)]$, а в остатке $L[H(z)]$ нулю μ соответствует нулевое слагаемое. Оба эти случая изучаются одинаково, и поэтому ограничимся изучением только первого случая. Предположим, что

$$M^{(k)}(\mu)\neq 0),\quad M^{(i)}(\mu)=0\quad i=0, 1, 2, \ldots, k-1, \tag{1.3}$$

и покажем, что $P(z)=c_1 z^{k-1}+c_2 z^{k-2}+\cdots+c_k$, где

$$c_1=\pm 2k\pi i : M^{(k)}(\mu),\quad \sum_{i=1}^{l}\frac{M^{(k+l-i)}(\mu)\,c_i\,(k-i)!}{(k+l-i)!}=0,\quad l=2, 3, \ldots, k.$$

При этом в выражении для c_1 стоит знак плюс, если $\operatorname{Im}(\alpha:\beta)<0$, и знак минус, — если $\operatorname{Im}(\alpha:\beta)>0$. В дальнейшем будем предполагать, что $\operatorname{Im}(\alpha:\beta)<0$, так что

$$c_1=\frac{2k\pi i}{M^{(k)}(\mu)}. \tag{2.3}$$

Применим этот результат к системе разностных уравнений

$$f(z)-f(z+\alpha)=0,\quad f(z)-f(z+\beta)=0.$$

В этом случае

$$L(t)=1-\exp(\alpha t),\quad M(t)=1-\exp(\beta t)$$

и

$$H(z)=Z(z)=\zeta(z)-(\eta_2:\beta)\,z,$$

где $\zeta(z)$ — дзета функция Вейерштрасса (см. замечание на стр. 619). Остаток $L[Z(z)]$ равен $-\eta_1+\eta_2\cdot\alpha:\beta$. Заметим еще, что в рассматриваемом случае пара характеристических функций $L(t)$ и $M(t)$ имеет единственный простой нуль в точке $t=0$. По высказанному выше результату остаток $L[Z(z)]$ должен быть равен $2\pi i:M'(0)=-2\pi i:\beta$. Следовательно, имеет место равенство $\eta_1\beta-\eta_2\alpha=2\pi i$, известное в теории эллиптических функций под названием соотношения Лежандра.

2. Переходя к доказательству высказанного выше результата, обозначим через $c_1, c_2, \ldots, c_k$ коэффициенты многочлена $P(z)$, так что

$$P(z)=c_1z^{k-1}+c_2z^{k-2}+\cdots+c_k, \tag{3.3}$$

и рассмотрим сначала первый коэффициент c_1.

Лемма 1. *Старший коэффициент c_1 полинома $P(z)$ равен $2k\pi i:M^{(k)}(\mu)$.*

Доказательство. Сначала покажем, что мы можем ограничиться случаем, когда общий нуль характеристических функций $L(t)$ и $M(t)$ равен нулю. Для этого рассмотрим один из остатков функции $H(z)$, например, остаток $L[H(z)]$. Он имеет вид

$$L[H(z)]=P(z)\,e^{\mu z}+\Theta(z),\quad \Theta(z)=\sum_{i=2}^{p}\delta_iP_i(z)\,e^{\mu_i z}, \tag{4.3}$$

где μ и μ_i, $i=2, 3, \ldots, p$, — нули пары характеристических функций $L(t)$ и $M(t)$, $P_i(z)$ — многочлены и δ_i равны или единице, или нулю ((см. 2.2)). Легко проверить, что для любой функции $\varphi(z)$ выполнено равенство

$$L[e^{\mu z}\varphi(z)]=e^{\mu z}L^*[\varphi(z)], \tag{5.3}$$

где

$$L^*(D)=L(D+\mu). \tag{6.3}$$

Аналогично

$$M[e^{\mu z}\varphi(z)]=e^{\mu z}M^*[\varphi(z)], \tag{7.3}$$

где

$$M^*(D)=M(D+\mu). \tag{8.3}$$

Если в равенствах (5.3) и (7.3) вместо $\varphi(z)$ возьмем функцию $H^*(z)=\exp(-\mu z)\,H(z)$, то получим

$$\left.\begin{aligned} L^*[H^*(z)]&=L^*[e^{-\mu z}H(z)]=e^{-\mu z}L[H(z)],\\ M^*[H^*(z)]&=M^*[e^{-\mu z}H(z)]=e^{-\mu z}M[H(z)].\end{aligned}\right\} \tag{9.3}$$

Таким образом, остатки функции $H^*(z)$ по отношению к операторам L^* и M^* равны умноженным на $\exp(-\mu z)$ остаткам функции $H^*(z)$ по отношению к операторам L и M. Кроме того, функция $H^*(z)$ имеет, как и функция $H(z)$, в фундаментальном параллелограмме П единственный простой полюс в точке $z=0$ с вычетом, равным единице. Из сказанного легко следует, что $H^*(z)$ является H-функцией для пары операторов L^* и M^*. Ее остаток $L^*[H^*(z)]$, как видно из (9.3) и (4.3), равен

$$L^*[H^*(z)]=P(z)+e^{-\mu z}\Theta(z).$$

Добавим еще, что (см. (6.3) и (8.3)) $t=0$ является k-раз кратным нулем пары функций $L^*(t)$ и $M^*(t)$.

Итак, без ограничения общности можем считать, что $t=0$ является k-раз кратным нулем пары функций $L(t)$ и $M(t)$. Остатки функции $H(z)$ имеют при этом предположении вид

$$\left.\begin{aligned} L[H(z)] &= P(z)+\sum_{i=2}^{p}\delta_i e^{\mu_i z}P_i(z),\\ M[H(z)] &= \sum_{i=2}^{p}(1-\delta_i)e^{\mu_i z}P_i(z),\end{aligned}\right\}\qquad(10.3)$$

где μ_i, $P_i(z)$ и δ_i имеют тот же смысл, что в (2.2).

Воспользуемся обозначениями (29.1)–(33.1) и представим функцию $H(z)$ в виде

$$H(z)=H_1(z)+H_2(z),\qquad\text{где}\qquad H_1(z)=P_k(D)\,\frac{1}{z}.\qquad(11.3)$$

Рассмотрим остаток функции $H_2(z)$. Так как $H_2(z)=H(z)-H_1(z)$, то $L[H_2(z)]=L[H(z)]-L[H_1(z)]$. Остаток $L[H(z)]$ записан в (10.3), а остаток $L[H_1(z)]$ можно (см. (34.1)) представить в виде

$$L[H_1(z)]=L(D)\,P_k(D)\,\frac{1}{z}.$$

Таким образом,

$$L[H_2(z)]=P(z)+\sum_{i=2}^{p}\delta_i e^{\mu_i z}P_i(z)-L(D)\,P_k(D)\,\frac{1}{z}.\qquad(12.3)$$

Точно также получаем

$$M[H_2(z)]=\sum_{i=2}^{p}(1-\delta_i)e^{\mu_i z}P_i(z)-M(D)\,P_k(D)\,\frac{1}{z}.\qquad(13.3)$$

Пусть $R>0$ – достаточно большое число. Функция $H(z)$ имеет по лемме 2, § 2, такие же полюсы и главные части, что и формальный ряд $P(D)\,(1:z)$. Поэтому (см. (11.3)) функция $H_2(z)$ имеет такие же полюсы и главные части, что и формальный ряд $[P(D)-P_k(D)]\,(1:z)$. Значит число k можно выбрать настолько большим, чтобы функция $H_2(z)$ была регулярной в круге $|z|\leqslant 2R$. По известным оценкам для модулей производных от аналитических функций в круге $|z|\leqslant R$ выполняются неравенства

$$|H_2^{(l)}(z)|\leqslant\frac{C\,l!}{R^l},\quad l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\qquad(14.3)$$

где C – постоянная.

Напомним, что по нашему предположению $t=0$ является k-раз кратным нулем пары функций $L(t)$ и $M(t)$. Поэтому

$$\left.\begin{aligned}\frac{L(t)}{t}&=\frac{d_k t^{k-1}}{k!}+\frac{d_{k+1}t^k}{(k+1)!}+\cdots,\ d_s=L^{(s)}(0)=a_1\alpha_1^s+a_2\alpha_2^s+\cdots+a_m\alpha_m^s,\\ \frac{M(t)}{t}&=\frac{e_k t^{k-1}}{k!}+\frac{e_{k+1}t^k}{(k+1)!}+\cdots,\ e_k\neq 0,\ e_s=M^{(s)}(0)=b_1\beta_1^s+b_2\beta_2^s+\cdots+b_n\beta_n^s,\end{aligned}\right\}(15.3)$$

являются целыми функциями экспоненциального типа. Из (14.3) следует, что в круге $|z| \leqslant R$ (при достаточно большом R) сходятся равномерно ряды

$$\frac{L(D)}{D} H_2'(z) = \frac{d_k H_2^{(k)}(z)}{k!} + \frac{d_{k+1} H_2^{(k+1)}(z)}{(k+1)!} + \cdots = L(D) H_2(z) = L[H_2(z)],$$

$$\frac{M(D)}{D} H_2'(z) = \frac{e_k H_2^{(k)}(z)}{k!} + \frac{e_{k+1} H_2^{(k+1)}(z)}{(k+1)!} + \cdots = M(D) H_2(z) = M[H_2(z)].$$

Следовательно, соотношения (12.3) и (13.3) можно при $|z| \leqslant R$ переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{L(D)}{D} H_2'(z) &= P(z) + \sum_{i=2}^{p} \delta_i e^{\mu_i z} P_i(z) - L(D) P_k(D) \frac{1}{z}, \\ \frac{M(D)}{D} H_2'(z) &= \sum_{i=2}^{p} (1-\delta_i) e^{\mu_i z} P_i(z) - M(D) P_k(D) \frac{1}{z}. \end{aligned}\right\} \qquad (16.3)$$

Действуя оператором $M(D) : D$ на первое из этих равенств и оператором $L(D) : D$ на второе, мы получим, что при $|z| \leqslant R$ имеет место тождество

$$\left.\begin{aligned} &\frac{M(D)}{D} \left\{ P(z) + \sum_{i=2}^{p} \delta_i P_i(z) e^{\mu_i z} - L(D) P_k(D) \frac{1}{z} \right\} \equiv \\ &\equiv \frac{L(D)}{D} \left\{ \sum_{i=2}^{p} (1-\delta_i) P_i(z) e^{\mu_i z} - M(D) P_k(D) \frac{1}{z} \right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (17.3)$$

Из (3.3) и (15.3) следует, что

$$\frac{M(D)}{D} P(z) = \frac{e_k (k-1)!}{k!} c_1 = \frac{M^{(k)}(0)}{k} c_1.$$

Далее μ_i, $i = 2, 3, \ldots, p$, являются нулями функций $L(t)$ и $M(t)$ (а тем самым и нулями функций $L(t) : t$ и $M(t) : t$), причем кратности этих нулей k_i больше соответствующих степеней многочленов $P_i(z)$. Поэтому

$$\frac{L(D)}{D} [P_i(z) e^{\mu_i z}] \equiv \frac{M(D)}{D} [P_i(z) e^{\mu_i z}] \equiv 0.$$

Из всего сказанного следует, что тождество (17.3) можно записать в виде

$$\frac{M^{(k)}(0)}{k} c_1 \equiv \frac{M(D)}{D} L(D) P_k(D) \frac{1}{z} - \frac{L(D)}{D} M(D) P_k(D) \frac{1}{z}. \qquad (18.3)$$

Чтобы закончить доказательство леммы, нам осталось показать, что при $|z| \leqslant R$

$$\frac{M(D)}{D} L(D) P_k(D) \frac{1}{z} - \frac{L(D)}{D} M(D) P_k(D) \frac{1}{z} \equiv 2\pi i. \qquad (19.3)$$

Рациональная функция (см. (34.1))

$$[l_2^{k+1}(D) - l_1^{k+1}(D)] [1 + m_1(D) M_{1k}(D) - M_{2k}(D)] \frac{1}{z} \equiv L(D) P_k(D) \frac{1}{z}$$

является суммой конечного числа функций вида $K:(z+\chi)$, где K и χ — комплексные числа. Подействуем на такую функцию оператором $M(D):D$. Мы получим (см. (15.3))

$$\frac{M(D)}{D}\ \frac{K}{z+\chi}=\frac{e_k}{k!}\ D^{k-1}\ \frac{K}{z+\chi}+\frac{e_{k+1}}{(k+1)!}\ D^k\ \frac{K}{z+\chi}+\cdots$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно вне круга $|z+\chi|\geqslant\rho$, где ρ — достаточно большое число, например, $\rho>\max[|\alpha|,\ |\beta|]$. Кроме того, сумма этого ряда в бесконечно удаленной точке равна нулю. Вне этого круга сходится равномерно и ряд

$$M(D)\ \frac{K}{z+\chi}=\frac{e_k}{k!}\ D^k\ \frac{K}{z+\chi}+\frac{e_{k+1}}{(k+1)!}\ D^{k+1}\ \frac{K}{z+\chi}+\cdots$$

Из сказанного легко следует, что

$$\frac{M(D)}{D}\cdot Ke^{\chi D}\ \frac{1}{z}=\frac{M(D)}{D}\ \frac{K}{z+\chi}=\int\limits_{\infty z} M(D)\ \frac{K}{z+\chi}\ dz=\int\limits_{\infty z} Ke^{\chi D}\ M(D)\ \frac{1}{z}\ dz, \quad (20.3)$$

где интегрирование проводится по любому пути соединяющему точки ∞ и z и не пересекающему круг $|z+\chi|<\rho$. Аналогично устанавливаем, что

$$\frac{L(D)}{D}\ Ke^{\chi D}\ \frac{1}{z}=\frac{L(D)}{D}\ \frac{K}{z+\chi}=\int\limits_{\infty z} Ke^{\chi D}\,L(D)\ \frac{1}{z}\ dz, \quad (21.3)$$

если путь ∞z не пересекает круга $|z+\chi|<\rho$.

Чтобы дальнейшие рассуждения представить в более наглядном виде, воспользуемся следующим чертежом.

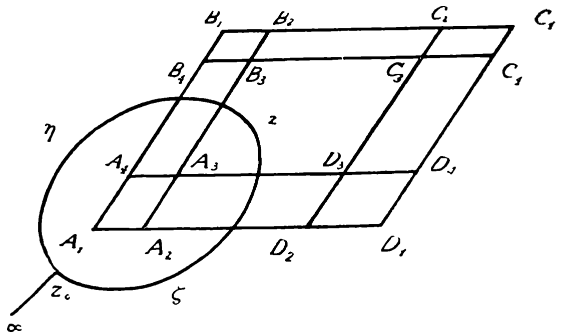

Рис. 1

На этом чертеже отрезок A_1D_1 параллелен вектору α, а отрезок A_1B_1 — вектору β. Параллелограммы $A_1B_1B_2A_2$ и $C_1D_1D_2C_2$ содержат как все полюсы рациональной функции $L(D)P_k(D)\,(1:z)$, так и круги радиуса ρ, описанные вокруг этих полюсов. Параллелограммы $D_1A_1A_4D_4$ и $C_1B_1B_4C_4$ содержат круги радиуса ρ, описанные вокруг каждого полюса функции $M(D)\,P_k(D)\,(1:z)$. При этом, считаем, что число k настолько большое, что круг $|z|\leqslant R$ лежит в параллелограмме $A_3B_3C_3D_3$.

Пользуясь равенством (20.3), получаем

$$\frac{M(D)}{D}\ L(D)\,P_k(D)\ \frac{1}{z}=\int\limits_{\infty z_0 \zeta z} M(D)\,L(D)\ P_k(D)\ \frac{1}{z}\ dz,$$

где интегрирование проводится по пути $\infty z_0 \zeta z$, не пересекающему параллелограммов $A_1B_1B_2A_2$ и $C_1C_2D_2D_1$. Выкладками, аналогичными приведенным на стр. 614, легко получить

$$M(D)\,L(D)\,P_k(D)=[l_1^{k+1}(D)-l_2^{k+1}(D)]\,[m_1^{k+1}(D)-m_2^{k+1}(D)]. \tag{22.3}$$

Следовательно,

$$\frac{M(D)}{D}\,L(D)\,P_k(D)\,\frac{1}{z}=\int\limits_{\infty z_0\zeta z}[l_1^{k+1}(D)-l_2^{k+1}(D)]\,[m_1^{k+1}(D)-m_2^{k+1}(D)]\,\frac{1}{z}\,dz. \tag{23.3}$$

Точно также

$$\frac{L(D)}{D}\,M(D)P_k(D)\,\frac{1}{z}=\int\limits_{\infty z_0\eta z}[l_1^{k+1}(D)-l_2^{k+1}(D)]\,[m_1^{k+1}(D)-m_2^{k+1}(D)]\,\frac{1}{z}\,dz, \tag{24.3}$$

где интегрирование проводится по пути $\infty z_0 \eta z$, не пересекающему параллелограммы $D_1A_1A_4D_4$ и $B_1C_1C_4B_4$. Вычитая (24.3) из (23.3), имеем

$$\left.\begin{aligned}&\frac{M(D)}{D}\,L(D)\,P_k(D)\,\frac{1}{z}-\frac{L(D)}{D}\,M(D)\,P_k(D)\,\frac{1}{z}=\\&=\int\limits_C[l_1^{k+1}(D)-l_2^{k+1}(D)]\,[m_1^{k+1}(D)-m_2^{k+1}(D)]\,\frac{1}{z}\,dz,\end{aligned}\right\} \tag{25.3}$$

где C — контур $z_0\zeta z\eta z_0$, заключающий внутри себя параллелограмм $D_1D_2D_3D_4$.

Рациональную функцию, стоящую под знаком последнего интеграла представим в виде

$$[l_1^{k+1}(D)-l_2^{k+1}(D)]\,[m_1^{k+1}(D)-m_2^{k+1}(D)]\,\frac{1}{z}=l_1^{k+1}(D)\,m_1^{k+1}(D)\,\frac{1}{z}+G(z). \tag{26.3}$$

Все полюсы рациональной функции $G(z)$ лежат в параллелограммах $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ и $C_1C_2C_3C_4$. Поэтому они все лежат вне контура C. Полюсы же функции $l_1^{k+1}(D)\,m_1^{k+1}(D)\,(1:z)$ лежат все в параллелограмме $D_1D_2D_3D_4$ и заодно в области, ограниченной контуром C. Таким образом, интеграл, стоящий в правой части (25.3), равен умноженной на $2\pi i$ сумме Ω всех вычетов функции $l_1^{k+1}(D)m_1^{k+1}(D)(1:z)$. Эта сумма Ω равна $l_1^{k+1}(0)\cdot m_1^{k+1}(0)$. Так как $L(0)=0$, то $l_1(0)=1-L(0)=1$. Точно также показываем, что $m_1(0)=1$. Значит $\Omega=1$, а левая часть (25.3) равна $2\pi i$, что и требовалось доказать.

Замечание. Интеграл, стоящий в правой части (20.3), представим в виде

$$\int\limits_{\infty z}Ke^{\chi D}\,M(D)\,\frac{1}{z}\,dz=\lim_{\xi\to\infty}\,[Ke^{\chi D}\,M(D)\ln z-Ke^{\chi D}\,M(D)\ln\xi],$$

где ξ — точка пути ∞z. В окрестности бесконечно удаленной точки фиксируем однозначную ветвь функции

$$Ke^{\chi D}\,M(D)\ln z=K\sum_{i=1}^{n}b_i\ln(z+\beta_i+\chi)=K\ln z\sum_{i=1}^{n}b_i+$$

$$+K\sum_{i=1}^{n}b_i\ln\left(1+\frac{\beta_i+\chi}{z}\right)=K\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\beta_i+\chi}{z}\right);$$

полагая $\ln 1=0$. Тогда

$$\lim_{\xi\to\infty} Ke^{\chi D} M(D)\ln\xi=0$$

и при $|z+\chi|>\rho$

$$\frac{M(D)}{D} Ke^{\chi D}\frac{1}{z}=\int\limits_{\infty z} Ke^{\chi D} M(D)\frac{1}{z}\,dz=Ke^{\chi D} M(D)\ln z,$$

где берется то значение функции $K\exp(\chi D)\,M(D)\ln z$, которое получается при непрерывном продолжении указанной однозначной ветви этой функции вдоль пути, не пересекающего круга $|z+\chi|<\rho$.

Пользуясь сказанным, получим, что вне параллелограммов $A_1A_2B_2B_1$ и $C_1C_2D_2D_1$

$$\frac{M(D)}{D} L(D)P_k(D)\frac{1}{z}=M(D)L(D)P_k(D)\ln z,$$

где берется та однозначная (вне указанных параллелограммов) ветвь многозначной функции из правой части последнего равенства, которая равна нулю при $z=\infty$. Для краткости такую ветвь обозначим в дальнейшем индексом 1 при знаке логарифма, так что

$$\frac{M(D)}{D} L(D)P_k(D)\frac{1}{z}=M(D)L(D)P_k(D)\ln_1 z. \tag{27.3}$$

Точно также показываем, что вне параллелограммов $A_1D_1D_4A_4$ и $C_1B_1B_4C_4$

$$\frac{L(D)}{D} M(D)P_k(D)\frac{1}{z}=L(D)M(D)P_k(D)\ln_2 z,$$

где индексом 2 у знака логарифма указывгем, что имеем в виду однозначную вне параллелограммов $D_1A_1A_4D_4$ и $C_1B_1B_4C_4$ ветвь функции $L(D)M(D)P_k(D)\ln z$, равную нулю в точке $z=\infty$. Эти равенства в соединении с (19.3) и (22.3) дают

$$\left.\begin{aligned}&[l_1^{k+1}(D)-l_2^{k+1}(D)]\,[m_1^{k+1}(D)-m_2^{k+1}(D)]\ln_2 z=\\&=[l_1^{k+1}(D)-l_2^{k+1}(D)]\,[m_1^{k+1}(D)-m_2^{k+1}(D)]\ln_1 z-2\pi i,\end{aligned}\right\} \tag{28.3}$$

когда z лежит внутри параллелограмма $A_3B_3C_3D_3$.

3. Другие коэффициенты $c_2, c_3, \ldots, c_k$ многочлена $P(z)$ вычислим таким же способом, как вычислили коэффициент c_1.

Функцию $H(z)$ представим в виде (11.3), а равенства (12.3) и (13.3) перепишем в виде (ср. с (16.3))

$$\frac{L(D)}{D^2} H_2''(z)=P(z)+\sum_{i=1}^{p}\delta_i e^{\mu_i z}P_i(z)-L(D)P_k(D)\frac{1}{z},$$

$$\frac{M(D)}{D^2} H_2''(z)=\sum_{i=1}^{p}(1-\delta_i)e^{\mu_i z}P_i(z)-M(D)P_k(D)\frac{1}{z}.$$

Действуя оператором $M(D):D^2$ на первое из этих равенств и оператором $L(D):D^2$ на второе, придем к тождеству (ср. с (18.3))

$$\frac{c_1M^{(k)}(0)}{k}z+\frac{c_1M^{(k+1)}(0)}{k(k+1)}+\frac{c_2M^{(k)}(0)}{k(k-1)}=$$

$$=\frac{M(D)}{D^2} L(D)P_k(D)\frac{1}{z}-\frac{L(D)}{D^2} M(D)P_k(D)\frac{1}{z}.$$

Далее, пользуясь (27.3) и (22.3), получаем (ср. с (23.3))

$$\frac{M(D)}{D^2} L(D) P_k(D) \frac{1}{z} = \int\limits_{\infty z_0 \zeta z} [l_1^{k+1}(D) - l_2^{k+1}(D)] [m_1^{k+1}(D) - m_2^{k+1}(D)] \ln_1 z\, dz,$$

где $\infty z_0 \zeta z$ путь, указанный на чертеже. Точно также

$$\frac{L(D)}{D^2} M(D) P_k(D) \frac{1}{z} = \int\limits_{\infty z_0 \eta z} [l_1^{k+1}(D) - l_2^{k+1}(D)] [m_1^{k+1}(D) - m_2^{k+1}(D)] \ln_2 z\, dz.$$

Из этих трех равенств и (28.3) следует (ср. с (25.3))

$$\left.\begin{aligned} &\frac{c_1 M^{(k)}(0)}{k} z + \frac{c_1 M^{(k+1)}(0)}{k(k+1)} + \frac{c_2 M^{(k)}(0)}{k(k-1)} \equiv \\ &\equiv \int\limits_C [l_1^{k+1}(D) - l_2^{k+1}(D)] [m_1^{k+1}(D) - m_2^{k+1}(D)] \ln z\, dz + 2\pi i (z - z_0), \end{aligned}\right\} \quad (29.3)$$

где C — контур $z_0 \zeta z \eta z_0$, а подынтегральная функция — какая-либо однозначная и непрерывная ветвь на разрезанном в точке z_0 контуре C от многозначной подынтегральной функции. Все такие ветви отличаются друг от друга на постоянные величины, так что выбор ветви не влияет на величину интеграла. Но заметим, что величина этого интеграла зависит от выбора начальной точки обхода контура C. В нашем случае начальная точка обхода — точка z_0.

Подынтегральную функцию представим в виде (ср. с (26.3))

$$[l_1^{k+1}(D) - l_2^{k+1}(D)] [m_1^{k+1}(D) - m_2^{k+1}(D)] \ln z = l_1^{k+1}(D)\, m_1^{k+1}(D) \ln z + G_1(z),$$

где $G_1(z)$ — однозначная и аналитическая функция как на контуре C, так и внутри его. Поэтому

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_C [l_1^{k+1}(D) - l_2^{k+1}(D)] [m_1^{k+1}(D) - m_2^{k+1}(D)] \ln z\, dz = \\ &= \int\limits_C l_1^{k+1}(D)\, m_1^{k+1}(D) \ln z\, dz. \end{aligned}\right\} \quad (30.3)$$

Чтобы вычислить последний интеграл, заметим, что $l_1^{k+1}(D)\, m_1^{k+1}(D) \ln z$ является суммой конечного числа функций вида $K \ln(z+\chi)$, где K и χ постоянные, а точка χ лежит в области, ограниченной контуром C, вычислим интеграл

$$I_\chi = \int\limits_C K \ln(z+\chi)\, dz = \int\limits_C K e^{\chi D} \ln z\, dz.$$

Этот интеграл равен изменению функции $K(z+\chi)[\ln(z+\chi) - 1]$ по пути $z_0 \zeta z \eta z_0$. Поэтому $I = 2K\pi i(z_0+\chi)$. Пользуясь этим, найдем

$$\int\limits_C l_1^{k+1}(D)\, m_1^{k+1}(D) \ln z\, dz = 2\pi i\, [l_1^{k+1}(0)\, m_1^{k+1}(0)\, z_0 + A],$$

где A означает значение производной от функции $l_1^{k+1}(t)\, m_1^{k+1}(t)$ в точке $t=0$. Значение $l_1^{k+1}(0)\, m_1^{k+1}(0)$, как уже было показано, равно единице, а число A, как покажем, равно нулю. В самом деле, из равенства (см. (10.1)) $l_1(t) = 1 - L(t)$ имеем $l_1'(0) = -L'(0) = 0$. Точно также и $m_1'(0) = 0$. Таким образом,

$$\int_C l_1^{k+1}(D)\, m_1^{k+1}(D) \ln z\, dz = 2\pi i z_0.$$

Это равенство в соединении с (29.3) и (30.3) дает

$$\frac{c_1 M^{(k+1)}(0)}{k(k+1)} + \frac{c_2 M^{(k)}(0)}{k(k-1)} = 0.$$

Аналогично показываем, что и при $l = 3, 4, \ldots, k$

$$\frac{M^{(k+l-1)}(0)\, c_1 (k-1)!}{(k+l-1)!} + \frac{M^{(k+l-2)}(0)\, c_2 (k-2)!}{(k+l-2)!} + \cdots + \frac{M^{(k)}(0)\, c_l (k-l)!}{k!} = 0.$$

5. Если характеристические функции $M(t)$ и $L(t)$ не имеют общих нулей, то H-функция, соответствующая паре операторов L и M, является по определению (см. лемму 1, § 2) решением системы (1). Кроме того, в фундаментальном параллелограмме П однозначно заданы полюсы и главные части H-функции. Поэтому в этом случае существует единственная H-функция, соответствующая паре операторов L и M. Если же характеристические функции $L(t)$ и $M(t)$ имеют общие нули (скажем, нули μ_i кратностей k_i, $i = 1, 2, \ldots, p$), то существует бесконечное множество H-функций, соответствующих паре операторов L и M. В самом деле, если $H_0(z)$ — какая либо H-функция и $u(z)$ — произвольное решение дифференциального уравнения (9), то и $H(z) = H_0(z) + u(z)$ является H-функцией. Покажем, что обратно разность любых двух H-функций, соответствующих одной и той же паре операторов L и M, является решением дифференциального уравнения (9).

По определению H-функций (см. лемма 2, § 2) разность двух H-функций регулярна в фундаментальном параллелограмме П. Кроме того, в этом параграфе мы показали, что все H-функции, соответствующие одной и той же паре операторов, имеют одинаковые остатки. Таким образом, разность двух H-функций является регулярным в фундаментальном параллелограмме П решением системы (1). По теореме 3 эта разность является также решением дифференциального уравнения (9).

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 25.III.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, М.—Л., 1952.
2. А. Г. Нафталевич, Мат. сб., 57 (99), 2, 1962.
3. Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, М.—Л, 1941.
4. Г. Полиа и Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, М., 1956.
5. P. Appell, E. Lacour, Principes de la théorie des fonctions elliptiques, Paris, 1922.
6. S. Bochner, Math. Zeitschrift, 33, 1931.
7. M. Ghermanesco, Acta math., 62, 1933.
8. A. Hurwitz, Acta math. 20, 1897; 22, 1899.
9. W. T. Martin, Acta math., 69, 1938.

VIENOS ERMITO TEOREMOS APIBENDRINIMAS

A. NAFTALEVIČIUS

(Reziumė)

Darbe nagrinėjami (1) lygčių sistemos analiziniai sprendiniai.

ERWEITERUNG EINES HERMITESCHEN SATZES

A. NAFTALEWITSCH

(Zusammenfassung)

Es werden die analytischen Lösungen des Gleichungsystems (1) untersucht.