V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1965

К ВОПРОСУ О РЕШЕНИИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

М. П. САПАГОВАС

В работе [1] был рассмотрен метод конечных разностей для квазилинейного эллиптического уравнения с дивергентной главной частью:

$$Lu=\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[b\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]-$$
$$-c\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \tag{1}$$

с однородным краевым условием

$$u|_\Gamma=0. \tag{2}$$

Для нахождения приближенного решения задачи (1), (2) была предложена разностная схема, имеющая в случае достаточно гладких коэффициентов уравнения (1) погрешность аппроксимации порядка $O(h)$.

В настоящей работе приводится некоторое обобщение и дальнейшее развитие результатов, полученных в [1]. Сначала рассмотрим вторую краевую задачу (задачу Неймана) для частного случая уравнения (1), затем исследуем разностную схему с погрешностью аппроксимации порядка $O(h^2)$.

Во всех принятых в этой работе обозначениях мы следуем статье [1].

1. Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(T^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(T^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right)-f(x,\ y)=0, \tag{3}$$

где

$$T^2=\left(\frac{\partial u}{dx}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{dy}\right)^2,$$
$$\mu(T^2)\geqslant\sigma>0, \tag{4}$$

в ограниченной области Ω с границей Γ при краевом условии:

$$\frac{\partial u}{\partial N}\Big|_\Gamma=0, \tag{5}$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial N}=\mu(T^2)\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\nu,\ x)+\mu(T^2)\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\nu,\ y),$$

ν – направление нормали к Γ.

Согласно (4), краевое условие (5) может быть записано в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Gamma=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\nu,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\nu,\ y)\Big|_\Gamma=0. \tag{6}$$

Пусть выполнено обычное условие разрешимости уравнения (3):

$$\iint\limits_\Omega f(x,\ y)\,dx\,dy=0.$$

Подчиним этому же условию и функцию u, т. е. будем искать решение u, удовлетворяющее условию

$$\iint\limits_{\Omega} u\,dx\,dy=0. \tag{7}$$

Предположим, что уравнение (3) является уравнением с ограниченными нелинейностями и удовлетворяет условию равномерной эллиптичности, т.е., что для него выполнены следующие неравенства [1]:

$$\alpha\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial a_i}{\partial p_j}\xi_i\xi_j\leqslant\beta\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2, \tag{8}$$

где

$$a_i=\mu\frac{\partial u}{\partial x_i},\quad (i=1,\ 2),\ x_1=x,\ x_2=y,\ p_1=\frac{\partial u}{\partial x},\ p_2=\frac{\partial u}{\partial y},\ \alpha \text{ и } \beta$$

— положительные постоянные.

Предположим также, что задача (3), (5) имеет единственное достаточно гладкое решение.

Покроем область Ω квадратной сеткой с шагом h и определим, как обычно, сеточные области Γ_h, Ω_h, $\overline{\Omega}_h$ [1]. В каждой точке $(i,\ j)\in\Omega_h$ заменяем уравнение (3) системой разностных уравнений:

$$\Lambda u_{hij}\equiv\nabla_x(\mu_{ij}\nabla_{\bar{x}}u_{hij})+\nabla_y(\mu_{ij}\nabla_{\bar{y}}u_{hij})-f_{ij}=0, \tag{9}$$

где

$$\mu_{ij}=\mu\left((\nabla_{\bar{x}}u_{hij})^2+(\nabla_{\bar{y}}u_{hij})^2\right),$$

$$\nabla_x u_{hij}=\frac{u_{hi+1,j}-u_{hij}}{h},\quad \nabla_y u_{hij}=\frac{u_{hi,j+1}-u_{hij}}{h},$$

$$\nabla_{\bar{x}} u_{hij}=\frac{u_{hij}-u_{hi-1,j}}{h},\quad \nabla_{\bar{y}} u_{hij}=\frac{u_{hij}-u_{hi,j-1}}{h}.$$

Нормальную производную на Γ заменяем следующим разностным аналогом [2]:

$$\frac{ku_{hij}-\sum\limits_{l=1}^{k}u_{hij}^{l}}{h}=0,\qquad (i,\ j)\in\Gamma_h, \tag{10}$$

где u_{hij}, u_{hij}^l — значения u_h в граничной точке $(i,\ j)$ и во внутренних точках, расстояние которых от точки $(i,\ j)$ равно h. Если точка $(i,\ j)$ является угловой и ни одна точка, удаленная от $(i,\ j)$ на расстояние h, не принадлежит Ω_h, то в качестве u_{hij}^l берутся точки, принадлежащие Γ_h и удаленные от $(i,\ j)$ на расстояние h. Очевидно, если $(i,\ j)$ не угловая точка, то $k=1$, если $(i,\ j)$ угловая точка, то $k=2$.

Подчиним искомую функцию u_{hij} условию:

$$h^2\sum_{(i,j)\in\Omega_h}u_{hij}=0. \tag{11}$$

Вводим следующие скалярные произведения:

$$(u_h, v_h) = h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h} u_{hij} v_{hij},$$

$$[u_h, v_h] = h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h^+} (\nabla_{\bar{x}} u_{hij} \nabla_{\bar{x}} v_{hij} + \nabla_{\bar{y}} u_{hij} \nabla_{\bar{y}} v_{hij}),$$

$$\langle u_h, v_h\rangle = h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h^+} (\nabla_{\bar{x}} u_{hij} \nabla_{\bar{x}} v_{hij} + \nabla_{\bar{y}} u_{hij} \nabla_{\bar{y}} v_{hij} + u_{hij} v_{hij}),$$

где Ω_h^+ определено в [1], и соответствующие им нормы:

$$\| u_h \|_1 = \sqrt{(u_h, u_h)}, \tag{12}$$

$$\| u_h \|_2 = \sqrt{[u_h, u_h]}, \tag{13}$$

$$\| u_h \|_3 = \sqrt{\langle u_h, u_h\rangle}. \tag{14}$$

Пусть Δ_h означает обычный пятиточечный разностный оператор Лапласа.

Теорема 1. *Если для уравнения* (3) *имеют место неравенства* (8), *то при каждом* $h>0$ *найдется такое* $\lambda_1>0$, *что для любого* $0<\lambda<\lambda_1$ *и любого начального приближения* $u_h^{(0)}$, *удовлетворяющего условиям* (1), (11), *итерационный процесс*

$$\Delta_h u_{hij}^{(n)} - u_{hij}^{(n)} = \Delta_h u_{hij}^{(n-1)} - u_{hij}^{(n-1)} - \lambda A u_{hij}^{(n-1)}, \quad (i, j)\in\Omega_h, \tag{15}$$

где $u_{hij}^{(n)}$ *удовлетворяет условиям* (1), (11), *сходится в норме* (14) *к единственному решению системы* (9), (10), (11) *со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем* $q\,(0<q<1)$, *не зависящим от* h.

Доказательство. Согласно формуле суммирования по частям [1] и определению скалярного произведения $\langle u_h, v_h\rangle$, систему (15) можно записать в эквивалентном ей виде:

$$\langle u_h^{(n)}, v_h\rangle = \langle A u_h^{(n-1)}, v_h\rangle,$$

где v_h — произвольная сеточная функция, удовлетворяющая условиям (10), (11),

$$\langle A u_h, v_h\rangle = \langle u_h, v_h\rangle - \lambda \sum_{(i,j)\in\Omega_h^+} (\mu_{ij} \nabla_{\bar{x}} u_{hij} \nabla_{\bar{x}} v_{hij} +$$

$$+ \mu_{ij} \nabla_{\bar{y}} u_{hij} \nabla_{\bar{y}} v_{hij} + f_{ij} v_{hij}).$$

Отсюда следует, что

$$(1-\lambda\beta) \langle z_h, z_h\rangle \leqslant \langle A u_h - A v_h, z_h\rangle \leqslant (1-\lambda\alpha) \langle z_h, z_h\rangle, \tag{16}$$

где $z_h = u_h - v_h$. Следовательно*), для любого $0<\lambda<\lambda_1$, при $\lambda_1 = 2/\beta$,

$$\| A u_h - A v_h \|_3 \leqslant q \| u_h - v_h \|_3,$$

где

$$q = \max \{ |1-\lambda\alpha|, |1-\lambda\beta| \} < 1, \tag{17}$$

т. е. что оператор A является оператором сжатия. Это и доказывает сходимость итерационного процесса (15).

---

*) Здесь используется тот факт, что производная Гато оператора A является самосопряженным оператором, что обеспечивается видом уравнения (3).

Быстрота сходимости может быть оценена неравенством:

$$\| u_h - u_h^{(n)} \|_3 \leqslant \frac{q^n}{1-q} \| u_h^{(1)} - u_h^{(0)} \|_3, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{18}$$

Теорема доказана.

Следствие. *Итерационный процесс* (15) *сходится также и в среднем, причем быстрота сходимости оценивается неравенством:*

$$\| u_h - u_h^{(n)} \|_1 \leqslant \frac{q^n}{1-q}\, \eta, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{19}$$

где

$$\eta = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \| u_h^{(1)} - u_h^{(0)} \|_3,$$

a — длина стороны квадрата, содержащего в себе область Ω_h.

Действительно, применяя к левой части неравенства (18) неравенство Фридрихса в разностном виде [1], получаем (19), что и означает сходимость в среднем.

Сходимость разностной схемы (9), (10) доказывается вполне аналогично сходимости разностной схемы в случае задачи Дирихле [1].

2. Рассмотрим сейчас следующую разностную схему для уравнения (1):

$$\Lambda^\circ u_{hij} = \nabla_{\overset{\circ}{x}} a_{ij} + \nabla_{\overset{\circ}{y}} b_{ij} - c_{ij} = 0, \tag{20}$$

где

$$\nabla_{\overset{\circ}{x}} a_{ij} = \frac{a_{i+1/2,\,j} - a_{i-1/2,\,j}}{h}, \quad \nabla_{\overset{\circ}{y}} b_{ij} = \frac{b_{i,\,j+1/2} - b_{i,\,j-1/2}}{h},$$

$$a_{i+1/2,\,j} = a\left(x_{i+1/2},\ y_i,\ \frac{u_{hi+1,\,j} + u_{hij}}{2},\ \nabla_x u_{hij},\ \frac{\nabla_{\bar y} u_{hi+1,\,j} + \nabla_y u_{hij}}{2}\right),$$

$$b_{i,\,j+1/2} = b\left(x_i,\ y_{j+1/2},\ \frac{u_{hi,\,j+1} + u_{hij}}{2},\ \frac{\nabla_{\bar x} u_{hi,\,j+1} + \nabla_x u_{hij}}{2},\ \nabla_y u_{hij}\right),$$

$$c_{ij} = c\left(x_i,\ y_j,\ u_{hij},\ \frac{\nabla_x u_{hij} + \nabla_{\bar x} u_{hij}}{2},\ \frac{\nabla_y u_{hij} + \nabla_{\bar y} u_{hij}}{2}\right).$$

С помощью разложения функций a, b, c и u по формуле Тейлора получаем, что

$$|(Lu)_{ij} - \Lambda^\circ u_{ij}| \leqslant Ch^2,$$

где C не зависит от h, т.е. что разностная схема (20) имеет погрешность аппроксимации $O(h^2)$.

Краевое условие (2) заменяем следующим разностным аналогом:

$$u_{hij} = 0, \qquad (i,\ j) \in \Gamma_h. \tag{21}$$

Покажем, что все основные результаты работы [1] остаются справедливыми и для разностной схемы (20), если только наложить некоторое ограничение на малость шага сетки h.

Пусть для уравнения (1) выполнены неравенства:

$$\alpha \sum_{i=0}^{2} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j=0}^{2} \frac{\partial a_i}{\partial p_j} \xi_i \xi_j \leqslant \beta \sum_{i=0}^{2} \xi_i^2, \tag{22}$$

где $\partial/\partial p_0 = \partial/\partial u$.

Теорема 2. *Если для уравнения* (1) *имеют место неравенства* (22), *то найдутся такие $h_1 > 0$ и $\lambda_1 > 0$, что для каждого $0 < h < h_1$ и $0 < \lambda < \lambda_1$ и* *любого начального приближения* $u_h^{(0)}$, *удовлетворяющего граничному условию* (21), *итерационный процесс*:

$$\Delta_h u_{hij}^{(n)} = \Delta_h u_{hij}^{(n-1)} - \lambda \Lambda^\circ u_{hij}^{(n-1)}, \qquad (i,\ j) \in \Omega_h, \tag{23}$$
$$u_{hij}^{(n)} = 0, \qquad (i,\ j) \in \Gamma_h$$

сходится в норме (13) *к единственному решению системы* (20), (21), *со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем* q $(0<q<1)$, *не зависящим от* h.

Доказательство. Запишем (23) в виде одного операторного уравнения:

$$u_h^{(n)} = A u_h^{(n-1)},$$

где $A = \Delta_h^{-1}(E - \lambda\Lambda^\circ)$. Рассмотрим скалярное произведение $[w_h,\ z_h]$, где $w_h = \Delta_h^{-1}(\Lambda^\circ u_h - \Lambda^\circ v_h)$, $z_h = u_h - v_h$. Применяя формулу суммирования по частям [1], получаем:

$$[w_h,\ z_h] = h^2 \sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,j)\in\Omega_h^+} \nabla_{\bar{x}_k} w_{hij} \nabla_{\bar{x}_k} z_{hij} = -h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h^-} z_{hij}(\Lambda^\circ u_{hij} - \Lambda^\circ v_{hij}) =$$
$$= -h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h^-} z_{hij} [\nabla_{\bar{x}}^{\circ} \{a_{ij}(u_h) - a_{ij}(v_h)\} + \nabla_{\bar{y}}^{\circ} \{b_{ij}(u_h) - b_{ij}(v_h)\} -$$
$$- \{c_{ij}(u_h) - c_{ij}(v_h)\}]. \tag{24}$$

Разобьем эту сумму на три суммы согласно трем слагаемым, стоящим в квадратных скобках и преобразуем сначала первую из этих сумм. Применяя формулу суммирования по частям [1], получаем:

$$S_1 = -h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h^-} z_{hij} \nabla_{\bar{x}}^{\circ} \{a_{ij}(u_h) - a_{ij}(v_h)\} = h^2 \sum_{(i,j)\in\Omega_h^+} \left\{ \frac{\partial \tilde{a}_{i-1/2,j}}{\partial u} \frac{z_{hij} + z_{hi-1,j}}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \tilde{a}_{i-1/2,j}}{\partial p_1} \nabla_{\bar{x}} z_{hij} + \frac{\partial \tilde{a}_{i-1/2,j}}{\partial p_2} \frac{\nabla_{\bar{y}} z_{hij} + \nabla_y z_{hij}}{2} \right\} \nabla_{\bar{x}} z_{hij},$$

где знак тильда ($\sim$) означает, что соответствующие функции берутся при некоторых промежуточных значениях аргументов согласно формуле Лагранжа.

Так как $z_{hij} = 0$, если $(i,\ j) \in \Gamma_h$, то

$$\sum_{(i,j)\in\Omega_h^+} \frac{\partial \tilde{a}_{i-1/2,j}}{\partial u} (\nabla_{\bar{x}} z_{hij}) z_{hi-1,j} = \sum_{(i,j)\in\Omega_h^-} \frac{\partial \tilde{a}_{i+1/2,j}}{\partial u} (\nabla_x z_{hij}) z_{hij}.$$

После аналогичного преобразования остальных двух слагаемых суммы S_1 и двух других сумм из выражения (24), получаем:

$$[w_h,\ z_h] = \frac{h^2}{2} \sum_{(i,j)\in\Omega_h^+} \sum_{k,l=0}^{2} \left(\frac{\partial \tilde{a}_{ij}^{(k)}}{\partial p_l} + r_{kl} \right) \nabla_{\bar{x}_k} z_{hij} \nabla_{\bar{x}_l} z_{hij} +$$
$$+ \frac{h^2}{2} \sum_{(i,j)\in\Omega_h^-} \sum_{k,l=0}^{2} \left(\frac{\partial \tilde{a}_{ij}^{(k)}}{\partial p_l} + r_{kl} \right) \nabla_{x_k} z_{hij} \nabla_{x_l} z_{hij}, \tag{25}$$

где

$$x_1=x,\quad x_2=y,\quad \nabla_{x_0} z_{hij}\equiv\nabla_{\bar{x}_0} z_{hij}\equiv z_{hij},$$

$$a_{ij}^{(1)}=a_{ij},\quad a_{ij}^{(2)}=b_{ij},\quad a_{ij}^{(0)}=c_{ij},\quad |r_{kl}|\leqslant Ch,$$

C зависит от максимумов модулей вторых производных a, b и c, которые предполагаются ограниченными, т.е. C конечна.

Введем обозначения:

$$[B_s z_h,\ z_h']=\frac{h^2}{2}\sum_{(i,j)\in\Omega_h^+}\sum_{k,l=0}^{2} b_{kl}^s\nabla_{\bar{x}_k} z_{hij}\nabla_{\bar{x}_l} z_{hij}'+$$

$$+\frac{h^2}{2}\sum_{(i,j)\in\Omega_h^-}\sum_{k,l=0}^{2} b_{kl}^s\nabla_{x_k} z_{hij}\nabla_{x_l} z_{hij}',\qquad (s=1,\ 2),$$

где

$$b_{kl}^1=\frac{\partial\bar{a}_{ij}^{(k)}}{\partial p_l},\quad b_{kl}^2=r_{kl}.$$

Используя условие Липшица для нелинейного функционала, получаем:

$$\|Au_h-Av_h\|_2\leqslant\|E-\lambda U(\tilde{u}_h)\|\cdot\|u_h-v_h\|_2\leqslant(\|E-\lambda B_1\|+\lambda\|B_2\|)\|z_h\|_2,$$

где $U(\tilde{u}_h)$ – производная Гато оператора $\Delta_h^{-1}\Lambda^0$ в точке $\tilde{u}_h$.

Предположим сначала, что выполнено условие

$$\frac{\partial a_i}{\partial p_j}=\frac{\partial a_j}{\partial p_i},\tag{26}$$

т.е., что B_1 – самосопряженный оператор. По методике доказательства теоремы 1, получаем:

$$[1-\lambda\beta(1+a^2)z_h,\ z_h]\leqslant[(E-\lambda B_1)z_h,\ z_h]\leqslant(1-\lambda\alpha)[z_h,\ z_h]$$

или

$$|[(E-\lambda B_1)z_h,\ z_h]|\leqslant q_1\|z_h\|_2,$$

где

$$q_1=\max\{|1-\lambda\alpha|,\ |1-\lambda\beta(1+a^2)|\}.$$

Следовательно

$$\|E-\lambda B^1\|\leqslant q_1.\tag{27}$$

Далее, используя неравенство Коши—Буняковского, заключаем:

$$|[B_2 z_h,\ z_h']|\leqslant\max|r_{kl}|\cdot 3\|z_h\|_3\cdot\|z_h'\|_3\leqslant 3Ch(1+a^2)\|z_h\|_2\cdot\|z_h'\|_2,$$

откуда ввиду произвольного выбора элементов z_h и z_h' следует, что

$$\|B_2\|\leqslant 3Ch(1+a^2).\tag{28}$$

Таким образом

$$\|Au_h-Av_h\|_2\leqslant q\|u_h-v_h\|_2,\tag{29}$$

где

$$q=q_1+3Ch(1+a^2)\lambda.$$

Выберем $h_1=\alpha/3C(1+a^2)$. Тогда для любого $0<h<h_1$

$$q=\max\{|1-\lambda\alpha|+3Ch\lambda(1+a^2),\ |1-\lambda\beta(1+a^2)|+3Ch\lambda(1+a^2)\}<1,$$

если только

$$0<\lambda<\lambda_1=2/(\beta+3Ch)(1+a^2).$$

Пусть теперь условие (26) не выполнено. Воспользовавшись неравенством Коши—Буняковского и условием (см. [1]) $\left|\frac{\partial a_i}{\partial p_j}\right|\leqslant K$, получаем:

$$[B_1 z_h,\ B_1 z_h]\leqslant\gamma(1+a^2)\|B_1 z_h\|_2\cdot\|z_h\|_2$$

или

$$\| B_1 z_h \|_2 \leqslant \gamma (1+a^2) \| z_h \|_2,$$

где $\gamma = 3K$. Отсюда заключаем:

$$[(E-\lambda B_1) z_h, \ (E-\lambda B_1) z_h] = [z_h, \ z_h] - 2\lambda [B_1 z_h, \ z_h] + \lambda^2 [B_1 z_h, \ B_1 z_h] \leqslant q_1^2 \| z_h \|_2^2,$$

где

$$q_1 = \sqrt{1 - 2\alpha\lambda + \gamma^2 (1+a^2)^2 \lambda^2}. \tag{30}$$

Следовательно, снова имеет место неравенство (29), где

$$q = q_1 + 3Ch (1+a^2) \lambda < 1,$$

если только

$$0 < \lambda < \lambda_1 = \frac{2\alpha - 6Ch (1+a^2)}{\gamma^2 (1+a^2)^2 - 9C^2 h^2 (1+a^2)^2},$$

$$0 < h < h_1 = \frac{\alpha}{3C (1+a^2)}.$$

Теорема доказана.

Применяя неравенство Фридрихса в разностном виде, заключаем, что итерационный процесс (23) сходится также и в среднем.

Замечание. Невыполнение условия (26) не меняет качественной картины сходимости итерационного процесса, а накладывает лишь, вообще говоря, более жесткие ограничения на λ и q. При этом, методика доказательства, используемая в теореме 1, является недостаточной и приходится прибегать к более грубым оценкам, использованным при доказательстве теоремы 2. Это относится также к работе [1], где была использована лишь методика доказательства теоремы 1.

Сходимость разностной схемы (20) доказывается также, как и в работе [1]. При этом следует отметить, что если погрешность аппроксимации краевого условия имеет порядок $O(h^2)$, то и разностная схема (20) сходится со скоростью $O(h^2)$.

Все, изложенное выше, может быть без каких-либо существенных изменений перенесено на любое число пространственных измерений.

Институт Физики и математики
Академии Наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
1.III.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. М. П. Сапаговас, Решение квазилинейных эллиптических уравнений методом конечных разностей, Лит. мат. сб., 1965, 5, № 2, 291—302.
2. В. И. Лебедев, Решение задачи Неймана методом сеток, в сб.: «Вопросы вычисл. матем. и вычисл. техники», М., Машгиз, 1963, 94—98.

KVAZITIESINIŲ ELIPSINIO TIPO LYGČIŲ SPRENDIMO BAIGTINIŲ SKIRTUMŲ METODU KLAUSIMU

M. P. SAPAGOVAS

(Reziumė)

Šio darbo tikslas — apibendrinti ir toliau išvystyti [1] darbo rezultatus. Baigtinių skirtumų metodu sprendžiamas Neumano uždavinys kvazitiesinei elipsinio tipo lygčiai. Įvedama nauja skirtuminė schema, turinti antros eilės paklaidą.

ON THE SOLUTION OF QUASILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS BY FINITE-DIFFERENCE METHOD

M. SAPAGOVAS

(Summary)

The purpose of this paper is a generalization and further development of the results of paper [1]. The author considers a finite-difference method for solving of Neumann problem for quasilinear elliptic equations. The new difference scheme of second — order accuracy is given.