VI ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1966

О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ПРОБЛЕМЕ ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ЗАДАННЫХ НА ЦЕПИ МАРКОВА

Г. Ю. АЛЕШКЯВИЧУС

Пусть $(\xi_k)_0^\infty$ – неоднородная цепь Маркова, определенная функциями вероятностей перехода $p_k(\omega, A)$ $(\omega \in \Omega_{k-1},\ A \in \mathscr{F}_k)$, где Ω_k – k-тое множество возможных состояний, $\mathscr{F}_k$ – σ-алгебра подмножеств множества Ω_k $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$; $p_0(A)$ – начальное распределение вероятностей в $\mathscr{F}_0$; ξ_k означает случайное состояние цепи Маркова в k-том моменте времени, через $\{\xi_k=\omega\}$ (где $\omega \in \Omega_k$) обозначается фиксированное состояние цепи Маркова.

Пусть $(X_k)_0^\infty$ – последовательность случайных величин со значениями из множества E. Если выполнены условия:

а) „двумерная" последовательность $(\xi_k,\ X_k)_0^\infty$ является цепью Маркова;

б) когда фиксирована траектория $(\xi_0=\omega_0,\ \xi_1=\omega_1,\ \ldots,\ \xi_n=\omega_n)$, тогда случайные величины условно взаимно независимы: с вероятностью единица

$$\mathbf{P}\ \{X_0<x_0,\ X_1<x_1,\ \ldots,\ X_n<x_n \mid \xi_0=\omega_0,\ \xi_1=\omega_1,\ \ldots,\ \xi_n=\omega_n\}=$$
$$=\mathbf{P}\ \{X_0<x_0 \mid \xi_0=\omega_0\} \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}\ \{X_k<x_k \mid \xi_{k-1}=\omega_{k-1},\ \xi_k=\omega_k\},$$

то $X_0,\ X_1,\ \ldots,\ X_k,\ \ldots$ называются *случайными величинами, заданными на цепи Маркова* (см. [3], [4]).

В частном случае, когда случайные величины X_k $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ являются измеримыми функциями от ξ_k (или от ξ_{k-1} и ξ_k), они называются *связанными в цепь Маркова.*

Последовательность $(X_k)_0^\infty$ вполне задается указанием последовательности условных функций распределения

$$F_\omega^{(0)}(x)=\mathbf{P}\ \{X_0<x \mid \xi_0=\omega\}, \qquad (\omega \in \Omega_0)$$

и

$$F_{\omega\tilde{\omega}}^{(k)}(x)=\mathbf{P}\ \{X_k<x \mid \xi_{k-1}=\omega,\ \xi_k=\tilde{\omega}\}, \qquad (\omega \in \Omega_{k-1},\ \tilde{\omega} \in \Omega_k,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

В предлагаемой работе рассматривается следующая предельная проблема (ср. [5]):

Пусть $S_n=\sum\limits_{k=0}^{k_n} X_{nk}$ *является суммой равномерно бесконечно малых случайных величин, заданных на регулярной цепи Маркова* $(\xi_k)_0^\infty$, *и* $k_n \to \infty$, *когда* $n \to \infty$.

Требуется найти класс возможных предельных законов распределения таких сумм.

Некоторые достаточные условия сходимости к нормальному закону последовательности нормированных сумм случайных величин, заданных на однородной цепи Маркова с конечным числом состояний, рассматривались в работах Дьиреш [3], Кейлзона и Вишарта [4] и др.

Через $p_{kl}(\omega, A)$ обозначим функцию вероятностей перехода из состояния $\omega \in \Omega_k$ во множество $A \in \mathcal{F}_l$, $(k \leqslant l)$. Если $p_k(\omega, A)$ не зависит от k, то цепь Маркова $(\xi_k)_0^\infty$ называется однородной. Если $p_{kl}(\omega, A)$ удовлетворяет условию (см. [2] и [7]):

$$\sup_{k \geqslant 0} \sup_{\omega, \tilde{\omega} \in \Omega_k, A \in \mathcal{F}_{m+k}} |p_{k, m+k}(\omega, A) - p_{k, m+k}(\tilde{\omega}, A)| = \rho(m) \underset{(m \to \infty)}{\to} 0, \tag{1}$$

то $(\xi_k)_0^\infty$ называется *регулярной цепью Маркова*. В однородном случае, если выполнено условие (1), то существуют конечные числа $\gamma > 0$ и $\rho (0 < \rho < 1)$ такие, что $\rho(m) \leqslant \gamma\rho^m$.

В силу определения последовательности $(X_k)_0^\infty$, цепь Маркова $(\xi_k, X_k)_0^\infty$ регулярна, если $(\xi_k)_0^\infty$ регулярна, и является однородной, если $(\xi_k)_0^\infty$ однородна и функции $F_{\omega\tilde{\omega}}^{(k)}(x)$ не зависят от k.

Назовем последовательность $(X_k)_0^\infty$ *вырожденной*, если существуют $\beta_k \in E$ и функции $\beta_k(\omega)$, определенные для $\omega \in \Omega_k$ и принимающие значения из E, такие, что (см. [4])

$$F_{\omega\tilde{\omega}}^{(k)}(x) = \chi_{E^+}\left(x - \beta_k - \beta_k(\tilde{\omega}) + \beta_{k-1}(\omega)\right)$$

для всех натуральных чисел k и почти всех $\omega \in \Omega_{k-1}$, $\tilde{\omega} \in \Omega_k$ и $x \in E$. Здесь $\chi_{E^+}(u)$ индикатор множества $E^+ = \{u : u > 0, u \in E\}$.

Будем предполагать $(X_k)_0^\infty$ не вырожденной и центрированной вычитанием соответствующей вырожденной последовательности случайных величин.

С помощью функций распределения $F_{\tilde{\omega}}^{(n, 0)}(x)$ и $F_{\omega\tilde{\omega}}^{(n, k)}(x)$, зависящих от дополнительного параметра n, определим схему *серий* случайных величин X_{nk} $(k = 0, 1, \ldots, k_n)$, заданных на цепи Маркова $(\xi_k)_0^\infty$ и удовлетворяющих условию *равномерно бесконечной малости*: для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \max_{0 \leqslant k \leqslant k_n} \mathbf{P}\{|X_{nk}| \geqslant \varepsilon\} = 0.$$

Через $f_{\tilde{\omega}}^{(n, 0)}(t)$, $f_{\omega\tilde{\omega}}^{(n, k)}(t)$ и $f_n(t)$ обозначим, соответственно, условные характеристические функции величин X_{nk}, $(k = 0, 1, \ldots, k_n)$ и безусловную характеристическую функцию суммы $S_n = \sum\limits_{k=0}^{k_n} X_{nk}$, определенные равенствами

$$f_{\tilde{\omega}}^{(n, 0)}(t) = \mathbf{M}\{e^{itX_{n0}} | \xi_0 = \tilde{\omega}\} = \int_E e^{itx}\, dF_{\tilde{\omega}}^{(n, 0)}(x),$$

$$f_{\omega\tilde{\omega}}^{(n, k)}(t) = \mathbf{M}\{e^{itX_{nk}} | \xi_{k-1} = \omega, \xi_n = \tilde{\omega}\} = \int_E e^{itx}\, dF_{\omega\tilde{\omega}}^{(n, k)}(x),$$

$$f_n(t) = \mathbf{M}\, e^{itS_n} = \mathbf{M}\left\{f_{\xi_0}^{(n, 0)}(t) \prod_{k=1}^{k_n} f_{\xi_{k-1}\xi_k}^{(n, k)}(t)\right\} = \int_E e^{itx}\, dF_n(x),$$

где $F_n(x)=\mathbf{P}\{S_n<x\}$ – функция распределения суммы S_n. Здесь предполагается, что E – вещественная прямая, t также принадлежит вещественной прямой. [При желании E можно считать евклидовым пространством конечной размерности. Полученные результаты и в конечномерном случае остаются в силе.]

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $(X_{nk})_0^{k_n}$ *– схема серий равномерно бесконечно малых случайных величин, заданных на регулярной цепи Маркова* $(\xi_k)_0^\infty$, *и* $k_n\to\infty$ $(n\to\infty)$.

Тогда:

а) *последовательность функций* $F_n(x)$ *распределения сумм* $S_n=\sum_{k=0}^{k_n} X_{nk}$ *может сходиться только к безгранично делимому закону;*

б) *события* A, $(A\in\mathscr{F}_{k_n})$ *и* $\{S_n<x\}$ *асимптотически взаимно независимы и асимптотически не зависят от начального распределения.*

Теорема 2. *Пусть* $(X_k)_0^\infty$ *– не вырожденная последовательность случайных величин, заданных на регулярной цепи Маркова* $(\xi_k)_0^\infty$ *и удовлетворяющих условию: существуют* $a_k\in E$ *и* $B_n>0$ *такие, что случайные величины* $X_{nk}=\frac{X_k-a_k}{B_n}$ *являются равномерно бесконечно малыми.*

Тогда:

а) *последовательность функций* $F_n(x)$ *распределения сумм* $S_n=\frac{1}{B_n}\left(\sum_{k=0}^{n} X_k-A_n\right)$ *может сходиться только к закону класса* $\mathfrak{L}$ $(A_n\in E$ *и* $B_n>0$ *– нормирующие постоянные); в случае собственного предельного закона* $B_n\to\infty$ *и* $\frac{B_{n+1}}{B_n}\to 1$ $(n\to\infty)$;

б) *события* A, $(A\in\mathscr{F}_n)$ *и* $\{S_n<x\}$ *асимптотически взаимно не зависимы и асимптотически не зависят от начального распределения.*

Теорема 3. *Пусть* $(X_k)_0^\infty$ *– не вырожденная последовательность случайных величин, заданных на регулярной цепи Маркова* $(\xi_k)_0^\infty$. *Если цепь Маркова* $(\xi_k,\ X_k)_0^\infty$ *однородна,*

$$S_n=\frac{1}{B_n}\left(\sum_{k=0}^{n} X_n-A_n\right),$$

то

а) *последовательность функций распределения* $F_n(x)=\mathbf{P}\{S_n<x\}$ *может сходиться только к устойчивому закону; в случае собственного предельного закона* $B_n=n^{\frac{1}{\alpha}}h(n)$, *где* α *– показатель устойчивости предельного закона,* $0<\alpha\leqslant 2$, $h(n)$ *– медленно меняющаяся функция,* $A_n\in E$ *и* $B_n>0$ *– нормирующие постоянные;*

б) *события* $A\,(A\in\mathscr{F}_n)$ *и* $\{S_n<x\}$ *асимптотически взаимно не зависимы и асимптотически не зависят от начального распределения.*

Замечание. Теоремы 1–3 допускают обобщение на сложные регулярные цепи Маркова конечного порядка сложности. Случайные величины X_{nk}

также можно заменить любой последовательностью функций $\varphi_{nk}(\ldots)$ конечного и равномерно ограниченного числа переменных такой, чтобы случайные величины

$$Y_{nk}=\varphi_{nk}(\xi_k, \ldots, \xi_{k+l_{nk}}, X_{k+1}, \ldots, X_{k+m_{nk}}), \quad (l_{nk}\leqslant l_n;\ m_{nk}\leqslant m_n)$$

были равномерно бесконечно малыми.

Доказательство теорем 1—3 опирается на следующие неравенства.

Лемма 1. *Пусть $(\xi_k)_0^\infty$ — произвольная регулярная цепь Маркова; $(\varphi_k)_0^r$ — последовательность ограниченных $\mathscr{F}$-измеримых функций конечного числа переменных*

$$|\varphi_k(\tilde\omega_0, \tilde\omega_1, \ldots, \tilde\omega_{\tilde m_k})|\leqslant C_k,$$

$$\eta_k=\varphi_k(\xi_{n_{k-1}+m_k}, \ldots, \xi_{n_k}), \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ r),$$

где r, $m_k\geqslant 1$, $\tilde m_k\geqslant 0$, $n_k=\sum\limits_{j=1}^{k}(m_j+\tilde m_j)$ — натуральные числа.

Тогда имеет место неравенство

$$\left|\mathbf{M}\prod_{j=0}^{r}\eta_j-\prod_{j=0}^{r}\mathbf{M}\eta_j\right|\leqslant\prod_{j=0}^{r}C_j\sum_{k=1}^{r}\rho(m_k). \tag{3}$$

Лемма 2. *Пусть случайные величины η_1 и η_2 имеют конечные вторые абсолютные моменты*

$$\mathbf{M}|\eta_i|^2<\infty;\ \mathbf{D}\eta_i=\mathbf{M}|\eta_i-\mathbf{M}\eta_i|^2<\infty, \qquad (i=1,\ 2).$$

Тогда

$$|\mathbf{M}\eta_1\eta_2-\mathbf{M}\eta_1\mathbf{M}\eta_2|^2\leqslant\min(\mathbf{M}|\eta_1|^2\mathbf{D}\eta_2;\ \mathbf{D}\eta_1\mathbf{M}|\eta_2|^2)\leqslant$$
$$\leqslant\min(\mathbf{D}\eta_1,\ \mathbf{D}\eta_2)\cdot\max(\mathbf{M}|\eta_1|^2,\ \mathbf{M}|\eta_2|^2). \tag{4}$$

Доказательство лемм 1—2. Так как (в условиях леммы 1)

$$\mathbf{M}|\mathbf{M}(\eta_k|\xi_{n_{k-1}})-\mathbf{M}\eta_k|\leqslant$$
$$\leqslant C_k\int\limits_{\Omega_{n_{k-1}}}\int\limits_{\Omega_{n_{k-1}+m_k}}p_{n_{k-1}}(d\omega)|p_{n_{k-1},n_{k-1}+m_k}(\omega, d\tilde\omega)-p_{n_{k-1}+m_k}(d\tilde\omega)|\leqslant 2C_k\rho(m_k),$$

то очевидно

$$\left|\mathbf{M}\prod_{k=0}^{r}\eta_k-\prod_{k=0}^{r}\mathbf{M}\eta_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{r}\prod_{j=k+1}^{r}|\mathbf{M}\eta_j|\left|\mathbf{M}\prod_{j=0}^{k-1}\eta_j(\eta_k-\mathbf{M}\eta_k)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{r}\prod_{\substack{j=0\\(j\neq k)}}^{r}C_j\mathbf{M}|\mathbf{M}(\eta_k|\xi_{n_{k-1}})-\mathbf{M}\eta_k|\leqslant 2\prod_{j=0}^{r}C_j\sum_{k=1}^{r}\rho(m_k).$$

Из неравенства Коши—Буняковского следует (в условиях леммы 2)

$$|\mathbf{M}\eta_1\eta_2-\mathbf{M}\eta_1\mathbf{M}\eta_2|^2=|\mathbf{M}(\eta_1-\mathbf{M}\eta_1)\eta_2|^2\leqslant\mathbf{D}\eta_1\mathbf{M}|\eta_2|^2,$$
$$|\mathbf{M}\eta_1\eta_2-\mathbf{M}\eta_1\mathbf{M}\eta_2|^2=|\mathbf{M}\eta_1(\eta_2-\mathbf{M}\eta_2)|^2\leqslant\mathbf{D}\eta_2\mathbf{M}|\eta_1|^2,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1. В силу того, что для любого $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\leqslant k\leqslant k_n}\mathbf{P}\{|X_{nk}|\geqslant\varepsilon\}=0$$

можно выбрать $\varepsilon=\varepsilon_n\to 0$ так, чтобы имело место неравенство

$$\max_{0\leqslant k\leqslant k_n} P\{|X_{nk}|\geqslant\varepsilon_n\}\leqslant\varepsilon_n \tag{5}$$

и вместе с этим неравенство

$$\max_{0\leqslant k\leqslant k_n} \mathbf{M}|\mathbf{M}\{e^{itX_{nk}}-1|\xi_{k-1},\ \xi_k\}|\leqslant(2+|t|)\,\varepsilon_n$$

для любого конечного t.

Выберем последовательности натуральных чисел m_n и r_n так, чтобы $r_n\to\infty$,

$$m_n\geqslant\frac{n}{r_n+1}\to\infty,\quad r_n\rho\left(\frac{m_n}{r_n}\right)\to 0$$

и

$$m_n\,\varepsilon_n\to 0,\qquad (n\to\infty).$$

Обозначим

$$n_j=\frac{(j-1)\,r_n m_n}{r_n-1},\quad Y_{nj}=\sum_{k=n_j+1}^{n_j+m_n} X_{nk},\quad Y_{n0}=S_n-\sum_{j=1}^{r_n} Y_{nj}.$$

Тогда из неравенства

$$\max_{0\leqslant j\leqslant r_n}\mathbf{M}|\mathbf{M}\{e^{itY_{nj}}-1|\xi_0,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_{k_n}\}|\leqslant$$

$$\leqslant m_n\max_{0\leqslant k\leqslant k_n}\mathbf{M}|\mathbf{M}\{e^{itX_{nk}}-1|\xi_{k-1},\ \xi_k\}|\leqslant(2+|t|)m_n\,\varepsilon_n$$

убеждаемся в равномерно бесконечной малости величин Y_{nj}, $(j=0,\ 1,\ \ldots,r)$.

Пусть существует предел

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t)=\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}\,e^{itS_n}=f(t).$$

Комбинируя неравенства (3) и (4), получаем

$$f(t)=\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}\,e^{it\sum\limits_{j=0}^{r_n}Y_{nj}}=\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{r_n}\mathbf{M}\,e^{itY_{nj}}.$$

Так как в последнем равенстве за знаком предельного перехода стоит характеристическая функция суммы взаимно независимых и равномерно бесконечно малых слагаемых, то это доказывает безграничную делимость предельной характеристической функции $f(t)$ (см. [1]).

Утверждение б) следует из условий (1), (2) и неравенств: с вероятностью единица ($\chi_A(\ldots)$ – индикатор события $A\in\mathscr{F}_{k_n}$)

$$|\mathbf{M}\{e^{itS_n}\chi_A(\xi_{k_n})|\xi_0=\omega\}-\prod_{j=1}^{r_n-1}\mathbf{M}\{e^{itY_{nj}}|\xi_0=\omega\}\ \mathbf{P}\{\xi_{k_n}\in A|\xi_0=\omega\}|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{1-|\mathbf{M}\,e^{it(Y_{n0}+Y_{nr_n})}|^2}+2r_n\rho\left(\frac{m_n}{r_n-1}\right),$$

$$|\mathbf{M}\{e^{itY_{nj}}|\xi_0=\omega\}-\mathbf{M}\{e^{itY_{nj}}|\xi_0=\tilde{\omega}\}|\leqslant 2\rho(n_j),\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ r_n-1);$$
$$(\omega,\ \tilde{\omega}\in\Omega_0).$$

Доказательство теоремы 2. Сначала отметим следующее свойство:

Если функция распределения, предельная для функций распределения сумм равномерно бесконечно малых случайных величин, $X_{nk}=\frac{X_n-a_k}{B_n}$, заданных на цепи Маркова, является собственной, то (при $n\to\infty$) $B_n\to\infty$ и $\frac{B_{n+1}}{B_n}\to 1$.

Доказательство этого факта лишь немногими изменениями отличается от доказательства леммы А. Я. Хинчина (см. [1], стр. 155).

Поскольку $X_{nk}=\frac{X_k-a_k}{B_n}$ являются равномерно бесконечно малыми случайными величинами, заданными на регулярной цепи Маркова, то теорема 2 является частным случаем теоремы 1. Отсюда следует справедливость утверждения б) теоремы 2.

Для доказательства пункта а) достаточно показать, что предельная характеристическая функция $f(t)$, если она существует, является *разложимой* (см. [5]): для любого вещественного t и любого β $(0<\beta<1)$

$$f(t)=f(\beta t)\,f_\beta(t),$$

где $f_\beta(t)$ — некоторая характеристическая функция.

Не ограничивая общности, предположим, что B_n монотонно стремится к бесконечности, и выберем последовательности натуральных чисел m_n и $\tilde m_n\to\infty$ такие, что для произвольного β $\frac{B_{m_n}}{B_n}\to\beta$, $\tilde m_n\varepsilon_n\to 0$ $\Big($здесь ε_n такое же как в (5)$\Big)$, когда $n\to\infty$. Положим

$$S_n=\frac{1}{B_n}\left(\sum_{k=0}^{n}X_k-A_n\right),\quad S_n^{(1)}=\frac{1}{B_n}\sum_{k=m_n+1}^{m_n+\tilde m_n-1}(X_k-a_k),$$

$$S_n^{(2)}=\frac{1}{B_n}\left(\sum_{k=m_n+\tilde m_n}^{n}X_k-A_n+A_{m_n}+\sum_{k=m_n+1}^{m_n+\tilde m_n-1}a_k\right).$$

Тогда

$$S_n=\frac{B_{m_n}}{B_n}S_{m_n}+S_n^{(1)}+S_n^{(2)},$$

и из лемм $1-2$ получаем

$$\left|\mathbf{M}e^{itS_n}-\mathbf{M}e^{it\frac{B_{m_n}}{B_n}S_{m_n}}\,\mathbf{M}e^{itS_n^{(2)}}\right|\leqslant\sqrt{1-\left|\mathbf{M}e^{itS_n^{(1)}}\right|^2}+2\rho(\tilde m_n).$$

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{M}e^{itS_n}=f(t)$, то

$$f(t)=\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}e^{it\frac{B_{m_n}}{B_n}S_{m_n}}\,\mathbf{M}e^{itS_n^{(2)}}=f(\beta t)f_\beta(t),$$

где $f_\beta(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{M}e^{itS_n^{(2)}}$ — некоторая характеристическая функция, что и требовалось доказать.

Теорема 3 является простым следствием теоремы 2: если цепь Маркова $(\xi_k, X_k)_0^\infty$ однородна, то $f_\beta(t)$ представляет собой характеристическую функцию того же типа, что и $f(t)$.

Следовательно, для любого β $(0<\beta<1)$ существуют $\tilde{\beta}>0$ и вещественное a такие, что для всех t

$$f(t)=f(\beta t)\,f(\tilde{\beta} t)\,e^{iat}.$$

Это означает *устойчивость* характеристической функции $f(t)$ (см. [5], стр. 339).

Доказательство асимптотики $B_n=n^{\frac{1}{\alpha}}\,h(n)$ (где $\alpha\,(0<\alpha\leqslant 2)$ – показатель устойчивости $f(t)$; $h(n)$ – медленно меняющаяся функция такая, что для каждого постоянного натурального числа k $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{h(kn)}{h(n)}=1$) такое же как у С. В. Нагаева (см. [6]).

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
15.IX.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л. (1949).
2. Р. Л. Добрушин, Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова, Теория вероятн. и ее примен., I, № 1, 4 (1957), 72–88, 365–425.
3. B. Gyires, Eine Verallgemeinerung des zentralen Grenzwertsatzes, Acta math. acad. sci. hungar., 13, N 1–2 (1962), 69–80.
4. J. Keilson and D. M. G. Wishart, A central limit theorem for processes defined on a finite Markov chain, Proc. Cambridge Philos. Soc., 60, N 3 (1964), 547–567.
5. М. Лоэв, Теория вероятностей, ИЛ, М. (1962).
6. С. В. Нагаев, Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Теория вероятн. и ее прим., 2, № 4 (1957), 389–416.
7. M. Rosenblatt, A central limit theorem and strong mixing condition, Proc. Nat. Acad. Sci, USA, Washington, 42, N. 1 (1956), 43–47.

ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ, APIBRĖŽTŲ MARKOVO GRANDINĖJE, SUMŲ CENTRINĖS RIBINĖS PROBLEMOS KLAUSIMU

G. ALEŠKEVIČIUS

(*Reziumė*)

Sakysime, $S_n=\sum\limits_{k=0}^{k_n} X_{nk}$ – nykstamai mažų atsitiktinių dydžių, apibrėžtų fiksuotoje reguliarioje Markovo grandinėje $(\xi_k)_0^{\infty}$, suma ir $k_n\to\infty$, kai $n\to\infty$.

Darbe parodoma, kad S_n ribinis pasiskirstymo dėsnis, jei jis egzistuoja, yra neaprėžtai dalus (1 teorema). Jeigu S_n yra normuotų atsitiktinių dydžių suma, $S_n=\frac{1}{B_n}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} X_k-A_n\right)$, tai ribinis dėsnis priklauso klasei $\mathcal{L}$ (2 teorema). Tuo atveju, kai $(\xi_k,\,X_k)_0^{\infty}$ sudaro homogeninę Markovo grandinę, S_n sumų galimi ribiniai pasiskirstymo dėsniai gali būti tik stabilūs (3 teorema).

ON THE CENTRAL LIMIT PROBLEM FOR SUMS OF RANDOM VARIABLES DEFINED ON A MARKOV PROCESS WITH DISCRETE PARAMETER

G. ALEŠKEVIČIUS

(*S u m m a r y*)

Let $(\xi_k)_0^\infty$ be a fixed Markov process with discrete parameter and with regularity property. Let X_{nk} be a random variables defined on the $(\xi_k)_0^\infty$. We cosider the central limit problem for the sum $S_n=\sum_{k=0}^{k_n} X_{nk}$, where $n\to\infty$ and $k_n\to\infty$.