VI ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1

1966

# О ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ И КОЛЬЦАХ РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Л. В. АПАРИНА

Настоящая заметка состоит из двух частей. В первой части рассматриваются векторные решетки с сильной единицей. На множестве $\mathfrak{M}$ максимальных собственных $l$-идеалов такой решетки каждый ее элемент $x$ естественным образом определяет функцию $x(M)$, и эти функции порождают в $\mathfrak{M}$ слабую топологию $\tau_\sigma$. Как показал К. Иосида [1], $(\mathfrak{M}, \tau_\sigma)$ — бикомпакт. Этот результат устанавливается здесь другим способом, с помощью исследования оболочечно-ядерной топологии $\tau_{hk}$ в $\mathfrak{M}$.

Во второй части рассматриваются векторные решетки $\mathfrak{P}(X)$ всех равномерно непрерывных функций на равномерном пространстве $X$, обладающие сильной единицей $e$. Доказывается, что если в $\mathfrak{P}(X)$ определить операцию умножения, положив $f \times g = \frac{fg}{e}$, где $fg$ — обычное произведение функций, то $\mathfrak{P}(X)$ становится кольцом; при этом максимальные $l$-идеалы совпадают с максимальными кольцевыми идеалами.

В случае, когда $X$ — нормированное пространство, это кольцо — нормированное.

I. Упорядоченным векторным пространством ([2], стр. 71) называется вещественное векторное пространство, в котором задано отношение (частичного) порядка, такое, что если $x \leqslant y$, то $x+z \leqslant y+z$ и $\lambda x \leqslant \lambda y$ для любых элементов $z$ и положительных скаляров $\lambda$.

*Векторной решеткой* ([3], стр. 163)* называется упорядоченное векторное пространство $L$, в котором для любых двух его элементов $x$ и $y$ существует $x \vee y = \sup\{x, y\}$; (тогда существует и $x \wedge y = \inf \{x, y\} = -[(-x) \vee (-y)]$, так что $L$ — действительно решетка). Для каждого $x \in L$ полагают $|x| = x \vee (-x)$. Обозначим $L^+ = \{x \in L : x \geqslant 0\}$. $R$ будет означать векторную решетку всех вещественных чисел (упорядоченную по возрастанию).

*l-идеалом* ([5]** стр. 307) векторной решетки $L$ называется ее векторное подпространство $I$ такое, что если $x \in I$, $y \in L$ и $|y| \leqslant |x|$, то $y \in I$. Всякое непустое множество $A \subset L$ порождает $l$-идеал $(A)$, состоящий из всех тех элементов $x \in L$, для которых существуют конечные наборы $a_1, \ldots, a_n \in A$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R^+$ такие, что $|x| \leqslant \lambda_1 |a_1| + \cdots + \lambda_n |a_n|$.

* В [4] $K$ — линеалом, в [5] — векторной структурой.

** В [4] — нормальным подлинеалом.

*Максимальным l-идеалом* в $L$ называется всякий собственный (т. е. отличный от $L$) $l$-идеал, не содержащийся ни в каком другом собственном $l$-идеале.

*Сильной единицей* в $L$ называется такой элемент $e>0$, что $(e)=L$, т. е., каково бы ни было $x\in L$, существует $\lambda\in R^+$, для которого $|x|\leqslant\lambda e$. Таким образом, $e$ не содержится ни в каком собственном $l$-идеале. Поэтому, если $L$ обладает сильной единицей $e$, то каждый собственный $l$-идеал $I$ в силу леммы Цорна, содержится хотя бы в одном максимальном $l$-идеале. Беря, в частности, $I=\{0\}$, заключаем, что множество максимальных $l$-идеалов векторной решетки с сильной единицей не пусто.

Если $I-l$-идеал векторной решетки $L$, то под $L/I$ понимается факторпространство $L$ по $I$, наделенное отношением порядка, при котором $a+I\leqslant b+I$ тогда и только тогда, когда $(b-a+I)\cap L^+\neq\varnothing$. Как известно ([5], стр. 329), $L/I-$векторная решетка, причем каноническое отображение $L$ на $L/I-$решеточный гомоморфизм, т. е.

$$(x+I)\vee(y+I)=(x\vee y)+I \quad \text{и} \quad (x+I)\wedge(y+I)=(x\wedge y)+I.$$

Если $M-$максимальный $l$-идеал в $L$, то, как известно ([5], стр. 329), для каждого $\alpha>0$ из $L/M$ существует однозначно определенный изоморфизм $L/M$ на $R$, переводящий $\alpha$ в 1.

Далее мы всюду предполагаем, что $L$ обладает сильной единицей $e$, и в качестве такого элемента $\alpha$ всегда будем выбирать $e+M$. Тогда каждый максимальный $l$-идеал $M$ определяет отображение $L$ в $R$:

$$x\to x+M\to\lambda.$$

Тем самым элементы $x\in L$ определяют на множестве $\mathfrak{M}$ всех максимальных $l$-идеалов функции $x(M)=\lambda$. Как легко проверить, они обладают следующими свойствами:

1) $M_1\neq M_2 \Longrightarrow \exists\, x\in L: x(M_1)\neq x(M_2)$,
2) $x=x_1+x_2\Longrightarrow x(M)=x_1(M)+x_2(M)$,
3) $x=\lambda x_1\Longrightarrow x(M)=\lambda x_1(M)$,
4) $x\in M\Longleftrightarrow x(M)=0$,
5) $e(M)\equiv 1$,
6) $(x\vee y)(M)=x(M)\vee y(M)$,
7) $(x\wedge y)(M)=x(M)\wedge y(M)$.

Из 4) и 7) непосредственно вытекает, что всякий максимальный $l$-идеал — простой ([5], стр. 202), т. е. если $x\wedge y\in M$, то $x\in M$ или $y\in M$.

Пусть $\tau_\sigma-$слабейшая топология в $\mathfrak{M}$, при которой все функции $x(M)$ непрерывны. Из 1) следует, что пространство $(\mathfrak{M}, \tau_\sigma)$ отделимо.

Второй способ топологизации $\mathfrak{M}-$введение так называемой оболочечно-ядерной (hull-kernel) топологии $\tau_{hk}$ подобно тому, как это делают для множества максимальных идеалов коммутативного кольца с единицей (см., например, ([6], стр. 201)). Замкнутыми множествами назовем всевозможные множества вида $\mathfrak{A}(A)=\{M\in\mathfrak{M}: M\supset A\}$, где $A\subset L$. При этом $\mathfrak{A}(0)=\mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}(e)=\varnothing$, $\cap\,\mathfrak{A}(A_\alpha)=\mathfrak{A}(\cup\, A_\alpha)$, $\mathfrak{A}(A)\cup\mathfrak{A}(B)=\mathfrak{A}(\{|a|\wedge|b|: a\in A, b\in B\})$. Докажем последнее соотношение. Пусть $M\supset\{|a|\wedge|b|: a\in A,\ b\in B\}$ и $A\not\subset M$, так что существует $a_0\in A\setminus M$. Так как $|a_0|\wedge|b|\in M$ для любого $b\in B$, а $|a_0| \notin M$, то, в силу простоты $M$, $B \subset M$. Обратно, если $M \supset A$ или $M \supset B$, то $M \supset \{|a| \wedge |b| : a \in A,\ b \in B\}$ по определению $l$-идеала.

Заметим, что множества $\mathfrak{A}(x) = \{M \in \mathfrak{M} : x \in M\}$ образуют базу замкнутых множеств в топологии $\tau_{hk}$. Нетрудно проверить, что

$$\overline{\mathfrak{M}'} = \{M \in \mathfrak{M} : M \supset \bigcap_{M' \in \mathfrak{M}'} M'\}$$

для любого $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$.

**Теорема 1.** *Множество $\mathfrak{M}$ максимальных $l$-идеалов векторной решетки $L$ с сильной единицей $e$, наделенное оболочечно-ядерной топологией $\tau_{hk}$, бикомпактно.*

Доказательство. Достаточно установить, что если семейство $\{\mathfrak{A}(a)\}_{a \in A}$, где $A \subset L$, имеет пустое пересечение, то тем же свойством обладает и некоторое его конечное подсемейство.

Пусть

$$\bigcap_{a \in A} \mathfrak{A}(a) = \{M \in \mathfrak{M} : M \supset A\} = \varnothing.$$

Тогда $l$-идеал $(A)$, порожденный множеством $A$, совпадает с $L$, так как в противном случае существовал бы максимальный $l$-идеал $M \supset (A) \supset A$, что противоречит условию.

Итак, $(A) = L$. Тогда, в частности, $e \in (A)$, т. е. $|e| \leqslant \lambda_1 |a_1| + \cdots + \lambda_n |a_n|$ для некоторых $a_1, \ldots, a_n \in A$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R^+$, так что $e \in (\{a_1, \ldots, a_n\})$. Отсюда $(\{a_1, \ldots, a_n\}) = L$, и, значит,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{A}(a_i) = \left\{ M \in \mathfrak{M} : M \supset \{a_1, \ldots, a_n\} \right\} = \varnothing.$$

**Теорема 2.** *В множестве $\mathfrak{M}$ всех максимальных $l$-идеалов векторной решетки $L$ с сильной единицей $e$ топология $\tau_{hk}$ совпадает со слабой топологией $\tau_\sigma$.*

Доказательство. Достаточно показать, что функции $x(M)$ непрерывны в топологии $\tau_{hk}$. Действительно, тогда $\tau_\sigma \leqslant \tau_{hk}$ и так как $\tau_{hk}$ бикомпактна (теорема 1), а $\tau_\sigma$ отделима, то $\tau_\sigma = \tau_{hk}$.

Непрерывность функций $x(M)$ будет вытекать из справедливости соотношения:

$$\mathfrak{M}_{x,\alpha} = \{M' \in \mathfrak{M} : x(M') \leqslant \alpha\} = \{M \in \mathfrak{M} : M \supset \bigcap_{M' \in \mathfrak{M}_{x,\alpha}} M'\} = \overline{\mathfrak{M}}_{x,\alpha}.$$

Докажем его. Пусть

$$M \supset \bigcap_{M' \in \mathfrak{M}_{x,\alpha}} M'.$$

Так как $(x - \alpha e)(M') \leqslant 0$ и, значит, $[(x - \alpha e) \vee 0](M') = 0$ для каждого $M' \in \mathfrak{M}_{x,\alpha}$, то $(x - \alpha e) \vee 0 \in M$, и, следовательно, $x(M) \leqslant \alpha$, т. е. $M \in \mathfrak{M}_{x,\alpha}$.

Таким образом, $\mathfrak{M}_{x,\alpha}$ замкнуто. Так как множества

$$\{M \in \mathfrak{M} : x(M) \geqslant \beta\} = M_{-x,\,-\beta}$$

тоже замкнуты для любого $\beta \in R$, то все функции $x(M)$ непрерывны в топологии $\tau_{hk}$.

II. Пусть $X$ — равномерное пространство, $\mathfrak{P}(X)$ — естественно упорядоченное векторное пространство всех равномерно непрерывных функций на $X$. Очевидно, $\mathfrak{P}(X)$ — векторная решетка и $M_{x_0}=\{f\in\mathfrak{P}(X): f(x_0)=0\}$ для каждого $x_0\in X$ — ее максимальный $l$-идеал.

**Теорема 3.** *Пусть $X$ — нормированное пространство, наделенное своей естественной равномерностью. Тогда функция $e(x)=1+\|x\|$ является сильной единицей векторной решетки $\mathfrak{P}(X)$.*

Доказательство. Для любого $f\in\mathfrak{P}(X)$ существует $\delta\in\left(0\frac{1}{1+|f(0)|}\right)$ такое, что $\|x'-x''\|\leqslant\delta\Longrightarrow|f(x')-f(x'')|\leqslant 1$. Пусть $x\in X$, $x\neq 0$ и $n$ — целое число, удовлетворяющее неравенствам $n\delta\leqslant\|x\|<(n+1)\delta$. Положим

$$x_k=\frac{(\|x\|-k\delta)x}{\|x\|}\quad(0\leqslant k\leqslant n).$$

Так как

$\|x_k-x_{k-1}\|=\delta$ $(0\leqslant k\leqslant n)$ и $\|x_n\|=\|x\|-n\delta<\delta$, то $|f(x)-f(0)|\leqslant$

$$\leqslant|f(x)-f(x_1)|+|f(x_1)-f(x_2)|+\cdots+|f(x_n)-f(0)|\leqslant n+1\leqslant\frac{1}{\delta}\|x\|+1,$$

откуда

$$|f(x)\leqslant\frac{1}{\delta}\|x\|+\Big(1+|f(0)|\Big)=\frac{1}{\delta}(1+\|x\|).$$

**Теорема 4.** *Пусть $X$ — равномерное пространство такое, что $\mathfrak{P}(X)$ обладает сильной единицей $e$. Тогда $\mathfrak{P}(X)$ есть кольца (и алгебра) с единицей $e$ относительно операции умножения $\times$, определенной формулой $f\times g=\frac{fg}{e}$, где $fg$ — обычное произведение функций $f$ и $g$.*

Доказательство. Заметим, прежде всего, что $e(x)\neq 0$ для всех $x\in X$, так как в противном случае функция $f(x)\equiv 1$ не удовлетворяла бы неравенству $|f|\leqslant\lambda e$ ни для какого $\lambda$.

Очевидно, требует доказательства только, что если

$$f,\ g\in\mathfrak{P}(X),\ \text{то}\ f\times g=\frac{fg}{e}\in\mathfrak{P}(X).$$

Существует $c>0$ такое, что $|f|\leqslant ce$ и $|g|\leqslant ce$. Далее, для любого $\varepsilon>0$ существуют окружения $U_f$, $U_g$, $U_e$ такие, что

$$(x,\ x')\in U_f\Longrightarrow|f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{3c},\tag{1}$$

$$(x,\ x')\in U_g\Longrightarrow|g(x)-g(x')|<\frac{\varepsilon}{3c},\tag{2}$$

$$(x,\ x')\in U_e\Longrightarrow|e(x)-e(x')|<\frac{\varepsilon}{3c^2}.\tag{3}$$

Положим $U=U_f\cap U_g\cap U_e$ и пусть $(x,\ x')\in U$. Тогда

$$\left|\frac{f(x')g(x')}{e(x')}-\frac{f(x)g(x)}{e(x)}\right|=\left|\left[\frac{f(x')g(x')}{e(x')}-\frac{f(x)g(x')}{e(x')}\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{f(x)g(x')}{e(x')}-\frac{f(x)g(x')}{e(x)}\right]+\left[\frac{f(x)g(x')}{e(x)}-\frac{f(x)g(x)}{n(x)}\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|g(x')|}{e(x')}|f(x')-f(x)|+\frac{|f(x)|}{e(x)}\cdot\frac{|g(x')|}{e(x')}|e(x)-e(x')|+$$

$$+\frac{|f(x)|}{e(x)}|g(x')-g(x)|<c\cdot\frac{\varepsilon}{3c}+c^2\cdot\frac{\varepsilon}{3c^2}+c\cdot\frac{\varepsilon}{3c}=\varepsilon,$$

так что функция $\frac{fg}{e}$ равномерно непрерывна.

Итак, векторная решетка $\mathfrak{P}(X)$, обладающая сильной единицей $e$, является одновременно кольцом (относительно указанного умножения), причем $e$ также единица кольца.

Из последнего, в силу леммы Цорна, следует, что каждый собственный кольцевой идеал содержится хотя бы в одном максимальном кольцевом идеале. Естественно возникает вопрос: какова связь между максимальными кольцевыми идеалами и максимальными $l$-идеалами в $\mathfrak{P}(X)$?

**Лемма.** *Пусть $\mathfrak{P}(X)$ — совокупность всех равномерно непрерывных функций на равномерном пространстве $X$. Если $f,\ g \in \mathfrak{P}(X)$ и $|g| \leqslant |f|$, то существует такая функция $h \in \mathfrak{P}(X)$, что $hf = g^2$ и, значит, $h \times f = g \times g$.*

Доказательство (ср. [7], стр. 509). Положим

$$h(x) = \begin{cases} \frac{g^2(x)}{f(x)}, & \text{если } f(x) \neq 0, \\ 0\ , & \text{если } f(x) = 0. \end{cases}$$

Доказательства требует только, что $h \in \mathfrak{P}(X)$. Существует окружение $U_\varepsilon$ такое, что

$$(x', x) \in U_\varepsilon \Longrightarrow |g(x') - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad |f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\ .$$

Пусть $(x',\ x) \in U_\varepsilon$. Случай $f(x) = f(x') = 0$ тривиален.

Если

$$f(x) \neq 0 \quad \text{и} \quad f(x') \neq 0, \quad \text{то} \quad |h(x') - h(x)| = \left| \frac{g^2(x')}{f(x')} - \frac{g^2(x)}{f(x)} \right| =$$

$$= \left| \left[ \frac{g(x')\,g(x')}{f(x')} - \frac{g(x)\,g(x')}{f(x')} \right] + \left[ \frac{g(x)\,g(x')}{f(x')} - \frac{g(x)\,g(x')}{f(x)} \right] + \right.$$

$$\left. + \left[ \frac{g(x)\,g(x')}{f(x)} - \frac{g(x)\,g(x)}{f(x)} \right] \right| \leqslant \left| \frac{g(x')}{f(x')} \right| \, |g(x') - g(x)| +$$

$$+ \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| \left| \frac{g(x')}{f(x')} \right| |f(x) - f(x')| + \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| |g(x') - g(x)| \leqslant$$

$$\leqslant 2\,|g(x') - g(x)| + |f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

Наконец, если $f(x) = 0$, а $f(x') \neq 0$, то $|h(x') - h(x)| = |h(x')| \leqslant |f(x')| < \varepsilon$.

**Теорема 5.** *Если $\mathfrak{P}(X)$ обладает сильной единицей $e$ и в $\mathfrak{P}(X)$ введена указанная в теореме 4 операция умножения, то максимальные кольцевые идеалы в $\mathfrak{P}(X)$ совпадают с максимальными l-иделами.*

Доказательство. **А**. Всякий простой идеал $I$ кольца $\mathfrak{P}(X)$ является $l$-идеалом (напомним, что идеал $I$ называется простым, если $ab \in I \Longrightarrow a \in I$ или $b \in I$). В самом деле. если $f \in I$, $g \in \mathfrak{P}(X)$ и $|g| \leqslant |f|$, то по лемме существует $h \in \mathfrak{P}(X)$ такая, что $h \times f = g \times g$. Так как $f \in I$, то $h \times f \in I$, следовательно, $g \times g \in I$, а тогда, в силу простоты $I$, $g \in I$.

**Б**. Всякий $l$-идеал в $\mathfrak{P}(X)$ является кольцевым идеалом. Действительно, если $f \in I$, $g \in \mathfrak{P}(X)$, то $|f \times g| = \left| \frac{fg}{e} \right| = |f| \left| \frac{g}{e} \right| \leqslant c\,|f|$ для некоторого $c \in R^+$, откуда $f \times g \in I$.

**В**. Всякий максимальный кольцевой идеал $M$ в $\mathfrak{P}(X)$ является максимальным $l$-идеалом. В самом деле, будучи максимальным идеалом кольца с единицей, $M$ — простой идеал ([8], стр. 98) и потому, в силу А, $l$-идеал. Тогда $M$ принадлежит некоторому максимальному $l$-идеалу $M'$, который в силу Б является кольцевым идеалом. Из максимальности $M$ как кольцевого идеала следует тогда $M = M'$, т. е. $M$ — максимальный $l$-идеал.

**Г.** Всякий максимальный $l$-идеал $M$ в $\mathfrak{P}(X)$ является максимальным кольцевым идеалом. Действительно, в силу Б, $M$ — кольцевой идеал. Так как $\mathfrak{P}(X)$ — кольцо с единицей, то существует максимальный кольцевой идеал $M' \supset M$. Но, в силу В, $M'$ — $l$-идеал, следовательно, $M = M'$.

**Замечание 1.** Пространства $C^*(X)$ ограниченных непрерывных функций на топологическом пространстве $X$ и $\mathfrak{P}^*(X)$ ограниченных равномерно непрерывных функций на равномерном пространстве $X$, с обычными векторными операциями и упорядочением, одновременно, кольца и векторные решетки, причем $e(x) \equiv 1$ является одновременно единицей кольца $e$ и сильной единицей решетки. Аналогично предыдущему можно установить, что в каждом из этих пространств максимальные $l$-идеалы совпадают с максимальными кольцевыми идеалами.

**Замечание 2.** Множество всех максимальных $l$-идеалов в $\mathfrak{P}(X)$ вида $M_{x_0} = \{f \in \mathfrak{P}(X) : f(x_0) = 0\}$ плотно в $(\mathfrak{M}, \tau_{hk})$ и гомеоморфно $X$.

**Замечание 3.** Если $X$ — нормированное пространство, то $\mathfrak{P}(X)$, наделенное нормой $\|f\| = |f(0)| + \sup\limits_{\|x'-x''\| \leq 1} |f(x') - f(x'')|$, предложенной И. А. Березанским, является банаховским пространством. Можно показать, что произведение, введенное в теореме 4, непрерывно по совокупности аргументов, так что в этом случае $\mathfrak{P}(X)$ — нормированное кольцо.

Москва

Поступило в редакцию
10.IX.1965

## ЛИТЕРАТУРА


1. K. Yosida, On vector lattice with a unit, Proc. Imp. Acad., Tokyo, XVII, 1941, N 5, pp 121–124.
2. Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, ИЛ, М., 1959.
3. М. Дэй, Нормированные линейные пространства, ИЛ, М., 1961.
4. Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Физматгиз, М., 1961.
5. Г. Биркгоф, Теория структур, ИЛ, М., 1952.
6. М. А. Наймарк, Нормированные кольца, Гостехиздат, М., 1956.
7. C. W. Kohls, Prime ideals in rings of continuous functions, Illinois J. Math., 2 (1958), pp 505–536.
8. А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре, Физматгиз, М., 1962.


## APIE TOLYGIAI TOLYDINIŲ FUNKCIJŲ VEKTORINES GARDELES IR ŽIEDUS

L. APARINA

(*Reziumė*)

Straipsnyje nagrinėjamos vektorinės gardelės su stipriu vienetu. Įrodoma, jog tokių gardelių visų maksimalinių $l$-idealų aibė, padalyta apvalkinės-branduolinės topologijos, yra bikompaktinė. Toliau parodoma, kad ši topologija sutampa su silpna, iš ko gauname naują K. Josido (1) vienos teoremos įrodymą.

Antroje dalyje nagrinėjama tolydinėje erdvėje visų tolygiai tolydinių funkcijų vektorinės gardelės, turinčios stiprų vienetą $e$. Įrodoma, jei apibrėžti daugybos operaciją formule

$$f \times g = \frac{fg}{e},$$

kur $fg$ paprasta funkcijų sandauga, tai nagrinėjama vektorinė gardelė virsta žiedu; tada maksimaliniai $l$-idealai sutampa su maksimaliniais žiediniais idealais.

---

## ON VECTOR LATTICES AND RINGS OF UNIFORMLY CONTINUOUS FUNCTIONS

L. APARINA

(*Summary*)

In the present paper vector lattices with strong units are considered. We prove that the set of all maximal $l$-ideals of such a lattice, having hull-kernel topology, is bicompact.

Then it is shown that this topology coincides with the weak topology, that gives us a new proof of a theorem of Yosida (1).

In the second section we consider vector lattices of all uniformly continuous functions on a uniform space, which have a strong unit $e$. It is proved that if we can define the operation of multiplication with the help of the formula $f \times g = \frac{fg}{e}$, where $fg$ is the usual product of the functions then the discussed vector lattice becomes a ring. At the same time the maximal $l$-ideals will coincide with the maximal ring ideals.

---