VI ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
1966

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ПОЯВЛЕНИЙ РЕКУРРЕНТНОГО СОБЫТИЯ

А. АЛЕШКЯВИЧЕНЕ

Рассматривается схема рекуррентных событий, связанных с некоторой последовательностью испытаний. Пусть $\mathscr{E}$ – какое либо рекуррентное событие, а p_k – вероятность того, что $\mathscr{E}$ впервые произойдет при k-том испытании.

Событие $\mathscr{E}$ называется регулярным, если в бесконечной последовательности испытаний оно осуществляется с вероятностью 1, т. е. если

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

Если $\mathscr{E}$ – регулярное событие, то можно ввести случайные величины X_r $(r=1, 2, \dots)$, означающие число испытаний между $(r-1)$-м и r-м осуществлениями события $\mathscr{E}$, которые принято называть временем возвращения, для которых, очевидно,

$$P\{X_r = k\} = p_k, \quad r = 1, 2, \dots$$

В дальнейшем речь будет идти только о регулярных рекуррентных событиях.

Событие $\mathscr{E}$ называется периодическим с периодом h, если общий наибольший делитель тех ν, для которых $p_\nu > 0$, равен числу $h > 1$, и непериодическим – в противоположном случае.

Число появлений события $\mathscr{E}$ в первых $n-1$ испытаниях обозначим через N_n. В. Феллер [1] показал, что если время возвращения рекуррентного события имеет конечную дисперсию σ^2, то при любом фиксированном x и $n \to \infty$

$$F_n(x) = P\left\{ \frac{N_n - \frac{n}{\mu}}{\tilde{\sigma}\sqrt{n}} < x \right\} \to \Phi(x),$$

где $\mu_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k$, $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\mu_1^{\frac{3}{2}}}$, а $\Phi(x)$ – функция нормального распределения. В работах [2] и [3] рассматривалась предельная теорема для случайной величины N_n. В настоящей заметке получаются асимптотические разложения по степеням $\frac{1}{\sqrt{n}}$ для $F_n(x)$ и для вероятностей $P\{N_n = kh\}$.

Теорема 1. *Если рекуррентное событие является периодическим с периодом* $h \geqslant 1$ (*в случае* $h=1$ *событие называется непериодическим*) *и время возвращения рекуррентного события имеет конечные моменты до порядка* $r\,(r \geqslant 3)$ *включительно, то*

$$P\{N_n=k\}=\frac{h}{\bar{\sigma}\sqrt{n}}\left\{\varphi(x_{ns})+\sum_{\nu=1}^{r-2}\frac{1}{n^{\frac{\nu}{2}}}P_\nu\Big(-\varphi(x_{ns})\Big)+o\left(\frac{1}{n^{\frac{k-1}{2}}}\right)\right\}.$$

Здесь $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ — плотность нормального распределения,

$$x_{ns}=\frac{sh-\frac{n}{\mu_1}}{\bar{\sigma}\sqrt{n}}$$

и $P_\nu(-u)$ есть полином степени 3ν относительно u, коэффициенты которого зависят от первых $\nu+2$ моментов времени возвращения, а $P_\nu\Big(-\varphi(x)\Big)$ вычисляется как $P_\nu(-u)$ с заменой u^r на

$$\varphi^{(r)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d^r}{dx^r}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Далее введем следующие функции (см. [5])

$$S_1(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu\pi};$$

$$S_2(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos 2\nu\pi x}{2(\nu\pi)^2};$$

— — — — — — — — — — — —

$$S_{2k}(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos 2\nu\pi x}{2^{2k-1}(\nu\pi)^{2k}};$$

$$S_{2k+1}(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 2\nu\pi x}{2^{2k}(\nu\pi)^{2k+1}}.$$

Все эти функции являются периодическими с периодом 1. Для $0 \leqslant x < 1$ имеют место следующие соотношения:

$$S_1(x)=-x+\frac{1}{2};\quad S_2(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{12};\quad S_3(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{12};\ \ldots$$

Теперь мы можем сформулировать следующие теоремы.

Теорема 2. *Если рекуррентное событие является периодическим с периодом* $h \geqslant 1$ *и время возвращения рекуррентного события имеет конечный третий момент, то равномерно по* x

$$F_n(x)=\Phi(x)+\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi n}}\left(Q_1(x)+\frac{h}{\bar{\sigma}}S_1\left(\frac{(x+a_n)\,\bar{\sigma}\sqrt{n}}{h}\right)\right)+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где

$$Q_1(x) = \frac{1}{6\tilde{\sigma}^3} \cdot \frac{\mu_1^4 + 3\mu_2^2 - 3\mu_1^2\mu_2 - \mu_1\mu_3}{\mu_1^5} (1-x^2) + \frac{1}{\tilde{\sigma}}\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{\sigma^2 - \mu_1 - \mu_1^2}{\mu_1^3}\right],$$

$$a_n = \frac{n}{\mu} \cdot \frac{1}{\tilde{\sigma}\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad \mu_j = \sum_{k=1}^{\infty} k^j p_k, \qquad j = 1,\ 2,\ 3.$$

Теорема 3. *Если рекуррентное событие является периодическим с периодом $h \geqslant 1$ и время возвращения рекуррентного события имеет конечные моменты до порядка $r\,(r \geqslant 3)$ включительно, то*

$$F_n(x) = \Phi(x) + \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu=1}^{r-2} \frac{Q_\nu(x)}{n^{\frac{\nu}{2}}} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{r-2} m_\nu \cdot \left(\frac{h}{\tilde{\sigma}\sqrt{n}}\right)^\nu S_\nu\left\{\frac{(x+a_n)\,\tilde{\sigma}\sqrt{n}}{h}\right\} \frac{d^\nu}{dx^\nu}\left[\Phi(x) + \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu=1}^{r-2} \frac{Q_\nu(x)}{n^{\frac{\nu}{2}}}\right] +$$

$$+ o\left(\frac{1}{n^{\frac{r-2}{2}}}\right).$$

Здесь $\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} Q_\nu(x) = P_\nu(-\Phi)$, где $P_\nu\big(-\Phi(x)\big)$ вычисляется как в теореме 2, и

$$m_\nu = \begin{cases} +1 & \text{для } \nu, \text{ имеющих вид } 4k+1,\ 4k+2, \\ -1 & \text{для } \nu, \text{ имеющих вид } 4k-1,\ 4k. \end{cases}$$

Доказательство теорем 1—3. Для доказательства теорем 1—3 будет нужна следующая лемма.

Лемма. *Если время возвращения рекуррентного события имгет конечные моменты до r-того порядка включительно ($r \geqslant 3$), то при $|t| \leqslant \sqrt{r \ln n} = T_{nr}$ для характеристической функции $f_n(t) = \int e^{itx}\,dF_n(x)$ имеет место соотношение*

$$e^{\frac{t^2}{2}} \overline{f}_n(t) = \left[1 + \sum_{\nu=1}^{r-2} P_\nu(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu\right]\left[1 + O\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)\right] + \frac{c_r}{(\sqrt{n})^{r-2}}\,\delta(n)\,(|t|^r + |t|^{3(r-2)}), \quad (1)$$

где $P_\nu(it)$ есть полином степени 3ν относительно it, коэффициенты которого зависят только от первых $k+2$ моментов времени возвращения, c_r — постоянное, зависящее только от r и $\delta(n)$ — функция, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$.

Доказательство леммы. Введем производящую функцию

$$P(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} s^\nu p_\nu.$$

Тогда, если

$$q_k = \sum_{\nu=k+1}^{\infty} p_\nu$$

и

$$Q(s)=\sum_{k=0}^{\infty} s^k q_k,$$

то известно (см. [1]), что

$$1-P(s)=(1-s)\,Q(s),$$

$$\mu_1=P'(1)=Q(1)$$

и

$$P''(1)=2Q'(1)=\sigma^2-\mu_1+\mu_1^2.$$

И вообще, как нетрудно видеть, $P^{(\nu)}(1)$ выражается через первые ν моментов времени возвращения.

Характеристическая функция величины N_n, которую обозначим через $f_n(t)$, есть коэффициент при s^{n-1} в разложении

$$\frac{1-P(s)}{(1-s)\left(1-e^{it}P(s)\right)}=\frac{Q(s)}{1-e^{it}P(s)} \tag{2}$$

по степеням s. Но так как нас будет интересовать только коэффициент при s^{n-1}, то вместо выражения (1) мы можем рассмотреть выражение

$$\frac{Q_n(s)}{1-e^{it}P_n(s)},$$

где

$$P_n(s)=\sum_{k=1}^{n} s^k p_k \quad \text{и} \quad Q_n(s)=\sum_{k=1}^{n} s^k q_k.$$

Пусть, далее, $s_n(t)$ является корнем уравнения

$$1-e^{it}P_n(s)=0, \tag{3}$$

т. е. $1-e^{it}P_n(s_n(t))\equiv 0$. Нетрудно видеть, что при $t=0$ уравнение (3) имеет наименьший по модулю положительный корень $s_n(0)=1+\delta_n$, где $\delta_n\leqslant\frac{c}{n^r}$. Далее, так как $P_n'(s_n(0))=\mu_n\neq 0$, то $s_n(0)$ является простым корнем. Следовательно, мы можем воспользоваться теоремой о неявных функциях (см., напр., [7], стр. 354), согласно которой существует окрестность $|t|<\Delta_n$, $|s-s_n(0)|<\Delta_n'$ точки $\left(t=0,\ s_n(0)=1+\delta_n\right)$, в которой уравнение (3) имеет для каждого t один и только один корень $s_n(t)$. Этот корень является однозначной аналитической функцией в круге $|t|<\Delta_n$ и представляет неявную функцию, определяемую уравнением (4) и дополнительным условием $s_n(0)=1+\delta_n$.

Следуя доказательству теоремы о неявных функциях, можно показать, что в нашем случае $\Delta_n\geqslant\bar{\Delta}_n=\frac{\sqrt{r\ln n}}{\sqrt{n}}$. Тогда при всех $|t|\leqslant\bar{\Delta}_n$ справедливо разложение

$$s_n(t)=1+\delta_n+s_n'(0)\,t+\frac{s_n''(0)}{2!}\,t^2+\cdots+\frac{s_n^{(r)}(0)}{r!}\,t^r+o(|t|^r).$$

Для вычисления производных $s_n'(0), \ldots, s_n^{(r)}(0)$ воспользуемся уравнениями

$$
\begin{aligned}
&P_n\Big(s_n(t)\Big) \equiv e^{-it},\\
&s_n'(t)\,P_n'\Big(s_n(t)\Big) = -ie^{-it},\\
&s_n''(t)\,P_n'\Big(s_n(t)\Big) + s_n'^2(t)\,P_n''\Big(s_n(t)\Big) = (-i)^2 e^{-it},\\
&s_n'''(t)\,P_n'\Big(s_n(t)\Big) + s_n''(t)\,s_n'(t)\,P_n''\Big(s_n(t)\Big) + 2s_n'(t)\,s_n''(t)\,P_n''\Big(s_n(t)\Big) +\\
&+ s_n'^3(t)\,P_n'''\Big(s_n(t)\Big) = (-i)^3 e^{-it},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Отсюда, при $t=0$, получаем

$$
\begin{aligned}
s_n'(0) &= -\frac{i}{m_n},\\
s_n''(0) &= -\frac{P_n''(1+\delta_n)-m_n^2}{m_n^3}\,i^2,\\
s_n'''(0) &= -\frac{1}{m_n}\left[1+3\frac{P_n''(1+\delta_n)-m_n^2}{m_n^4}\,P_n''(1+\delta_n) - \frac{P_n'''(1+\delta_n)}{m_n^3}\right]i^3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

где

$$
m_n = \sum_{k=1}^{n} kp_k.
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
s_n(t) = 1+\delta_n - \frac{1}{m_n}\,it - \frac{P_n''(1+\delta_n)-m_n^2}{m_n^3}\,\frac{(it)^2}{2} -\\
-\left[\frac{1}{m_n} + 3\,\frac{P_n''(1+\delta_n)-m_n^2}{m_n^5}\,P_n''(1+\delta_n) - \frac{P_n'''(1+\delta_n)}{m_n^4}\right]\frac{(it)^3}{6} + \cdots +\\
+\frac{R_1\big(P_n'(1+\delta_n), \ldots, P_n^{(r)}(1+\delta_n)\big)}{r!}\,(it)^r + o(|t|^r),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $R_1(u_1, \ldots, u_r)$ — рациональная функция от $u_1, \ldots, u_r$.

Далее, так как

$$
1-e^{it}P_n(s) = 1-e^{it}P_n(s) - \Big[1-e^{it}P_n\Big(s_n(t)\Big)\Big] = -e^{it}\Big[P_n(s)-P_n\Big(s_n(t)\Big)\Big]
$$

и при $|t| \leqslant \Delta_n$ P_n'

$$
\Big(s_n(t)\Big) \neq 0 \quad \text{и} \quad Q_n\Big(s_n(t)\Big) \neq 0,
$$

то

$$\frac{Q_n(s)}{1-e^{it}P_n(s)}=-e^{it}\frac{Q_n(s)}{P_n(s)-P_n\big(s_n(t)\big)}=-e^{it}\frac{Q_n\big(s_n(t)\big)}{P'_n\big(s_n(t)\big)}\cdot\frac{1}{s-s_n(t)}-$$

$$-e^{-it}\frac{Q_n(s)P'_n\big(s_n(t)\big)\big(s-s_n(t)\big)-Q_n\big(s_n(t)\big)\big[P_n(s)-P_n\big(s_n(t)\big)\big]}{\big(s-s_n(t)\big)\big[P_n(s)-P_n\big(s_n(t)\big)\big]P'_n\big(s_n(t)\big)}=$$

$$=-e^{-it}\frac{Q_n\big(s_n(t)\big)}{P'_n\big(s_n(t)\big)}\ \frac{1}{s-s_n(t)}\Bigg[1+$$

$$+\frac{Q'_n\big(s_n(t)\big)P'_n\big(s_n(t)\big)+Q_n\big(s_n(t)\big)P''_n\big(s_n(t)\big)}{Q_n\big(s_n(t)\big)P'_n\big(s_n(t)\big)}\Bigg]\big(s-s_n(t)\big)+$$

$$+\cdots+R_2(n,r,t)\big(s-s_n(t)\big)^{r-1}+O\left(\left|\big(s-s_n(t)\big)^{r-1+\varepsilon_n}\right|\right) \qquad (5)$$

для всех $|t|\leqslant\tilde{\Delta}_n$. Здесь $R_2(n,r,t)$ — рациональная функция от

$$Q_n\big(s_n(t)\big),\ \ldots,\ Q_n^{(2-1)}\big(s_n(t)\big),\ P_n\big(s_n(t)\big),\ \ldots,\ P_n^{(r)}\big(s_n(t)\big),$$

а постоянное ε_n может зависеть от n и $0<\varepsilon_n<1$.

Теперь уже нетрудно найти характеристическую функцию $f_n(t)$ величины N_n как коэффициент при s^{n-1} правой части выражения (5). Итак

$$f_n(t)=e^{-it}\frac{Q_n\big(s_n(t)\big)}{P'_n\big(s_n(t)\big)}\ s_n^{-n}(t)\left[1+o\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)\right]. \qquad (6)$$

Далее, разложим по степеням it выражение $\dfrac{Q_n\big(s_n(t)\big)}{P'_n\big(s_n(t)\big)}$. Имеем

$$\frac{Q_n\big(s_n(t)\big)}{P'_n\big(s_n(t)\big)}=\alpha_{0n}+\alpha_{1n}it+\frac{\alpha_{2n}}{2!}(it)^2+\cdots+\frac{\alpha_{r-2,n}}{(r-2)!}(it)^{r-2}+o(|t|^{r-2}), \qquad (7)$$

где

$$\alpha_{0n}=\frac{Q_n(1+\delta_n)}{P'_n(1+\delta_n)}=\frac{\mu_1+O(n^{-r+1})}{\mu_1+O(n^{-r+1})}=1+O\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right),$$

$$\alpha_{1n}=i^{-1}\left[\frac{Q_n\big(s_n(t)\big)}{P'_n\big(s_n(t)\big)}\right]'_{t=0}=-\frac{1}{2}\ \frac{\sigma^2-\mu_1+\mu_1^2}{\mu_1^3}+O\left(\frac{1}{n^{r-2}}\right) \qquad (8)$$

и

$$\alpha_{kn}=i^{-k}\left[\frac{Q_n\big(s_n(t)\big)}{P'_n\big(s_n(t)\big)}\right]^{(k)}_{t=0}=\alpha_k(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k)+O\left(\frac{1}{n^{r-k-1}}\right), \qquad (9)$$

$$k=2,\ \ldots,\ r-2.$$

Из соотношений (7) — (9) следует, что

$$\frac{Q_n\big(s_n(t)\big)}{P_n\big(s_n(t)\big)}=1-\frac{1}{2}\ \frac{\sigma^2-\mu_1+\mu_1^2}{\mu_1^3}\ it+\frac{\alpha_2(\mu_1,\mu_2)}{2!}(it)^2+\cdots+$$

$$+\frac{\alpha_{k-2}(\mu_1,\ldots,\mu_{r-2})}{(r-2)!}(it)^{r-2}+o(|t|^{r-2})+O\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right). \qquad (10)$$

Аналогично из (4) получаем, что

$$s_n(t)=1-\frac{1}{\mu_1}it-\frac{P''(1)-\mu_1^2}{\mu_1^3}\ \frac{(it)^2}{2}-\left[\frac{1}{\mu_1}+3\frac{P''(1)-\mu_1^2}{\mu_1^4}P''(1)-\frac{P'''(1)}{\mu_1^3}\right]\frac{(it)^3}{6}+$$

$$+\cdots+R_1\big(P'(1),\ \ldots,\ P^{(r)}(1)\big)\frac{(it)^r}{r!}+o(|t|^r)+O\left(\frac{1}{n^r}\right). \qquad (11)$$

Тогда согласно соотношениям (4), (6) и (10) имеем

$$\ln f_n(t) = \ln e^{-it} \frac{Q_n(s_n(t))}{P_n'(s_n(t))} - n \ln s_n(t) + \ln\left[1 + O\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)\right] =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{r-2} \beta_\nu (it)^\nu + n\frac{it}{\mu_1} - n\frac{P''(1)-\mu_1^2+\mu_1}{2\mu_1^3} t^2 + n\sum_{\nu=3}^{r} \varkappa_\nu (it)^\nu +$$

$$+ \ln\left[1 + O\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)\right] + o(|t|^{r-2}), \tag{12}$$

где β_ν — коэффициент при $(it)^\nu$ в разложении по степеням it выражения $\ln e^{-it}\frac{Q_n(s_n(t))}{P_n(s_n(t))}$, а $\varkappa_\nu$ — коэффициент при $(it)^\nu$ в разложении выражения $\ln s_n(t)$.

Пусть, далее,

$$\frac{\beta_\nu}{\bar\sigma^\nu} = \overline{\beta}^\nu \quad \text{и} \quad \frac{\varkappa_\nu}{\bar\sigma^\nu} = \bar\varkappa_\nu.$$

Тогда для всех $|t| \leqslant T_{nr}$

$$\ln \bar f_n(t) = -\frac{t^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{r-2}\left[\overline{\beta}_\nu (it)^\nu + \varkappa_{\nu+2}(it)^{\nu+2}\right]\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu + o(|t|^{r-2}) + \ln\left[1 + O\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)\right].$$

Обозначим

$$V(z) = \ln e^{\frac{t^2}{2}}\left[e^{-itz}\frac{Q_n(s_n(tz))}{P_n'(s_n(tz))} s_n^{-n\frac{1}{z^2}}(tz)\left(1 + o\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)\right)\right] =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{r-2}\left[\overline{\beta}_\nu (it)^\nu + \bar\varkappa_{\nu+2}(it)^{\nu+2}\right]\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^\nu + \ln\left[1 + O\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)\right] + o\left(\left|\frac{tz}{\sqrt{n}}\right|^{r-2}\right)$$

и разложим e^V в ряд по степеням z, считая z действительным переменным, $|z| \leqslant 1$, а t и n фиксированными. Тогда получим

$$e^{V(z)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{r-2} P_\nu(it)\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^k\left[1 + O\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)\right] + R(z),$$

где $R(z) = o(z^{r-2})$ при $z \to 0$, а $P_\nu(it)$ является полиномом относительно it степени 3ν, коэффициенты которого зависят только от первых $k+2$ моментов времени возвращения. Например,

$$P_1(it) = \frac{1}{\bar\sigma}\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{\sigma^2-\mu_1-\mu_1^2}{\mu_1^3}\right] it +$$

$$+ \frac{1}{\bar\sigma^3}\left[\frac{1}{3\mu_1^2} + \frac{P''(1)-\mu_1^2}{2\mu_1^4} + \frac{\mu_1^4+3[P''(1)-\mu_1^2]P''(1)-\mu_1 P'''(1)}{6\mu_1^5}\right](it)^3 =$$

$$= \frac{1}{\bar\sigma}\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{\sigma^2-\mu_1-\mu_1^2}{\mu_1^3}\right] it + \frac{1}{6\bar\sigma^3}\cdot\frac{\mu_1^4+3\mu_2^2-3\mu_1^2\mu_2-\mu_1\mu_3}{\mu_1^5}(it)^3.$$

Далее, поступая так как и при выводе аналогичной теоремы для независимых случайных величин (см. (4)), получаем требуемое соотношение (1). Лемма доказана.

Приступим к доказательству теоремы 1. Пусть случайная величина N_n может принимать только значения sh ($s=0, 1, 2, \ldots$). Тогда случайная величина

$$\overline{N_n}=\frac{N_n-\frac{n}{\mu_1}}{\bar\sigma\sqrt{n}}$$

может принимать только значения

$$x_{ns}=\frac{sh-\frac{n}{\mu_1}}{\bar\sigma\sqrt{n}}=\frac{n\left(s-\frac{n}{\mu_1 h}\right)}{\bar\sigma\sqrt{n}}.$$

Из того, что

$$\bar f_n(t)=\sum_{s=-\infty}^{\infty}P\{\overline{N}_n=x_{ns}\}\,e^{itx_{ns}},$$

находим

$$P\{\overline{N}_n=x_{ns}\}=\frac{1}{\tau\bar\sigma\sqrt{n}}\int\limits_{-\frac{1}{2}\tau\bar\sigma\sqrt{n}}^{\frac{1}{2}\tau\bar\sigma\sqrt{n}}\bar f_n(t)\,e^{-itx_{ns}}\,dt,$$

где

$$\tau=\frac{2\pi}{h}.$$

Пусть далее

$$\tau\bar\sigma\sqrt{n}\,P\{\overline{N}_n=x_{ns}\}=I_1+I_2+I_3, \tag{15}$$

где

$$I_1=\int\limits_{-T_{nr}}^{T_{nr}}\left\{\bar f_n(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}\left[1+\sum_{\nu=1}^{r-2}\frac{1}{n^{\frac{\nu}{2}}}P_\nu(it)\right]\right\}\left[1+O\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)\right]e^{-itx_{ns}}\,dt,$$

$$I_2=\int\limits_{T_{nr}\le|t|\le\frac{1}{2}\tau\bar\sigma\sqrt{n}}\bar f_n(t)\,e^{-itx_{ns}}\,dt$$

и

$$I_3=\int\limits_{-T_{nr}}^{T_{nr}}e^{-\frac{t^2}{2}}\left[1+\sum_{\nu=1}^{r-2}\frac{P_\nu(it)}{n^{\frac{\nu}{2}}}\right]\left[1+O\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)\right]e^{-itx_{ns}}\,dt.$$

Воспользовавшись леммой, мы находим, что

$$I_1=o\left(\frac{1}{n^{\frac{r-2}{2}}}\right). \tag{16}$$

Далее, так как

$$\int\limits_{|t|\ge T_{nr}}e^{-\frac{t^2}{2}}\left[1+\sum_{\nu=1}^{r-2}\frac{P_\nu(it)}{n^{\frac{\nu}{2}}}\right]\left[1+O\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)\right]e^{-ix_{ns}t}\,dt=o\left(\frac{1}{n^{\frac{r-2}{2}}}\right),$$

то

$$I_3=\int e^{-\frac{t^2}{2}}\left[1+\sum_{\nu=1}^{r-2}\frac{P_\nu(it)}{n^{\frac{\nu}{2}}}\right]\left[1+O\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)\right]e^{-itx_{ns}}\,dt+o\left(\frac{1}{n^{\frac{r-2}{2}}}\right)=$$

$$=\sqrt{2\pi}\left[e^{-\frac{x_{ns}^2}{2}}+\sum_{\nu=1}^{r-2}P_\nu\left(-\varphi(x_{ns})\right)\frac{1}{n^{\frac{\nu}{2}}}\right]+o\left(\frac{1}{n^{\frac{r-2}{2}}}\right). \tag{17}$$

Осталось еще оценить интеграл I_2. По формуле Коши согласно (2) имеем

$$f_n(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{Q(s)\,s^{-n}}{1-e^{it}P(s)}\,ds.$$

Здесь за контур интегрирования C мы можем взять единичную окружность с центром в начале координат. Тогда $(r-1)$-кратным интегрированием по частям получаем

$$f_n(t)=\frac{(n-r+1)!}{n!}\;\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\left[\frac{Q(s)}{1-e^{it}P(s)}\right]\frac{ds}{s^{n-r+1}}. \tag{18}$$

Далее можно показать (см. доказательство леммы в работе [3]), что для любого $\varepsilon>0$ существует постоянная $c(\varepsilon)$ такая, что

$$\left|1-e^{it}P(s)\right|>c(\varepsilon) \tag{19}$$

при всех $\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\frac{1}{2}\tau$.

Из соотношения

$$\left|1-e^{it}P(s)\right|^2=2(1-\cos t)+2(1-\cos\varphi)\left[\operatorname{Re}Q(s)\right]^2+2(1-\cos\varphi)\left[\operatorname{Im}Q(s)\right]^2+$$
$$+2\left[(\cos t-1)(1-\cos\varphi)+\sin t\sin\varphi\right]\operatorname{Re}Q(s)+$$
$$+2\left[(1-\cos t)\sin\varphi+(1-\cos\varphi)\sin t\right]\operatorname{Im}Q(s),$$

поступая аналогично тому как в работе [3], получаем, что при всех $\overline{\Delta}_n<|t|<\varepsilon$

$$\left|1-e^{it}P(s)\right|>\frac{c_0}{\sqrt{n}}, \tag{20}$$

где $c_0>0$.

Существование r-того момента обеспечивает равномерную ограниченность производных функций $P(s)$ и $Q(s)$:

$$\left|P^{(\nu)}(s)\right|\leqslant c_2,\qquad \nu=1,\,2,\,\ldots,\,r,$$
$$\left|Q^{(\nu)}(s)\right|\leqslant c_3,\qquad \nu=1,\,2,\,\ldots,\,r-1. \tag{21}$$

Далее, так как те члены из

$$\frac{d^r}{ds^r}\left[\frac{Q(s)}{1-e^{it}P(s)}\right],$$

знаменатель которых содержит r-ю и $(r-1)$-ю степени величины $1-e^{it}P(s)$, можно проинтегрировать по частям еще $(r-1)$ и $(r-2)$ раза, соответственно, то из (15) и (18)—(21) находим, что

$$|I_2|=o\left(\frac{1}{n^{\frac{r-2}{2}}}\right).$$

Из соотношений (15)—(17) и (22) следует утверждение теоремы 1.

Теоремы 2 и 3 доказываются с помощью леммы и оценки для $|f_n(t)|$ в интервале $\frac{\sqrt{r \ln n}}{\sqrt{n}} < |t| < \frac{\tau}{2}$ совершенно так же, как соответствующие предложения для независимых случайных величин (см., напр., [5]).

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
18.X.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Feller, Fluctuation theory of recurrent events, Trans. Amer. Math. Soc., 67, 1 (1949), 98–119.
2. З. И. Шарагина, Локальные предельные теоремы для некоторых схем циклических процессов, Кандидатская диссертация.
3. А. Алешкявичене, Локальная предельная теорема для рекуррентных событий, Лит. мат. сб., V (1965), 3, 5–12.
4. Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, Москва, 1947.
5. C. G. Esseen, Fourier analysis of distribution functions, Acta Math., 77 (1945), 1–125.
6. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949.
7. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, Л., 1950.

REKURENTINIŲ ĮVYKIŲ PASIRODYMO SKAIČIAUS PASISKIRSTYMŲ ASIMPTOTINIAI IŠDĖSTYMAI

A. ALEŠKEVIČIENĖ

(*Reziumė*)

Sakysime $\mathcal{E}$ – reguliarus rekurentinis įvykis, p_k – tikimybė, kad įvykis $\mathcal{E}$ pirmą kartą įvyks k-jame bandyme, ir

$$\mu_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k \quad \text{ir} \quad \sigma^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k - \mu^2.$$

Toliau, tarkime, kad N_n reiškia įvykio $\mathcal{E}$ pasirodymo skaičių per $n-1$ pirmųjų bandymų.

Šiame darbe gaunami funkcijų $F_n(x) = P\left\{ \frac{N_n - \frac{n}{\mu_1}}{\sigma\sqrt{n}} < x \mu_1^{\frac{3}{2}} \right\}$ ir $P\{N_n = k\}$ asimptotiniai išdėstymai $\frac{1}{\sqrt{n}}$ laipsniais.

ASIMPTOTIC EXPANSIONS FOR THE NUMBER OF REALIZATIONS OF RECURRENT EVENT

A. ALEŠKEVIČIENĖ

(*Summary*)

Let us denote $\mathcal{E}$ – a recurrent event, p_k – probability that the recurrent event $\mathcal{E}$ occurs at the k-th trial and

$$\mu_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k, \quad \sigma^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 p_k - \mu_1^2.$$

Let N_n denote the number of realizations of $\mathcal{E}$ in the first $n-1$ trials. Asymptotic expansions in powers of $\frac{1}{\sqrt{n}}$ for the functions $F_n(x) = P\left\{ \frac{N_n - \frac{n}{\mu_1}}{\sigma\sqrt{n}} < \mu_1^{\frac{3}{2}} x \right\}$ and $P\{N_n = k\}$ are obtained.